Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 512.54+519.17

ГРАФЫ КЭЛИ ГРУПП $\mathbb{Z}^d$ И ПРЕДЕЛЫ ВЕРШИННО–ПРИМИТИВНЫХ ГРАФОВ HA–ТИПА

К. В. Костоусов

Аннотация: Исследуются предельные графы для конечных графов, допускающих вершинно-примитивную группу автоморфизмов, содержащую регулярную абелеву нормальную подгруппу. В [1] показано, что эти предельные графы являются графами Кэли групп $\mathbb{Z}^d$. В данной работе доказано, что для каждого $d > 1$ множество графов Кэли группы $\mathbb{Z}^d$, являющихся предельными для конечных графов с вершинно-примитивными и реберно-транзитивными группами автоморфизмов, счетно (причем в явном виде указаны счетные подмножества таких предельных графов). Кроме того, при $d < 4$ перечислены все графы Кэли групп $\mathbb{Z}^d$, являющиеся предельными графами для минимальных вершинно-примитивных графов. Доказательства основываются на связи групп автоморфизмов графов Кэли групп $\mathbb{Z}^d$ с кристаллографическими группами.

Ключевые слова: вершинно-примитивный граф, реберно-симметрический граф, предельный граф, граф Кэли свободной абелевой группы конечного ранга, кристаллографическая группа.

Введение

Всюду далее под графом понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа Γ обозначается через $V(\Gamma)$, а множество ребер — через $E(\Gamma)$.

Граф называется *вершинно-симметрическим* (соответственно *реберно-симметрическим*), если группа его автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин (соответственно ребер).

Пусть d — положительное целое число и M — система порождающих группы $\mathbb{Z}^d$ такая, что $M = -M$, $0 \notin M$. Тогда *графом Кэли группы $\mathbb{Z}^d$, соответствующим системе порождающих M*, называется граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}$ с множеством вершин $V(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}) = \mathbb{Z}^d$ и множеством ребер $E(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}) = \{\{a,b\} \mid a - b \in M\}$. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M})$ графа Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}$ действует транзитивно на $V(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M})$. Пусть $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M})_0$ — стабилизатор вершины 0 в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M})$. Легко видеть, что граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}$ является реберно-симметрическим тогда и только тогда, когда множество M является $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M})_0$-орбитой. Реберно-симметрический граф Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M}$ группы $\mathbb{Z}^d$ назовем *минимальным*, если множество M обладает наименьшей мощностью среди мощностей $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^d,M})_0$-орбит, отличных от $\{0\}$.

Пусть G — группа подстановок некоторого множества Ω. Напомним, что *блоком импримитивности* группы G называется непустое подмножество Λ множества Ω такое, что $g(\Lambda) \cap \Lambda \in \{\Lambda, \varnothing\}$ для каждого $g \in G$. Все множество Ω и

Работа выполнена частичной при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00378).

любое его одноэлементное подмножество называются *тривиальными* блоками импримитивности группы G. Группа G называется *примитивной*, если она не имеет нетривиальных блоков импримитивности. Группа G называется *регулярной*, если она транзитивна на Ω и стабилизатор любой точки $x \in \Omega$ в группе G единичен.

Если X — произвольное множество конечных связных вершинно-примитивных (т. е. допускающих примитивную на множестве вершин группу автоморфизмов) графов, то *предельными* для X называются такие бесконечные связные графы, у которых каждый шар изоморфен шару некоторого графа из X (см. [1]). Описание предельных для X графов доставляет описание типичного строения шаров графов из X.

Конечный связный граф Γ называется *вершинно-примитивным графом HA-типа*, если он допускает примитивную на вершинах группу автоморфизмов G, обладающую регулярной абелевой нормальной подгруппой. Если, кроме того, валентность Γ не превосходит валентности любого связного графа Δ, для которого $V(\Gamma) = V(\Delta)$ и $G \leq \mathrm{Aut}(\Delta)$, то Γ называется *минимальным вершинно-примитивным графом HA-типа.* Заметим, что в последнем случае группа G действует транзитивно на ребрах графа Γ и, следовательно, этот граф является реберно-симметрическим.

По теореме 4 из [1] каждый предельный граф для множества вершинно-примитивных графов HA-типа является графом Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ для некоторого d. Отсюда легко следует, что каждый предельный граф для множества минимальных вершинно-примитивных графов HA-типа является минимальным графом Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ для некоторого d.

Нетрудно построить бесконечно много попарно неизоморфных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ фиксированной валентности уже в случае $d = 1$. В то же время в случае $d = 1$ существует только один реберно-симметрический граф Кэли группы $\mathbb{Z}^d$, а именно граф, соответствующий множеству порождающих $M = \{1, -1\}$. Несложно показать, что последний граф будет также единственным графом Кэли группы $\mathbb{Z}$, являющимся предельным графом для множества минимальных вершинно-примитивных графов HA-типа.

В настоящей работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для каждого $d \geq 2$ существует счетное число попарно неизоморфных реберно-симметрических графов Кэли группы $\mathbb{Z}^d$. Более того, для каждого $d \geq 2$ существует счетное число попарно неизоморфных реберно-симметрических графов Кэли группы $\mathbb{Z}^d$, являющихся предельными графами для множества реберно-симметрических вершинно-примитивных графов HA-типа.*

Теорема 2. 1. *Минимальные графы Кэли группы $\mathbb{Z}^2$ с точностью до изоморфизма исчерпываются графами, соответствующими следующим системам порождающих:*

$$M_{2,1} = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\};$$

$$M_{2,2} = \{(1,0), (1,1), (0,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1)\}.$$

Каждый из этих графов является предельным графом для множества минимальных вершинно-примитивных графов HA-типа.

2. *С точностью до изоморфизма существует только один минимальный граф Кэли группы $\mathbb{Z}^3$. Он соответствуют системе порождающих*

$$M_{3,1} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1)\}$$

и является предельным графом для множества минимальных вершинно-примитивных графов HA-типа.

Работа имеет следующую структуру. В § 1 устанавливается важная для дальнейшего связь групп автоморфизмов графов Кэли групп $\mathbb{Z}^d$ с группами аффинных преобразований и кристаллографическими группами пространства $\mathbb{R}^d$. В § 2 результаты § 1 используются для доказательства теоремы 1. На эту связь внимание автора обратил В. И. Трофимов. Результаты § 1 позволяют, кроме того, описывать минимальные графы Кэли групп $\mathbb{Z}^d$ в терминах кристаллографических групп. В § 3 и § 4 на основе этого доказываются соответственно утверждения 1 и 2 теоремы 2.

§ 1. Изоморфизмы и автоморфизмы графов Кэли групп $\mathbb{Z}^d$

В настоящем параграфе исследуются изоморфизмы и автоморфизмы графов Кэли групп $\mathbb{Z}^d$. Показывается, в частности, что каждый автоморфизм графа Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ естественным образом продолжается до аффинного преобразования пространства $\mathbb{R}^d$, а полученная таким образом группа аффинных преобразований сопряжена в $\mathbf{A}(d)$ с некоторой кристаллографической группой евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ (см. теорему 3).

В настоящей работе используется следующая терминология.

