Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 517.957

ОТСУТСТВИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДРОБНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ ДИНАМИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

М. Киране, Н. Татар

Аннотация: Обобщены некоторые результаты о несуществовании для эллиптических систем с динамическими краевыми условиями, включающими производные по времени целого порядка, на случай нецелого порядка. В частности, рассмотрена система уравнений Пуассона с дробными производными по времени меньшего, чем первый, порядка в краевых условиях и установлены границы нелинейностей, откуда вытекает отсутствие глобальных решений. Дробные производные понимаются в смысле Римана — Лиувилля (или в смысле Капуто). Предложены также необходимые условия существования локальных решений.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, динамическое краевое условие.

1. Введение и предварительные сведения

Эллиптические уравнения с нелинейными динамическими краевыми условиями первого или второго порядка, заданные на многообразии с краем или без такового, рассмотрены в книге Ж.-Л. Лионса [1, гл. 1–11, с. 134–139]. В [2] Хинтерман изучил задачу существования локальных решений некоторых эволюционных уравнений с динамическими краевыми условиями. В своих работах он следовал статьям Эшера [3, 4]. В [5] Киране исследовал разрушение решения для эллиптических уравнений с динамическими краевыми условиями первого или второго порядка. Аманн и Фила в [6] вновь обратились к одной из задач из [5] и нашли показатель Фуджиты для нее. Их результат обобщен в [7] на зависящие от времени краевые условия. Еще ранее Киране, Набана и Похожаев [8] рассмотрели систему уравнений Пуассона с динамическими краевыми условиями

$$\Delta u_i(x', x_d, t) = 0, \quad t > 0,\ x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty),$$

$$a_i(x', 0, t)\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial x_d} \geq h_i(x', 0, t)|u_{i+1}|^{p_i}, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1},\ t > 0,$$

$$u_i(x', 0, 0) = u_{i,0}(x', 0) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}),$$

где $p_i > 1$, $d > 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $u_{m+1} = u_1$, a_i и h_i — заданные функции. А именно, они нашли показатель Фуджиты, который известен как показатель в

The second author is very grateful to King Fahd University of Petroleum and Minerals for the facilities and financial support.

© **2007 Киране М., Татар Н.**

нелинейности, отделяющей случай разрушения от случая существования глобального решения при некоторых подходящих начальных данных.

Как изложено в книге [9] и в работах [2, 10–13], эллиптические и параболические системы с динамическими краевыми условиями естественно возникают в математических моделях переноса тепла в твердом теле при контакте с движущейся жидкостью и явлений диффузии, задачах динамики текучих сред, диффузии в пористых средах, моделях полупроводников и химической инженерии (см. также [14–17]).

Следует упомянуть недавние статьи Вулкова и Колевой [18, 19] и Златевой [20], посвященные численному анализу параболических уравнений с динамическими краевыми условиями, а также работы Ахмеда и Кербаля по оптимальному управлению для уравнений с частными производными с динамическими краевыми условиями [21].

О других сходных исследованиях см. [9, 22–29].

В данной статье мы рассматриваем систему Пуассона в полупространстве с динамическими краевыми условиями, содержащими дробные производные по времени различных порядков. Будут доказаны результаты типа Фуджиты. Будут также получены необходимые условия локальной и глобальной разрешимости.

2. Постановка задачи

В данном разделе мы дадим постановку задачи, укажем, что будет пониматься под решением, и введем некоторые предположения. Мы рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,t) = \Delta v(x,t) = 0, \quad t > 0,\ x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0,\infty) =: \Omega, \\ &D^{\alpha}_{0|t}\{u(x',0,t) - u_0(x')\} - u_{x_d} \geq h(x',0,t)|v|^p, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1},\ t > 0, \\ &D^{\beta}_{0|t}\{v(x',0,t) - v_0(x')\} - v_{x_d} \geq g(x',0,t)|u|^q, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1},\ t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