Пусть K — абелева группа и M — система порождающих группы K такая, что $M = -M$ и $0 \notin M$. *Графом Кэли группы K, соответствующим системе порождающих M*, называется граф $\Gamma_{K,M}$ с множеством вершин $V(\Gamma_{K,M}) = K$ и множеством ребер $E(\Gamma_{K,M}) = \{\{a, b\} \mid a - b \in M\}$. Группа $\mathrm{Aut}(\Gamma_{K,M})$ автоморфизмов графа $\Gamma_{K,M}$ содержит подгруппу $t(K)$ сдвигов на элементы из K.

Пусть d — положительное целое число. Фиксируя некоторый базис $e_1, \dots, e_d$ векторного пространства $\mathbb{R}^d$, будем считать, что элементами $\mathbb{R}^d$ являются вектор-строки вида $(x_1, \dots, x_d)$, где $x_1, \dots, x_d$ — координаты элементов $\mathbb{R}^d$ относительно базиса $e_1, \dots, e_d$. Мы отождествляем линейные преобразования векторного пространства $\mathbb{R}^d$ с их матрицами относительно базиса $e_1, \dots, e_d$. Таким образом, действие линейного преобразования A векторного пространства $\mathbb{R}^d$ на элемент $(x_1, \dots, x_d)$ векторного пространства $\mathbb{R}^d$ задается формулой

$$A((x_1, \dots, x_d)) = (A(x_1, \dots, x_d)^t)^t,$$

где t обозначает транспонирование матрицы.

На множестве элементов векторного пространства $\mathbb{R}^d$ естественным образом определена структура вещественного d-мерного евклидова пространства с метрикой

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}, \quad \text{где } x = (x_1, \dots, x_d),\ y = (y_1, \dots, y_d),$$

и структура вещественного d-мерного аффинного пространства.

Группа движений евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ обозначается через $\mathbf{E}(d)$. *Группа аффинных преобразований* аффинного пространства $\mathbb{R}^d$ обозначается через $\mathbf{A}(d)$. Действие элемента $g \in \mathbf{E}(d)$ задается формулой

$$g(x) = Ux + a,$$

где $x, a \in \mathbb{R}^d$ и $U \in \mathrm{O}(d)$. Здесь через $\mathrm{O}(d)$ обозначается группа ортогональных $d \times d$-матриц над $\mathbb{R}$. Действие элементов группы $\mathbf{A}(d)$ задается той же формулой, но с $U \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$, где $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ — группа невырожденных $d \times d$-матриц над $\mathbb{R}$. При этом U называется *линейной частью* движения g евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ (соответственно аффинного преобразования g аффинного пространства $\mathbb{R}^d$). С каждым элементом $y \in \mathbb{R}^d$ ассоциирован параллельный перенос $t(y) \in \mathbf{E}(d)$, $t(y) : x \mapsto x + y$.

Линейные преобразования векторного пространства $\mathbb{R}^d$ с положительным (соответственно отрицательным) определителем будем называть *преобразованиями первого* (соответственно *второго*) *рода*. Ясно, что если некоторая группа H линейных преобразований векторного пространства $\mathbb{R}^d$ содержит преобразования второго рода, то она имеет вид $H^+ \cup H^+ h^-$, где h^- — произвольное преобразование второго рода из H, а H^+ — подгруппа, состоящая из всех преобразований первого рода группы H.

Для произвольного подмножества M векторного пространства $\mathbb{R}^d$ через $\langle M \rangle_+$ обозначим подгруппу аддитивной группы векторов пространства $\mathbb{R}^d$, порожденную множеством M.

Подмножество L аффинного пространства $\mathbb{R}^d$ называется *d-мерной решеткой*, если $L = a + \langle \{r_1, \dots, r_d\} \rangle_+$ для некоторого базиса $r_1, \dots, r_d$ векторного пространства $\mathbb{R}^d$ и некоторого элемента a аффинного пространства $\mathbb{R}^d$. Всюду далее мы будем естественным образом отождествлять $\mathbb{Z}^d$ с $\langle \{e_1, \dots, e_d\} \rangle_+$, где $e_1, \dots, e_d$ — выбранный ранее базис пространства $\mathbb{R}^d$.

Напомним, что подгруппа группы $\mathbb{E}(d)$ называется *кристаллографической группой*, если она дискретна и обладает компактной фундаментальной областью. Множество линейных частей элементов кристаллографической группы называется *линейной частью* этой кристаллографической группы.

Автоморфизм g связного графа называется *ограниченным*, если расстояния между вершинами графа и их образами под действием g не превосходят некоторого фиксированного числа.

Следующее предложение следует из [2, предложение 2.2].

Предложение 1. *Пусть $\varnothing \neq M \subseteq \mathbb{R}^d$, $M = -M$ и $0 \notin M$. Тогда подгруппа сдвигов $t(\langle M \rangle_+)$ совпадает с группой ограниченных автоморфизмов графа $\Gamma_{\langle M \rangle_+, M}$ и, в частности, $t(\langle M \rangle_+) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M \rangle_+, M})$.*

Следующая теорема устанавливает связь между группами автоморфизмов графов Кэли групп $\mathbb{Z}^d$ и кристаллографическими группами евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Как обычно, если G, H — группы, $H < G$ и $g \in G$, то полагаем $H^g = g^{-1} H g$.

Теорема 3. (a) *Пусть $\varnothing \neq M_i \subseteq \mathbb{R}^d$, $M_i = -M_i$, $0 \notin M_i$ для $i = 1, 2$. Если ψ — изоморфизм графа $\Gamma_{\langle M_1 \rangle_+, M_1}$ на граф $\Gamma_{\langle M_2 \rangle_+, M_2}$ такой, что $\psi(0) = 0$, то для любых $a, b \in \langle M_1 \rangle_+$ справедливо $\psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b)$.*

(b) *Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $M = -M$, $0 \notin M$ и $\langle M \rangle_+$ — d-мерная решетка. Тогда каждый автоморфизм g графа $\Gamma_{\langle M \rangle_+, M}$ единственным образом продолжается до некоторого аффинного преобразования $\phi(g)$ пространства $\mathbb{R}^d$. Более того, существует $W \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ такая, что $(\phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M \rangle_+, M})))^{W^{-1}}$ — кристаллографическая группа пространства $\mathbb{R}^d$, а $(\phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M \rangle_+, M})_0))^{W^{-1}}$ — линейная часть этой кристаллографической группы.*

Доказательство. (a) Пусть χ — изоморфизм группы $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M_1 \rangle_+, M_1})$ на группу $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M_2 \rangle_+, M_2})$, определенный следующей формулой: $\chi(g) = \psi g \psi^{-1}$ для $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M_1 \rangle_+, M_1})$. Очевидно, что для произвольного ограниченного автоморфизма g графа $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M_1 \rangle_+, M_1})$ автоморфизм $\chi(g)$ графа $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M_2 \rangle_+, M_2})$ также является ограниченным. Поэтому по предложению 1 имеем $\chi(t(\langle M_1\rangle_+)) = t(\langle M_2\rangle_+)$. Далее, для произвольных $a, b \in \langle M_1\rangle_+$ будет

$$\psi(a+b) = \psi t(a)(b) = \psi t(a)\psi^{-1}\psi(b) = \chi(t(a))\psi(b),$$

что в силу $\chi(t(a)) \in t(\langle M_2\rangle_+)$ и $\chi(t(a))(0) = \psi(a)$ влечет $\chi(t(a)) = t(\psi(a))$. Таким образом, $\psi(a+b) = t(\psi(a))\psi(b) = \psi(a) + \psi(b)$.

(b) Из предложения 1 следует, что $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M}) = \mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})_0 \leftthreetimes t(\langle M\rangle_+)$ (где $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})_0$ — стабилизатор вершины 0 графа $\Gamma_{\langle M\rangle_+,M}$ в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})$). Поэтому из (a) (при $M_1 = M_2 = M$) вытекает, что каждый автоморфизм g графа $\Gamma_{\langle M\rangle_+,M}$ единственным образом продолжается до некоторого аффинного преобразования $\phi(g)$ пространства $\mathbb{R}^d$.

Пусть $H := \phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})_0)$. Положим $S := \frac{1}{|H|}\sum\limits_{B\in H} BB^t$. Соответствующая матрице S квадратичная форма x^tSx на векторном пространстве $\mathbb{R}^d$ положительно определена, и, следовательно, существует матрица $W \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ такая, что $WSW^t = E_d$, где E_d — единичная $d\times d$-матрица. Поскольку для любой матрицы $B \in H$ имеем

$$\begin{aligned}(WBW^{-1})(WBW^{-1})^t &= (WBW^{-1})WSW^t(WBW^{-1})^t\\ &= WBSB^tW^t = WB\biggl(\frac{1}{|H|}\sum_{B_1\in H}(B_1B_1^t)\biggr)B^tW^t\\ &= W\biggl(\frac{1}{|H|}\sum_{B_1\in H}(BB_1)(BB_1)^t\biggr)W^t = WSW^t = E_d,\end{aligned}$$

то $H^{W^{-1}} < \mathrm{O}(d)$.

Так как d-мерная решетка $\langle M\rangle_+$ является орбитой группы $\phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})) = H \leftthreetimes \phi(t(\langle M\rangle_+))$, то d-мерная решетка $W(\langle M\rangle_+)$ является орбитой подгруппы $(\phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})))^{W^{-1}} = H^{W^{-1}} \leftthreetimes (\phi(t(\langle M\rangle_+)))^{W^{-1}}$ группы $\mathbf{E}(d)$. Таким образом, группа $(\phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})))^{W^{-1}}$ является кристаллографической группой пространства $\mathbb{R}^d$, а группа $H^{W^{-1}}$ — ее линейной частью. Теорема доказана.

Всюду ниже для произвольного $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})$, где $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $M = -M$, $0 \notin M$ и $\langle M\rangle_+$ — d-мерная решетка, под $\phi(g)$ будет пониматься аффинное преобразование аффинного пространства $\mathbb{R}^d$, определенное в соответствии с п. (b) теоремы 3.

Для теоремы 4 нам понадобятся следующие два простых предложения.

Предложение 2. *Пусть $M \in \mathbb{R}^d$, $M = -M$ и $0 \notin M$. Тогда $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})_0$ действует точно на множестве вершин M графа $\Gamma_{\langle M\rangle_+,M}$. Если, кроме того, граф $\Gamma_{\langle M\rangle_+,M}$ реберно-симметрический, то множество вершин M является $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})_0$-орбитой.*

Доказательство. Пусть элемент $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})_0$ поточечно стабилизирует M. Достаточно показать, что в этом случае g — тождественный автоморфизм. Произвольная вершина x графа $\Gamma_{\langle M\rangle_+,M}$ имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i$, где k — неотрицательное целое, а m_i — образующие из M. Из теоремы 3(a) следует, что $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} g(m_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i = x$. Первая часть предложения доказана.

Теперь покажем, что для любой пары вершин $m_i, m_j \in M$ найдется автоморфизм $g_0 \in \operatorname{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})_0$ такой, что $g_0(m_i) = m_j$. В силу реберной симметричности графа $\Gamma_{\langle M\rangle_+,M}$ найдется $g \in \operatorname{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})$ такой, что $g(\{0, m_i\}) = \{0, m_j\}$. Если $g(0) = 0$ (и, следовательно, $g(m_i) = m_j$), то, полагая $g_0 = g$, получим требуемое. Если же $g(0) = m_j$, то $g(m_i) = 0$. Тогда для $g_0 := I\,t(-m_j)\,g$, где I — инверсия (т. е. автоморфизм, заданный формулой $x \mapsto -x$), имеем $g_0 \in \operatorname{Aut}(\Gamma_{\langle M\rangle_+,M})_0$ и $g_0(m_i) = m_j$. Предложение доказано.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 3. *Пусть $M_1 \in \mathbb{R}^d$, $M_1 = -M_1$, $0 \notin M_1$, $\langle M_1\rangle_+$ — d-мерная решетка и $M_2 = U(M_1)$, где $U \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$. Тогда*

(a) $\langle M_2\rangle_+ = U(\langle M_1\rangle_+)$ *и* $\phi(\operatorname{Aut}(\Gamma_{\langle M_2\rangle_+,M_2})_0) = (\phi(\operatorname{Aut}(\Gamma_{\langle M_1\rangle_+,M_1})_0))^{U^{-1}}$;

(b) *графы Кэли* $\Gamma_{\langle M_2\rangle_+,M_2}$ *и* $\Gamma_{\langle M_1\rangle_+,M_1}$ *изоморфны.*

Два множества векторов векторного пространства $\mathbb{R}^d$ будем называть *гомотетичными*, если одно из них получается из другого умножением на ненулевой скаляр.

Зафиксируем $d \geq 2$. По теореме Бибербаха (см. [3, 8.5.10]) существует лишь конечное число попарно не сопряженных в $\mathbf{A}(d)$ кристаллографических групп евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Следовательно, существует лишь конечное число попарно не сопряженных в $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ линейных частей кристаллографических групп евклидова пространства $\mathbb{R}^d$.

Следующая теорема позволяет описать минимальные графы Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ исходя из строения линейных частей кристаллографических групп евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Отметим, однако, что данная теорема в общем случае не содержит алгоритма для получения всех попарно неизоморфных минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ при фиксированном d.

Теорема 4. (a) *Пусть $G \leq \mathrm{O}(d)$ — линейная часть кристаллографической группы евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Пусть G-орбита A обладает следующими свойствами:*

1) *$A = -A$, $0 \notin A$ и $\langle A\rangle_+$ — d-мерная решетка;*

2) *мощность A не превосходит мощности любой G-орбиты на множестве $\langle A\rangle_+$, отличной от $\{0\}$;*

3) $\phi(\operatorname{Aut}(\Gamma_{\langle A\rangle_+,A})_0) = G$.

Пусть, кроме того, $(r_1^1, \dots, r_1^d), \dots, (r_d^1, \dots, r_d^d)$ — базис векторного пространства $\mathbb{R}^d$, для которого $\langle A\rangle_+ = \langle\{(r_1^1, \dots, r_1^d), \dots, (r_d^1, \dots, r_d^d)\}\rangle_+$. Положим

$$U = \begin{pmatrix} r_1^1 & \dots & r_d^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^d & \dots & r_d^d \end{pmatrix}.$$

Тогда $U^{-1}(\langle A\rangle_+) = \mathbb{Z}^d$ и граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, U^{-1}(A)}$ является минимальным графом Кэли группы $\mathbb{Z}^d$.