подчиненную начальным условиям

$$u(x',0,0) = u_0(x') \geq 0, \quad v(x',0,0) = v_0(x') \geq 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \tag{2}$$

где h и g — заданные функции и $p > 1$, $q > 1$, $d > 1$ — вещественные числа. Здесь u_{x_d} — частная производная от u относительно x_d и $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{d} u_{x_i x_i}$ (производная по времени отсутствует). Дробные производные $D^{\alpha}_{0|t}$ ($\alpha \in (0,1)$) и $D^{\beta}_{0|t}$ ($\beta \in (0,1)$) понимаются в смысле Римана — Лиувилля. Левосторонние и правосторонние дробные производные задаются так:

$$D^{\varrho}_{0|t} f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\varrho} f(\tau)\, d\tau, \quad 0 < \varrho < 1,$$

$$D^{\varrho}_{t|T} f(t) := \frac{-1}{\Gamma(1-\varrho)} \frac{d}{dt} \int\limits_t^T (\tau - t)^{-\varrho} f(\tau)\, d\tau, \quad 0 < \varrho < 1.$$

Задачи такого типа возникают в вязкоупругости как модели для материалов с вязкоупругой границей. Локальное существование можно доказать, используя методы неподвижной точки (см. также работу М. О. Корпусова и А. Г. Свешникова [30]).

Определение 1. *Слабым решением задачи* (1), (2) на $(0,T)$ будем называть пару п. в. неотрицательных функций $(u,v) \in \bigl(C\bigl([0,T];L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\})\bigr)\bigr)^2$ таких, что $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\}\times(0,T))$, $v \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\}\times(0,T))$, удовлетворяющую на $\Sigma_T := (0,T)\times\mathbb{R}^{d-1}$, $Q_T := (0,T)\times\Omega$ интегральным неравенствам

$$\int\limits_{\Sigma_T} \{u(x',0,t)-u_0(x')\}D^{\alpha}_{t|T}\varphi(x',0,t)\,dx'\,dt + \int\limits_{Q_T} u\Delta\varphi\,dxdt - \int\limits_{\Sigma_T} u\varphi_{x_d}\,dx'dt \ge \int\limits_{\Sigma_T} h(x',0,t)|v|^p\varphi\,dx'\,dt, \quad (3)$$

$$\int\limits_{\Sigma_T} \{v(x',0,t)-v_0(x')\}D^{\beta}_{t|T}\varphi(x',0,t)\,dx'\,dt + \int\limits_{Q_T} v\Delta\varphi\,dxdt - \int\limits_{\Sigma_T} v\varphi_{x_d}\,dx'dt \ge \int\limits_{\Sigma_T} g(x',0,t)|u|^q\varphi\,dx'\,dt \quad (4)$$

с некоторой пробной функцией $\varphi \ge 0$, дважды непрерывно дифференцируемой по x и однократно по t (с компактным носителем и $\varphi(T)=0$).

На самом деле нам потребуется лишь то, что φ непрерывно дифференцируема до порядка $\max(\alpha,\beta)$ по t. Кроме того, мы предполагаем, что вторые интегралы в левых частях (3) и (4) конечны. Отметим, что дробные производные существуют для абсолютно непрерывных функций и имеет место следующая формула «интегрирования по частям» (см. [31, с. 36]):

$$\int\limits_0^T \hat{\varphi}(t).D^{\varrho}_{0|t}f(t)\,dt = \int\limits_0^T D^{\varrho}_{t|T}\hat{\varphi}(t).f(t)\,dt$$

и

$$(D^{\alpha}_{0|t}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(0)}{t^{\alpha}} + \int\limits_0^t \frac{f'(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}\,d\sigma\right], \quad (5)$$

$$(D^{\alpha}_{t|T}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(T)}{(T-t)^{\alpha}} - \int\limits_t^T \frac{f'(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}}\,d\sigma\right]. \quad (6)$$

Будем предполагать, что функции h и g обладают следующими свойствами:

(H) $h(x',0,t) \ge Ct^{\sigma}|x'|^{\nu}$, $\sigma < p-1$, $t>0$,

(G) $g(x',0,t) \ge Ct^{\gamma}|x'|^{\mu}$, $\gamma < q-1$, $t>0$.

Условия на σ и γ могут быть опущены, если потребовать, чтобы выполнялись **(H)** и **(G)** для $t \ge t_0$ с некоторым $t_0>0$ и чтобы h и g были интегрируемыми на $(0,t_0)$. Здесь и ниже константы C могут быть разными в различных ситуациях.

На самом деле наши рассмотрения выполнены для функций h и g, удовлетворяющих при достаточно больших $R>0$ условиям

$$h(Ry',R^{\theta}\tau) \ge R^{\theta_1}h_0(y',\tau), \quad y' \in B_r,\ \tau \in [0,T],$$

$$g(Ry',R^{\theta}\tau) \ge R^{\theta_2}g_0(y',\tau), \quad y' \in B_r,\ \tau \in [0,T],$$

с некоторыми неотрицательными константами θ, θ_1, θ_2, где $B_r := \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : |x'| \le r\}$ и $r > 0$. Здесь h_0 и g_0 таковы, что

$$\int_0^T \int_{B_r} \frac{dy'd\tau}{h_0^{1/(p-1)}(y',\tau)} < \infty, \quad \int_0^T \int_{B_r} \frac{dy'd\tau}{g_0^{1/(q-1)}(y',\tau)} < \infty$$

соответственно.

Основная особенность рассматриваемой задачи в том, что мы имеем дело с системой двух дробных дифференциальных уравнений на границе, у которых дробный порядок различен. В отличие от представленной здесь задачи в [8] изучалась система из двух дифференциальных уравнений (на границе) одного первого порядка, где хватало одной шкалы и тем самым одной пробной функции. Здесь мы используем две различные шкалы и две разные пробные функции. Тогда можно указать способ перейти от одной из них к другой, так как они будут связаны с компонентами решения.

Будем использовать следующие предположения.

(K) Либо $1 < q \le (1+\sigma+\beta\nu)/p + (\gamma+\alpha\mu+\beta)/(1-\alpha)$ и $p > 1$, либо $q > (\gamma+\alpha\mu+\beta)/(1-\alpha)$ и $1 < p \le (\sigma+\beta\nu+1)/((1-\alpha)q - (\gamma+\alpha\mu+\beta))$.

(L) Либо $1 < p \le (1+\gamma+\alpha\mu)/q + (\sigma+\beta\nu+\alpha)/(1-\beta)$ и $q > 1$, либо $q > (\sigma+\beta\nu+\alpha)/(1-\beta)$ и $1 < q \le (\gamma+\alpha\mu+1)/((1-\beta)p - (\sigma+\beta\nu+\alpha))$.

Положим

$$d_1 := 1 + \frac{1+(\gamma+\alpha\mu)p+\sigma+\beta(\nu+p)-(1-\alpha)qp}{\alpha qp+(\beta-\alpha)p-\beta}, \tag{7}$$

$$d_2 := 1 + \frac{1+(\sigma+\beta\nu)q+\gamma+\alpha(\mu+q)-(1-\beta)qp}{\beta qp+(\alpha-\beta)q-\alpha}. \tag{8}$$

Легко видеть, что $\alpha qp+(\beta-\alpha)p-\beta = \alpha p(q-1)+\beta(p-1) > 0$ и $\beta qp+(\alpha-\beta)q-\alpha = \beta q(p-1)+\alpha(q-1) > 0$. Поэтому знаменатели в (7), (8) положительны. Кроме того, условия в **(K)** и **(L)** могут быть выбраны так, что числители в (7), (8) будут неотрицательны.

Прежде чем формулировать и доказывать нашу первую теорему, покажем неотрицательность решений, обладающих некоторой регулярностью.