(b) *Обратно, с точностью до изоморфизма любой минимальный граф Кэли группы $\mathbb{Z}^d$ может быть получен таким образом. А именно, пусть $G_1, \dots, G_k$ — полная система представителей для классов сопряженных в $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ линейных частей кристаллографических групп евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Для каждого $1 \leq i \leq k$ пусть $\mathscr{A}_i$ — множество G_i-орбит, обладающих свойствами* 1–3 *из п.* (a) *(где в качестве G берется G_i) такое, что для каждой G_i-орбиты, обладающей свойствами* 1–3 *из п.* (a), *существует в точности одна гомотетичная ей G_i-орбита,* *содержащаяся в* $\mathscr{A}_i$*. Пусть, кроме того, каждой орбите* $A \in \mathscr{A}_i$, $1 \le i \le k$, *поставлена в соответствие матрица*

$$U_A = \begin{pmatrix} r_1^1 & \dots & r_d^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^d & \dots & r_d^d \end{pmatrix},$$

где $\left(r_1^1, \dots, r_1^d\right), \dots, \left(r_d^1, \dots, r_d^d\right)$ *— базис векторного пространства* $\mathbb{R}^d$*, для которого* $\langle A \rangle_+ = \left\langle \left\{ \left(r_1^1, \dots, r_1^d\right), \dots, \left(r_d^1, \dots, r_d^d\right) \right\} \right\rangle_+$*. Тогда для любого минимального графа Кэли* $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, M}$ *группы* $\mathbb{Z}^d$ *существует преобразование* $W \in \pm \operatorname{SL}(d, \mathbb{Z})$ *такое, что для некоторого* $i, 1 \le i \le k$*, некоторого* $A \in \mathscr{A}_i$ *и* $U = U_A W$ *справедливо* $\mathbb{Z}^d = U^{-1}(\langle A \rangle_+)$ *и* $M = U^{-1}(A)$ (*что в силу предложения* 3(b) *влечет изоморфность графов* $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, M}$, $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, U_A^{-1}(A)}$).

Доказательство. Справедливость утверждения (a) теоремы следует из предложения 3(a).

Докажем утверждение (b) теоремы. Пусть $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, M}$ — произвольный минимальный граф Кэли группы $\mathbb{Z}^d$, и пусть $H = \phi(\operatorname{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^d, M})_0)$. По теореме 3(b) существует $W_1 \in \operatorname{GL}(d, \mathbb{R})$ такое, что $H^{W_1^{-1}}$ является линейной частью некоторой кристаллографической группы евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Поэтому $H^{W_1^{-1} W_2^{-1}} = G_i$ для некоторого i, $1 \le i \le k$, и некоторого преобразования $W_2 \in \operatorname{GL}(d, \mathbb{R})$.

Из предложения 3(a) следует, что множество $W_2 W_1(M)$ является G_i-орбитой и обладает свойствами 1–3 из п. (a) теоремы (где в качестве G взято G_i). Значит, $\mathscr{A}_i$ содержит G_i-орбиту $A := c W_2 W_1(M)$ для некоторого ненулевого скаляра c. Положим $U := c W_2 W_1$. Тогда $M = U^{-1}(A)$ и $H^{U^{-1}} = G_i$. Очевидно, что для A выполняются условия 1–3 из п. (a) теоремы. Положим $W := U_A^{-1} U$. Тогда $W(M) = U_A^{-1}(A)$. Поэтому $W(\mathbb{Z}^d) = \mathbb{Z}^d$ и, следовательно, $W \in \pm \operatorname{SL}(d, \mathbb{Z})$. Утверждение (b) теоремы доказано.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Зафиксируем $d \ge 2$. Обозначим через G группу подстановок на множестве элементов группы $\mathbb{Z}^d$, состоящую из элементов g, определяемых формулой $g((x_1, \dots, x_d)) = (\varepsilon_1 x_{\tau(1)}, \dots, \varepsilon_d x_{\tau(d)})$, где τ — подстановка на множестве индексов $\{1, \dots, d\}$ и $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ для всех $1 \le i \le d$.

Лемма 1. *Пусть* $(x_1, \dots, x_d)$ *— элемент группы* $\mathbb{Z}^d$ *такой, что*
1) НОД$(x_1, \dots, x_d) = 1$,
2) $\sum\limits_{i=1}^{d} x_i \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$,
3) $x_i \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ *для некоторого* $1 \le i \le d$.

Тогда $G((x_1, \dots, x_d))$ *— система порождающих группы* $\mathbb{Z}^d$.

Доказательство. Согласно определению группы G имеем $(x_1, -x_2, \dots, -x_d) \in G((x_1, \dots, x_d))$. Поэтому $(2x_1, 0, \dots, 0) \in \langle G((x_1, \dots, x_d)) \rangle_+$. Аналогично $(2x_i, 0, \dots, 0) \in \langle G((x_1, \dots, x_d)) \rangle_+$ для каждого $2 \le i \le d$. По условию 1 существуют целые числа $u_1, \dots, u_d$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{d} u_i x_i = 1$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{d} (2u_i x_i, 0, \dots, 0) = (2, 0, \dots, 0)$. Следовательно, $(2, 0, \dots, 0) \in \langle G((x_1, \dots, x_d)) \rangle_+$. Согласно определению группы G имеем $(0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0) \in \langle G((x_1, \dots, x_d)) \rangle_+$, где 2 стоит на произвольном месте. Для доказательства леммы 1 остается показать, что $\langle G\rangle/2\mathbb{Z}^d = \overline{\mathbb{Z}}^d$, где $\overline{\mathbb{Z}}^d := \mathbb{Z}^d/2\mathbb{Z}^d$.

Из условий 2 и 3 следует, что среди $\bar{x}_i$, $1 \le i \le d$, встречаются как $\overline{0}$, так и $\overline{1}$. Пусть $\bar{x}_j = \overline{0}$, $\bar{x}_k = \overline{1}$. Сложив элемент $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d)$ с элементом, полученным из него заменой j-й координаты на k-ю, а k-й — на j-ю, получим $\bar{y}_{jk} = (\overline{0}, \ldots, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}) \in \langle G((x_1, \ldots, x_d))\rangle_+/2\mathbb{Z}^d$, где $\overline{1}$ стоят на j-м и k-м местах. Согласно определению группы G имеем $\bar{y}_{jk} \in \langle G((x_1, \ldots, x_d))\rangle_+/2\mathbb{Z}^d$ для произвольных целых j, k, $1 \le j < k \le d$.