Предложение 1. *Если (u,v) — решение задачи (1), (2) в $W_x^{2,2}(\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}^+\times(0,T))$, то $u \ge 0$ и $v \ge 0$.*

Доказательство. Рассмотрим $u^- = \max(-u,0)$. Докажем, что на самом деле $u^- = 0$ и тем самым $u = u^+ := \max(u,0) \ge 0$. С одной стороны, используя формулу Грина, имеем

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u^- \Delta u \, dxdt = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u^- . \nabla u \, dxdt + \int_{\Sigma_T} \frac{\partial u}{\partial n} u^- \, dx'dt. \tag{9}$$

Умножая первое уравнение в (1) на u^- и интегрируя по $(0,T)\times\mathbb{R}^d$, находим, что левая часть в (9) равна 0. Тем самым

$$\int_{\Sigma_T} \frac{\partial u}{\partial n} u^- \, dx'dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u^-|^2 \, dxdt \ge 0.$$

Далее, умножая первое уравнение на границе в (1) на u^- и интегрируя по $(0,T)\times\mathbb{R}^{d-1}$, видим, что

$$\int\limits_{\Sigma_T} D^\alpha_{0|t} t\{u(x',0,t)-u_0(x')\}u^-\,dx'dt - \int\limits_{\Sigma_T} u_{x_d}u^-\,dx'dt \ge 0,$$

откуда

$$\int\limits_{\Sigma_T} D^\alpha_{0|t}\{u(x',0,t)-u_0(x')\}u^-\,dx'dt \ge 0.$$

С другой стороны, не уменьшая общности, предположим (от противного), что u^- положительна и возрастает на $(0,T_1)$ (иначе можно рассмотреть первый интервал, на котором u^- положительная и возрастает, перед интервалом, на котором u^- равна нулю). По формуле (5) имеем

$$D^\alpha_{0|t}\{u(x',0,t)-u_0(x')\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u'(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha}\,d\sigma. \tag{10}$$

Это выражает по существу связь между дробной производной в смысле Римана — Лиувилля и дробной производной в смысле Капуто (определенной в правой части (10)). Таким образом, поскольку $u'(t)$ отрицательна на $(0,T_1)$, получим

$$\int\limits_{\Sigma_{T_1}} D^\alpha_{0|t}\{u(x',0,t)-u_0(x')\}u^-\,dx'\,dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\Sigma_{T_1}} u^-\int\limits_0^t \frac{u'(\sigma)}{(\sigma-t)^\alpha}\,d\sigma dx'dt < 0;$$

противоречие.

3. Результаты

Представим наш первый результат.

Теорема 1. *Пусть $p>1$, $q>1$ удовлетворяют либо условию* **(K)**, *либо условию* **(L)** *и h, g удовлетворяют условиям* **(H)** *и* **(G)** *соответственно. Если $1<d\le\max(d_1,d_2)$, то задача* (1), (2) *не имеет нетривиального неотрицательного глобального решения.*

Доказательство. Предположим, что (u,v) — нетривиальное неотрицательное решение, существующее глобально по времени. Иначе говоря, (u,v) существует на $(0,T_*)$ для произвольного $T_*>0$. Пусть T и R — положительные вещественные числа такие, что $0<TR<T_*$. В качестве пробных функций выберем

$$\varphi_\theta(x',t) := \varphi_{0\theta}\left(\frac{t^{2\theta}+|x'|^2}{R^{2\theta}}\right), \quad \theta=\alpha,\beta,$$

такие, что $\varphi_\theta(x',TR)=0$, $\theta=\alpha,\beta$, где $\varphi_{0\theta}$ — неотрицательные невозрастающие функции из $C_0^2(\mathbb{R}_+)$ и

$$\varphi_{0\theta}(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{для } 0\le\xi\le 1,\\ 0 & \text{для } \xi\ge 2,\end{cases} \qquad \theta=\alpha,\beta.$$

Пробные функции $\varphi_{0\theta}$ можно выбрать так, что

$$\int\limits_{\operatorname{supp} D^\alpha_{\tau|T}\varphi_{0\alpha}} (g_0\varphi_{0\beta})^{-q'/q}\left|D^\alpha_{\tau|T}\varphi_{0\alpha}\right|^{q'} d\tau dy' < \infty, \tag{11}$$

$$\int\limits_{\operatorname{supp} D^{\beta}_{\tau|T}\varphi_{0\beta}} (h_0\varphi_{0\alpha})^{-q'/q}\left|D^{\beta}_{\tau|T}\varphi_{0\beta}\right|^{p'} d\tau dy' < \infty, \tag{12}$$

где $p + p' = pp'$, $q + q' = qq'$. Эти условия не обременительны. В самом деле, их выполнения можно достичь допущениями на показатели в **(H)**, **(G)** выбором $\varphi_\theta = \varphi^{\lambda}_{0\theta}$, $\theta = \alpha, \beta$, с подходящим большим значением λ (например, как в следующей теореме). Причины такого требования будут ясны позже. Рассмотрим функцию $\Psi_\theta = \Psi_\theta(x', x_d, t)$ такую, что

$$\Delta\Psi_\theta = 0, \quad \Psi_\theta(x', 0, t) = \varphi_\theta(x', 0, t), \quad \theta = \alpha, \beta. \tag{13}$$

Напомним, что φ_θ имеет ограниченный носитель. Идея введения Ψ_θ в последней задаче заимствована из [1]. Условия на эту систему понимаются как краевые условия. По лемме Хопфа или в силу явного решения Пуассона

$$\Psi_\theta(x', x_d, t) = \frac{2x_d}{\sigma_d} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{\varphi_\theta(y, 0, t)}{(|y - x'|^2 + x_d^2)^{d/2}}\, dy, \quad \theta = \alpha, \beta,$$

где σ_d/d — объем единичного шара, получаем $\Psi_{\theta x_d} > 0$, $\theta = \alpha, \beta$. Используя второе тождество Грина, имеем

$$\int\limits_{\Sigma_T} (w_{x_d}\Psi_\theta - w\Psi_{\theta x_d})\, dx' dt = 0$$

с $w = u, v$ и $\theta = \alpha, \beta$ соответственно. Поэтому

$$\int\limits_{\Sigma_T} u_{x_d}\varphi_\alpha\, dx' dt \geq 0, \quad \int\limits_{\Sigma_T} v_{x_d}\varphi_\beta\, dx' dt \geq 0.$$

Используя пробные функции Ψ_α в (3) и Ψ_β в (4), из предыдущих рассуждений получим

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} h|v|^p\varphi_\alpha + \int\limits_{\Sigma_{TR}} u_0(x').D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha \leq \int\limits_{\Sigma_{TR}} u.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} g|u|^q\varphi_\beta + \int\limits_{\Sigma_{TR}} v_0(x').D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta \leq \int\limits_{\Sigma_{TR}} v.D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta \tag{15}$$

(здесь $\int\limits_{\Sigma_{TR}} = \int\limits_{\Sigma_{TR}} dx'\, dt$).

Отметим, что согласно условиям на φ_θ и формуле (6) имеем

$$\left(D^{\theta}_{t|TR}\varphi_\theta\right)(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_t^{TR} \frac{\varphi'_\theta(\sigma)}{(\sigma - t)^\alpha}\, d\sigma \geq 0, \quad \theta = \alpha, \beta,\ t \in (0, TR). \tag{16}$$

Следовательно, из (14) и (15) выводим, что

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} h|v|^p\varphi_\alpha \leq \int\limits_{\Sigma_{TR}} u.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} g|u|^q\varphi_\beta \leq \int\limits_{\Sigma_{TR}} v.D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta \tag{18}$$

соответственно. Запишем теперь

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} u.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_{\alpha} = \int\limits_{\Sigma_{TR}} u(g\varphi_{\beta})^{\frac{1}{q}}(g\varphi_{\beta})^{-\frac{1}{q}}.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_{\alpha}.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} u.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_{\alpha} \leq \left(\int\limits_{\Sigma_{TR}} |u|^{q}(g\varphi_{\beta})\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\Sigma_{TR}} (g\varphi_{\beta})^{-\frac{q'}{q}}.\left|D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_{\alpha}\right|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{19}$$

где $q + q' = qq'$.