Пусть количество $\overline{1}$ среди $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d$ равно $2n+1$ (см. условие 2). Сложив элемент $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d)$ с подходящими n элементами $\bar{y}_{jk}$, получим элемент группы $\langle G((x_1, \ldots, x_d))\rangle_+/2\mathbb{Z}^d$, у которого в точности одна координата равна $\overline{1}$. Согласно определению группы G тогда $\langle G((x_1, \ldots, x_d))\rangle_+/2\mathbb{Z}^d$ содержит все элементы $\overline{Z}^d$, у которых в точности одна координата равна $\overline{1}$. Следовательно, $\langle G((x_1, \ldots, x_d))\rangle_+ = \mathbb{Z}^d$, и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $(a_1, \ldots, a_d)$, $(b_1, \ldots, b_d)$ — различные элементы группы $\mathbb{Z}^d$, $d \ge 2$, для которых выполняются условия 1–3 из леммы 1, причем $a_1 > a_2 > \cdots > a_d > 0$, $b_1 > b_2 > \cdots > b_d > 0$. Тогда не существует эндоморфизма группы $\mathbb{Z}^d$, отображающего $G((a_1, \ldots, a_d))$ на $G((b_1, \ldots, b_d))$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение из формулировки леммы неверно для $d = 2$, т. е. существует эндоморфизм группы $\mathbb{Z}^2$, отображающий $G((a_1, a_2))$ на $G((b_1, b_2))$. Этот эндоморфизм единственным образом продолжается до линейного преобразования ψ векторного пространства $\mathbb{R}^2$ такого, что $\psi(G((a_1, a_2))) = G((b_1, b_2))$. Заметим, что в силу последнего равенства линейное преобразование ψ невырожденное.

Поскольку группа G действует транзитивно на $G((b_1, b_2))$, то существует $g \in G$ такой, что $g\psi((a_1, a_2)) = (b_1, b_2)$. Пусть $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ — матрица, отвечающая преобразованию $g\psi$ в базисе e_1, e_2 (см. § 1) векторного пространства $\mathbb{R}^2$.

Линейное преобразование $g\psi$ либо сохраняет, либо обращает ориентацию плоскости $\mathbb{R}^2$ (в зависимости от знака своего определителя). В соответствии с этим имеем следующие две возможности.

Если ориентация сохраняется, то

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Разрешая эту линейную систему уравнений относительно $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, b_1, b_2$ (над полем $\mathbb{R}$), получаем $p_{11} = p_{22}$, $p_{12} = 0$, $p_{21} = 0$, p_{22} — произвольное вещественное число, $b_1 = p_{22}a_1$, $b_2 = p_{22}a_2$. Учитывая, что $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ и НОД$(a_1, a_2) = 1$, НОД$(b_1, b_2) = 1$, имеем $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$; противоречие с условием леммы.

Если же ориентация плоскости $\mathbb{R}^2$ изменяется, то

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}.$$

Разрешая эту линейную систему уравнений относительно $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, b_1, b_2$ (над полем $\mathbb{R}$), получаем $p_{11} = -p_{22}$, $p_{12} = -p_{22}$, $p_{21} = -p_{22}$, p_{22} — произвольное вещественное число, $b_1 = -p_{22}(a_1+a_2)$, $b_2 = p_{22}(a_2-a_1)$. Принимая во внимание тот факт, что $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ и $a_1 + a_2 \equiv a_2 - a_1 \equiv 1(\operatorname{mod} 2)$, получаем, что $b_1 \equiv b_2(\operatorname{mod} 2)$. Это противоречит условию леммы.

Пусть теперь $d > 2$ и существует эндоморфизм группы $\mathbb{Z}^d$, отображающий $G((a_1, \dots, a_d))$ на $G((b_1, \dots, b_d))$. Этот эндоморфизм единственным образом продолжается до линейного преобразования ψ векторного пространства $\mathbb{R}^d$ такого, что $\psi(G((a_1, \dots, a_d))) = G((b_1, \dots, b_d))$. Заметим, что в силу последнего равенства линейное преобразование ψ невырожденное.

Введем вспомогательное определение. Пусть A — некоторое подмножество аффинного пространства $\mathbb{R}^d$. *Гранью* множества A будем называть любое подмножество D множества A такое, что через все точки из D проходит единственная гиперплоскость аффинного пространства $\mathbb{R}^d$, причем все точки из $A \setminus D$ лежат по одну сторону от этой гиперплоскости.

Пусть D — некоторая грань множества $A := G((a_1, \dots, a_d))$. Найдем число элементов в D.

Пусть $c_1x_1 + \dots + c_dx_d = c$ — уравнение гиперплоскости L_D аффинного пространства $\mathbb{R}^d$, проходящей через все точки из D. Заменив в случае необходимости грань D ее образом под действием подходящего элемента группы G, можно считать, что первые l_D коэффициентов c_i отличны от нуля, а последние $d - l_D$ — равны нулю (где $1 \le l_D \le d$), причем $c \ge 0$. Тогда $c > 0$, поскольку в противном случае легко указать пару точек из A, лежащих по разные стороны гиперплоскости L_D. Очевидно, кроме того, что все точки из A удовлетворяют неравенству $c_1x_1 + \dots + c_{l_D}x_{l_D} \le c$.

Пусть $(a'_1, \dots, a'_d)$ — произвольная точка из D. Покажем, что

$$\{\operatorname{sign}(c_1)a'_1, \dots, \operatorname{sign}(c_{l_D})a'_{l_D}\} = \{a_1, \dots, a_{l_D}\}. \tag{1}$$

Действительно, в противном случае существуют целые числа i_1, i_2, i_3, i_4 такие, что $1 \le i_1, i_3 \le l_D$, $l_D < i_2, i_4 \le d$, $|a'_{i_1}| = a_{i_2}$ и $|a'_{i_4}| = a_{i_3}$. Тогда значение линейного многочлена $c_1x_1 + \dots + c_{l_D}x_{l_D}$ на элементе $(a'_1, \dots, a'_{i_1-1}, \operatorname{sign}(c_{i_1})a_{i_3}, a'_{i_1+1}, \dots, a'_{i_4-1}, a_{i_2}, a'_{i_4+1}, \dots, a'_d)$ множества A строго больше c. Это противоречит определению грани.

В силу (1) для произвольной точки $(a'_1, \dots, a'_d) \in D$ выполняется равенство $\operatorname{sign}(c_1)a'_1 + \dots + \operatorname{sign}(c_{l_D})a'_{l_D} = a_1 + \dots + a_{l_D}$. Следовательно, гиперплоскость L_D имеет уравнение $\varepsilon_1x_1 + \dots + \varepsilon_{l_D}x_{l_D} = a_1 + \dots + a_{l_D}$, где $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ для $i = 1, \dots, l_D$. Поскольку $D \subseteq G((a'_1, \dots, a'_d))$, то отсюда вытекает, что грань D состоит в точности из элементов вида $(\varepsilon_1 a_{\lambda(1)}, \dots, \varepsilon_{l_D} a_{\lambda(l_D)}, \zeta_{l_D+1} a_{\mu(l_D+1)}, \dots, \zeta_d a_{\mu(d)})$, где λ — произвольная подстановка на множестве индексов $\{1, \dots, l_D\}$, μ — произвольная подстановка на множестве индексов $\{l_D + 1, \dots, d\}$ и ζ_i — произвольный элемент из $\{1, -1\}$ для $i = l_D + 1, \dots, d$. Таким образом,

$$|D| = l_D!(d - l_D)!2^{d-l_D}. \tag{2}$$

Аналогично если D' — грань множества $B = G((b_1, \dots, b_d))$, гиперплоскость которой имеет уравнение $c'_1x_1 + \dots + c'_dx_d = c'$, причем среди $c'_1, \dots, c'_d$ ровно $l_{D'}$, отличных от нуля, то

$$|D'| = l_{D'}!(d - l_{D'})!2^{d-l_{D'}}. \tag{3}$$

Из (2) следует, что при $d > 2$ мощность грани D множества A, для которой $l_D = 1$, превосходит мощность любой грани D_1 множества A, для которой

$l_{D_1} > 1$. Поскольку при линейном преобразовании ψ грань D множества A, гиперплоскость которой имеет уравнение $x_1 = a_1$, должна перейти в грань множества $\psi(A) = B$ той же мощности, то согласно (3) она переходит в грань D', гиперплоскость которой имеет уравнение $\varepsilon x_i = b_1$ для некоторых $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и $1 \le i \le d$. Так как линейное преобразование ψ переводит параллельные гиперплоскости аффинного пространства $\mathbb{R}^d$ в параллельные, а также сохраняет для них отношение «лежать между», то гиперплоскости, заданные уравнениями $x_1 = a_1, x_1 = a_2, \dots, x_1 = a_d$, переходят под действием ψ в гиперплоскости, заданные соответственно уравнениями $\varepsilon x_i = b_1, \varepsilon x_i = b_2, \dots, \varepsilon x_i = b_d$. Таким образом, векторы $(a_1, a_2, \dots, a_d)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_d)$ коллинеарны. Это противоречит условию леммы. Лемма 2 доказана.

Графы Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, G((x_1,\dots,x_d))}$ группы $\mathbb{Z}^d$, соответствующие различным элементам $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, удовлетворяющим условиям леммы 1 и условию $x_1 > \dots > x_d > 0$ (очевидно, множество таких элементов счетно), являются по теореме 3(а) и лемме 2 попарно неизоморфными. Заметим, что эти графы являются реберно-симметрическими (поскольку группа G действует транзитивно на множестве ребер вершинно-симметрического графа $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, G((x_1,\dots,x_d))}$, инцидентных 0).

Докажем, что эти графы являются предельными графами для множества реберно-симметрических вершинно-примитивных графов HA-типа. Очевидно, что граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, M}$, $M = G((x_1, \dots, x_d))$, является предельным для множества графов Кэли $\{\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \overline{M}} \mid p \text{ простое и } p > 2x_1\}$, где $\mathbb{Z}_p$ — аддитивная группа вычетов по модулю p, а $\overline{M}$ — образ множества M при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}^d$ на $\mathbb{Z}_p^d$.

Стабилизатор вершины 0 графа $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \overline{M}}$ в группе $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \overline{M}})$ (где p простое и $p > 2x_1$) содержит подгруппу $\overline{G}$, состоящую из элементов g, определяемых формулой $g((y_1, \dots, y_d)) = (\varepsilon_1 y_{\tau(1)}, \dots, \varepsilon_d y_{\tau(d)})$, где $(y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}_p^d$, τ — подстановка на множестве индексов $\{1, \dots, d\}$ и $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ для всех $1 \le i \le d$. Поскольку группа $\overline{G}$ действует транзитивно на множестве ребер вершинно-симметрического графа $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \overline{M}}$, инцидентных 0, то граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \overline{M}}$ является реберно-симметрическим. Кроме того, граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \overline{M}}$ является вершинно-примитивным графом HA-типа, поскольку в силу неприводимости действия группы $\overline{G}$ на $\mathbb{Z}_p^d$ подгруппа $\overline{G} \leftthreetimes \mathbb{Z}_p^d$ группы $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \overline{M}})$ действует примитивно на множестве вершин графа $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^d, \overline{M}}$, причем содержит регулярную абелеву нормальную подгруппу $\mathbb{Z}_p^d$.

Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2: случай группы $\mathbb{Z}^2$

В настоящем параграфе мы используем теорему 4 для нахождения всех с точностью до изоморфизма минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^2$.

В [4] показано, что существует в точности десять классов сопряженных в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ линейных частей кристаллографических групп евклидова пространства $\mathbb{R}^2$. Более того, в [4] показано, что при $d = 2$ в качестве полной системы представителей этих классов можно взять группы G_i, $1 \le i \le 10$. Пусть C_n, $n \ge 1$, — циклическая подгруппа порядка n группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, порожденная элементом

$$B_n := \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

(т. е. C_n — группа поворотов плоскости на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$), и

$$I_x := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $G_1 := C_1$, $G_2 := C_2$, $G_3 := C_3$, $G_4 := C_4$, $G_5 := C_6$ и $G_{i+5} := G_i \cup G_i I_x$ для $1 \le i \le 5$.

Реализуем схему из теоремы 4(b) для нахождения всех с точностью до изоморфизма минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^2$.

Для групп G_1, G_3, G_6 (в качестве G) не выполняется условие 3 теоремы 4, так как они не содержат инверсии. Для группы G_2 (в качестве G) не выполняется условие 1 теоремы 4. Поэтому в обозначениях теоремы 4(b) имеем $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_6 = \varnothing$ и, следовательно, группы G_1, G_2, G_3, G_6 не дают минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^2$.

Любая орбита A группы G_4 или G_7, отличная от $\{0\}$, имеет мощность 4 и порождает двумерную решетку векторного пространства $\mathbb{R}^2$. Однако, как легко видеть, группа $\phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle A\rangle_+,A})_0)$ изоморфна диэдральной группе D_8 и, следовательно, условие 3 теоремы 4 не выполняется. Поэтому в обозначениях теоремы 4(b) имеем $\mathscr{A}_4 = \mathscr{A}_7 = \varnothing$ и, следовательно, группы G_4, G_7 не дают минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^2$.

Любая орбита A группы G_5 или G_8, отличная от $\{0\}$, имеет мощность 6 и порождает двумерную решетку. Легко заметить, что группа $\phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\langle A\rangle_+,A})_0)$ изоморфна диэдральной группе D_{12} и, следовательно, условие 3 теоремы 4 не выполняется. Поэтому в обозначениях теоремы 4(b) имеем $\mathscr{A}_5 = \mathscr{A}_8 = \varnothing$ и, следовательно, группы G_5, G_8 не дают минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^2$.

Пусть A — произвольная G_9-орбита, отличная от $\{0\}$. Тогда A содержит точку $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, для которой $x \ne 0$, поскольку вместе с каждой точкой (x, y) орбита A содержит также точку (y, x). Орбита A содержит вместе с тем точку $(x, -y)$ и, следовательно, $(2x, 0) \in \langle A\rangle_+$. Но G_9-орбита, содержащая точку $(2x, 0) \in \langle A\rangle_+$, имеет мощность 4, так что для A выполняется условие 2 теоремы 4 только в том случае, если $|A| = 4$. Группа G_9 имеет с точностью до умножения на скаляр лишь две орбиты мощности 4:

$$M_{2,1} := \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}, \quad M'_{2,1} := \{(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)\}.$$

Для обеих этих орбит выполняются условия 1–3 теоремы 4. Таким образом, в обозначениях теоремы 4(b) можно положить $\mathscr{A}_9 = \{M_{2,1}, M'_{2,1}\}$ и

$$U_{M_{2,1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_{M'_{2,1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $M_{2,1} = U^{-1}_{M_{2,1}}(M_{2,1}) = U^{-1}_{M'_{2,1}}(M'_{2,1})$, группа G_9 дает единственный минимальный граф Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,1}}$ группы $\mathbb{Z}^2$.