Аналогично

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} v.D^{\beta}_{t|TR}\varphi_{\beta} \leq \left(\int\limits_{\Sigma_{TR}} |v|^{p}(h\varphi_{\alpha})\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\Sigma_{TR}} (h\varphi_{\alpha})^{-\frac{p'}{p}}.\left|D^{\beta}_{t|TR}\varphi_{\beta}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{20}$$

где $p + p' = pp'$.

Для упрощения положим

$$\mathscr{J} := \int\limits_{\Sigma_{TR}} g|u|^{q}\varphi_{\beta} \quad \text{и} \quad J := \int\limits_{\Sigma_{TR}} h|v|^{p}\varphi_{\alpha}, \tag{21}$$

$$\mathscr{A} := \left(\int\limits_{\Sigma_{TR}} (g\varphi_{\beta})^{-\frac{q'}{q}}.\left|D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_{\alpha}\right|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{22}$$

$$\mathscr{B} := \left(\int\limits_{\Sigma_{TR}} (h\varphi_{\alpha})^{-\frac{p'}{p}}.\left|D^{\beta}_{t|TR}\varphi_{\beta}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{23}$$

Из (17) и (19) вытекает, что

$$J \leq \mathscr{J}^{1/q}\mathscr{A}, \tag{24}$$

а из (18) и (20) — что

$$\mathscr{J} \leq J^{1/p}\mathscr{B}.$$

Перейдем к новым переменным $t = R\tau$, $x' = R^{\theta}y'$ ($dtdx' = R^{1+\theta(d-1)}d\tau dy'$) для $\theta = \alpha, \beta$ в (22) и (23) соответственно. Используя определение правосторонней дробной производной, находим, что

$$D^{\theta}_{t|TR}\varphi_{\theta} = R^{-\theta}D^{\theta}_{\tau|T}\varphi_{0\theta}, \quad \theta = \alpha, \beta.$$

Поэтому

$$\mathscr{A}^{q'} \leq CR^{-\frac{q'}{q}(\gamma+\alpha\mu)-\alpha q'+1+\alpha(d-1)}\int\limits_{\Omega_{\alpha}} (\tau^{\gamma}|y'|^{\mu}\varphi_{0\beta}(\xi))^{-\frac{q'}{q}}.|D^{\alpha}_{\tau|T}\varphi_{0\alpha}(\xi)|^{q'}\,d\tau dy'$$

с $\Omega_{\alpha} := \{(\tau, y') : 0 < \tau^{2\alpha} + |y'|^{2} < 2\}$. Таким образом, учитывая (11), получаем

$$\mathscr{A} \leq CR^{-\frac{1}{q}(\gamma+\alpha\mu)-\alpha+\frac{1+\alpha(d-1)}{q'}} = CR^{-a},$$

где

$$a := \alpha + \frac{\gamma + \alpha\mu}{q} - \frac{1 + \alpha(d-1)}{q'}.$$

Аналогично с помощью (12) и подходящей шкалы имеем

$$\mathscr{B} \le CR^{-b},$$

где

$$b := \beta + \frac{\sigma + \beta\nu}{p} - \frac{1 + \beta(d-1)}{p'}.$$

Из (23) и (24) ясно, что

$$J^{1-\frac{1}{qp}} \le CR^{-\left(a+\frac{b}{q}\right)}, \quad \mathscr{J}^{1-\frac{1}{qp}} \le CR^{-\left(\frac{a}{p}+b\right)}. \tag{25}$$