Пусть A — произвольная G_{10}-орбита, отличная от $\{0\}$. Можно считать, что A содержит точку (x, y) такую, что $x \ne 0$, поскольку в противном случае A не обладала бы свойством 1 теоремы 4. Так как орбита A содержит также точку $(x, -y)$, то $(2x, 0) \in \langle A\rangle_+$. Но G_{10}-орбита, содержащая точку $(2x, 0)$, имеет мощность 6, следовательно, для A выполняется условие 2 теоремы 4 только тогда, когда $|A| = 6$. Группа G_{10} имеет с точностью до умножения на скаляр лишь две орбиты мощности 6: $A_1 := G_{10}((1,0)) = \big\{(1,0), \big(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\big), \big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\big), (-1,0), \big(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\big), \big(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\big\}$ и $A_2 := B_6(A_1)$, где B_6 — поворот плоскости на угол $\frac{2\pi}{6}$ вокруг начала координат. Для обеих этих орбит выполняются условия 1–3 теоремы 4. Таким образом, можно положить $\mathscr{A}_{10} = \{A_1, A_2\}$,

$$U_{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad U_{A_2} = B_6 U_{A_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $U_{A_1}^{-1}(A_1) = U_{A_2}^{-1}(A_2)$, группа G_{10} дает единственный минимальный граф Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,2}}$ группы $\mathbb{Z}^2$, где

$$M_{2,2} = U_{A_1}^{-1}(A_1) = U_{A_2}^{-1}(A_2) = \{(1,0), (1,1), (0,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1)\}.$$

Докажем, что построенные графы $\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,1}}, \Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,2}}$ являются предельными для множества минимальных вершинно-примитивных графов HA-типа. Для этого нам понадобится следующее замечание.

Очевидно, граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,1}}$ является предельным для множества графов Кэли $\{\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,1}} \mid p \text{ простое и } p > 2\}$, где $\mathbb{Z}_p$ — аддитивная группа вычетов по модулю p, а $\overline{M}_{2,1}$ — образ множества $M_{2,1}$ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{Z}_p^2$. При каждом $p > 2$ граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,1}}$ допускает группу автоморфизмов $\overline{G}_9 \leftthreetimes t(\mathbb{Z}_p^2)$, где $\overline{G}_9$ состоит из автоморфизмов группы $\mathbb{Z}_p^2$, соответствующих автоморфизмам из $G_9 < \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2)$ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{Z}_p^2$, а под $t(\mathbb{Z}_p^2)$ понимается группа сдвигов графа Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,1}}$ группы $\mathbb{Z}_p^2$.

Группа $\overline{G}_9$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^2$. Поэтому группа $\overline{G}_9 \leftthreetimes t(\mathbb{Z}_p^2)$, обладающая регулярной абелевой нормальной подгруппой $t(\mathbb{Z}_p^2)$, действует примитивно на $\mathbb{Z}_p^2$ и, значит, граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,1}}$ — вершинно-примитивный граф HA-типа.

Покажем, что граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,1}}$ является минимальным графом HA-типа. Пусть Δ — связный граф, для которого $V(\Delta) = V(\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,1}})$ и $\overline{G}_9 \leftthreetimes t(\mathbb{Z}_p^2) < \mathrm{Aut}(\Delta)$ (где $\overline{G}_9 \leftthreetimes t(\mathbb{Z}_p^2)$ — определенная выше подгруппа группы $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,1}})$).

Пусть $\{(0,0), (x,y)\} \in E(\Delta)$. Тогда $(\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 y), (\varepsilon_1 y, \varepsilon_2 x) \in \overline{G}_9((x,y))$ для $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ и, следовательно, граф Δ имеет валентность ≥ 4. Поэтому граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,1}}$ является минимальным графом HA-типа. Итак, граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,1}}$ предельный для множества минимальных графов HA-типа.

Для доказательства того, что граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,2}}$ является предельным для множества минимальных графов HA-типа, нам понадобится явный вид группы $\phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,2}})_0)$. Из предложения 3(a) следует, что $\phi(\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,2}})_0) = G_{10}^{U_{A_1}}$ является диэдральной группой порядка 12, порожденной матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,2}}$ предельный для множества графов Кэли $\{\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,2}} \mid p \text{ — простое и } p > 3\}$, где $\mathbb{Z}_p$ — аддитивная группа вычетов по модулю p, а $\overline{M}_{2,2}$ — образ множества $M_{2,2}$ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{Z}_p^2$. При каждом простом $p > 3$ граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,2}}$ допускает группу автоморфизмов $\overline{G} \leftthreetimes t(\mathbb{Z}_p^2)$, где $\overline{G}$ состоит из автоморфизмов группы $\mathbb{Z}_p^2$, соответствующих автоморфизмам из $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}^2, M_{2,2}})_0 < \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2)$ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{Z}_p^2$, а под $t(\mathbb{Z}_p^2)$ понимается группа сдвигов графа Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2, \overline{M}_{2,2}}$ группы $\mathbb{Z}_p^2$.

Группа $\overline{G}$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^2$. Поэтому группа $\overline{G} \leftthreetimes t(\mathbb{Z}_p^2)$, обладающая регулярной абелевой нормальной подгруппой $t(\mathbb{Z}_p^2)$, действует примитивно на $\mathbb{Z}_p^2$ и, следовательно, граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2,\overline{M}_{2,2}}$ является вершинно-примитивным.

Покажем, что граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2,\overline{M}_{2,2}}$ является минимальным графом HA-типа. Пусть Δ — связный граф, для которого $V(\Delta) = V(\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2,\overline{M}_{2,2}})$ и $\overline{G} \leftthreetimes t(\mathbb{Z}_p^2) < \mathrm{Aut}(\Delta)$ (где $\overline{G} \leftthreetimes t(\mathbb{Z}_p^2)$ — определенная выше подгруппа группы $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2,\overline{M}_{2,2}})$). Пусть $\{(0,0),(x,y)\} \in E(\Delta)$. Тогда $(x-y,x),(-y,x-y),(-x,-y),(y-x,-x),(y,y-x) \in \overline{G}((x,y))$ и, следовательно, граф Δ имеет валентность ≥ 6. Поэтому граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^2,\overline{M}_{2,2}}$ является минимальным графом HA-типа. Итак, граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^2,M_{2,2}}$ предельный для множества минимальных графов HA-типа.

Теорема 2 для случая группы $\mathbb{Z}^2$ доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2: случай группы $\mathbb{Z}^3$

В настоящем параграфе мы используем теорему 4 для нахождения всех с точностью до изоморфизма минимальных графов Кэли группы $\mathbb{Z}^3$.

Пусть G_i, $1 \leq i \leq k$, — полная система представителей классов сопряженных в $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ линейных частей кристаллографических групп евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ (см. теорему 4(b)).

Предположим, что G — одна из групп G_i, $1 \leq i \leq k$, и G действует приводимо на векторном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Группа G определена с точностью до сопряжения в $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$, поэтому можно считать, что ее элементы имеют вид

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $u_{33} = \pm 1$.

Элементы группы G, для которых $u_{33} = 1$, образуют подгруппу, которую мы обозначим через $\widetilde{G}$. Для G выполняется условие 3 теоремы 4 только тогда, когда G содержит инверсию. Следовательно, $G = \widetilde{G} \cup I\widetilde{G}$.

Пусть A — произвольная G-орбита, удовлетворяющая условию 1 теоремы 4, отличная от $\{0\}$. Пусть $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ — произвольная точка из A. По выбору A будет $z \neq 0$. Положим $a := \sum_{g \in \widetilde{G}} g((x,y,z)) \in \langle A \rangle_+$. По определению a имеем $G(a) = \widetilde{G}(a) \cup I\widetilde{G}(a) = \{a,-a\}$ и $a = (x',y',|\widetilde{G}|z)$ для некоторых $x',y' \in \mathbb{R}^d$. Мы нашли G-орбиту мощности 2, отличную от $\{0\}$ на $\langle A \rangle_+$, а по выбору A имеем $|A| \geq 6$, следовательно, для A не выполняется условие 2 теоремы 4. Таким образом, группе G не соответствует ни одного минимального графа Кэли группы $\mathbb{Z}^3$.

Предположим теперь, что G действует неприводимо на векторном пространстве $\mathbb{R}^3$. Тогда с учетом [4] для G может реализоваться лишь одна из следующих двух возможностей.

1. Группа G имеет порядок 48 и порождается элементами

$$g_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и инверсией I, т. е. группа G есть группа всех симметрий куба с вершинами $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, где $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ для $j = 1, 2, 3$.

2. Группа G имеет порядок 24 и порождается элементами g_1, g_2, I, т. е. группа G есть группа собственных симметрий правильного тетраэдра с вершинами $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, -1)$, расширенная с помощью инверсии.

Предположим, что реализуется возможность 1, и пусть A — G-орбита, для которой выполняются условия 1–3 теоремы 4. Тогда существует элемент $(x, y, z) \in A$ такой, что $z \neq 0$ (так как $g_1 \in G$). Поскольку $g_2((x, y, z)) = (-x, -y, z) \in A$, то $(0, 0, 2z) \in \langle A\rangle_+$. Ввиду того, что орбита $G((0, 0, 2z))$ имеет мощность 6, согласно условиям 1, 2 теоремы 4 $|A| = 6$. Но с точностью до умножения на ненулевой скаляр группа G имеет на векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ только одну орбиту длины 6, равную $M_{3,1} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\}$. Легко видеть, что для $M_{3,1}$ выполняются условия 1–3 теоремы 4. Таким образом, в обозначениях теоремы 4(b) можно положить $\mathscr{A}_i = \{M_{3,1}\}$ и

$$U_{M_{3,1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $M_{3,1} = U^{-1}_{M_{3,1}}(M_{3,1})$, группа G дает единственный минимальный граф Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}^d, M_{3,1}}$ группы $\mathbb{Z}^3$.

Предположим теперь, что для группы G реализуется возможность 2, и пусть вновь A — G-орбита, для которой выполняются условия 1–3 теоремы 4. Тогда существует элемент $(x, y, z) \in A$ такой, что $z \neq 0$ (так как $g_1 \in G$). Поскольку $g_2((x, y, z)) = (-x, -y, z) \in A$, то $(0, 0, 2z) \in \langle A\rangle_+$. Так как орбита $G((0, 0, 2z))$ имеет мощность 6, согласно условиям 1, 2 теоремы 4 $|A| = 6$. В то же время с точностью до умножения на ненулевой скаляр группа G имеет на векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ только одну орбиту длины 6, равную $M_{3,1} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\}$. Но легко видеть, что для $M_{3,1}$ не выполняется условие 3 теоремы 4; противоречие с предположением $\mathscr{A}_i \neq \varnothing$. Следовательно, возможность 2 для группы G не реализуется.

Докажем, что построенный граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^3, M_{3,1}}$ является предельным для множества минимальных вершинно-примитивных графов HA-типа.

Очевидно, что граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^3, M_{3,1}}$ предельный для множества графов Кэли $\{\Gamma_{\mathbb{Z}_p^3, \overline{M}_{3,1}} \mid p \text{ — простое и } p > 2\}$, где $\mathbb{Z}_p$ — аддитивная группа вычетов по модулю p, а $\overline{M}_{3,1}$ — образ множества $M_{3,1}$ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}^3$ на $\mathbb{Z}_p^3$.

При каждом простом $p > 2$ граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^3, \overline{M}_{3,1}}$ допускает группу автоморфизмов $\overline{G} \leftthreetimes t\big(\mathbb{Z}_p^3\big)$, где $\overline{G}$ состоит из автоморфизмов группы $\mathbb{Z}_p^3$, соответствующих автоморфизмам из $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}_p^3, \overline{M}_{3,1}})_0 < \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^3)$ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}^3$ на $\mathbb{Z}_p^3$, а под $t\big(\mathbb{Z}_p^3\big)$ понимается группа сдвигов графа Кэли $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^3, \overline{M}_{3,1}}$ группы $\mathbb{Z}_p^3$.

Группа $\overline{G}$ действует неприводимо на $\mathbb{Z}_p^3$. Поэтому группа $\overline{G} \leftthreetimes t\big(\mathbb{Z}_p^3\big)$, обладающая регулярной абелевой нормальной подгруппой $t\big(\mathbb{Z}_p^3\big)$, действует примитивно на $\mathbb{Z}_p^3$ и, следовательно, граф $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^3, \overline{M}_{3,1}}$ является вершинно-примитивным.

Покажем, что $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^3, \overline{M}_{3,1}}$ — минимальный граф HA-типа. Пусть Δ — связный граф, для которого $V(\Delta) = V(\Gamma_{\mathbb{Z}_p^3, \overline{M}_{3,1}})$ и $\overline{G} \leftthreetimes t\big(\mathbb{Z}_p^3\big) < \mathrm{Aut}(\Delta)$ (где $\overline{G} \leftthreetimes t\big(\mathbb{Z}_p^3\big)$ — определенная выше подгруппа группы $\mathrm{Aut}(\Gamma_{\mathbb{Z}_p^3, \overline{M}_{3,1}})$). Пусть $\{(0, 0, 0), (x, y, z)\} \in$

$E(\Delta)$. Тогда из $|\overline{G}((x,y,z))| \geq 6$ следует, что граф Δ имеет валентность ≥ 6. Поэтому $\Gamma_{\mathbb{Z}_p^3,\overline{M}_{3,1}}$ является минимальным графом HA-типа. Итак, граф $\Gamma_{\mathbb{Z}^3,M_{3,1}}$ предельный для множества минимальных графов HA-типа.

Теорема 2 для случая группы $\mathbb{Z}^3$ доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Giudici M., Li C. H., Praeger C. E., Seress A., Trofimov V.* On limit graphs of finite vertex-primitive graphs // J. Combin. Theory. Ser. A. 2007. V. 114. P. 110–134.
2. *Трофимов В. И.* Ограниченные автоморфизмы графов и одна характеризация решеток // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 2. С. 407–420.
3. *Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х. Д.* Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.
4. *Жидков Н. П., Щедрин Б. М.* Геометрия кристаллического пространства. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Статья поступила 21 января 2006 г.

Костоусов Кирилл Викторович
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219, ГСП-384
giant199@mail.ru