При $d \le \max(d_1, d_2)$ имеем либо $d \le d_1$, либо $d \le d_2$, и согласно условиям одно из них не меньше единицы. Предположим, что $1 < d \le d_1$. Пусть вначале $d < d_1$. Тогда легко проверить, что $a + (b/q) > 0$. Отсюда

$$\lim_{R\to\infty} J^{1-\frac{1}{qp}} = 0,$$

следовательно, $v = 0$ п. в. согласно определению (21), а значит, $u = 0$ п. в. ввиду (15); противоречие. Если теперь $d = d_1$, то $a + (b/q) = 0$ и в силу (25) оказывается, что

$$\lim_{R\to\infty} J = C.$$

Из (18), (20) и (30) имеем

$$\mathscr{J} \le \mathscr{B}\Bigg(\int\limits_{\operatorname{supp} D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta} h|v|^p\varphi_\alpha \Bigg)^{1/p}$$

или

$$\mathscr{J} \le \mathscr{B}\Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}} h|v|^p\varphi_\alpha \Bigg)^{1/p},$$

где $\mathscr{C} := \{(t, x') : R^{2\beta} \le t^{2\beta} + |x'|^2 \le 2R^{2\beta}\}$. Используя (24) и тот факт, что $\mathscr{A}\mathscr{B}^{1/q}$ ограничено, получаем

$$J \le \Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}} h|v|^p\varphi_\alpha \Bigg)^{1/pq} \mathscr{A}\mathscr{B}^{1/q} \le C\Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}} h|v|^p\varphi_\alpha \Bigg)^{1/pq},$$

и правая часть уходит к нулю при R, стремящемся к бесконечности. Отсюда $\lim\limits_{R\to\infty} J = 0$; вновь противоречие. Рассуждения для случая $d \le d_2$ аналогичны.

Замечание 1. Условия на d можно переложить на p и q для нахождения критических показателей. Заметим, что в специальном случае: $u \equiv v$, $p = q$, $\alpha = \beta = 1$ и $\sigma = \mu = \gamma = \nu = 0$, получим критический показатель $p_c = 1 + (1/(d-1))$, найденный в работе [6].

Определим

$$V := \liminf_{|x'|\to+\infty} \{u_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\},$$

$$W := \liminf_{|x'|\to+\infty} \{v_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\}.$$

Установим необходимые условия существования.

Теорема 2. *Пусть* (u,v) *— неотрицательное слабое решение задачи* (1), (2) *на* $(0,T)$. *Предположим, что* $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}^+} h>0$, $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}^+} g>0$ *п. в. в* $\mathbb{R}^{d-1}$. *Тогда*

$$V\le C_1T^{\alpha-\beta p'}+C_2T^{\alpha(1-q')},\quad W\le C_3T^{\beta-\alpha q'}+C_4T^{\beta(1-p')}.$$

Доказательство. Рассмотрим пробную функцию

$$\varphi(x',t):=\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)\begin{cases}\left(1-\frac{t}{T}\right)^k, & 0<t\le T,\\ 0, & t>T,\end{cases}\qquad k=\max(p',q'),$$

с $\operatorname{supp}\Phi\subset\{x'\in\mathbb{R}^{d-1}:|x'|>R>1\}$. Возьмем пробную функцию, определенную в (13), с такой φ на границе в (14) и проинтегрируем по $(0,T)\times\mathbb{R}^{d-1}$. Используя (17)–(19) и неравенство Юнга, находим, что

$$\int\limits_{\Sigma_T}h|v|^p\varphi+\int\limits_{\Sigma_T}u_0(x').D^{\alpha}_{t|T}\varphi\le\frac{1}{q}\int\limits_{\Sigma_T}g|u|^q\varphi+\frac{1}{q'}\int\limits_{\Sigma_T}(g\varphi)^{-q'/q}\left|D^{\alpha}_{t|T}\varphi\right|^{q'}.\tag{26}$$

Из (15) получаем

$$\int\limits_{\Sigma_T}g|u|^q\varphi\le\int\limits_{\Sigma_T}v.D^{\beta}_{t|T}\varphi,$$

поэтому

$$D^{\beta}_{t|T}\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left[\frac{\varphi(T)}{(T-t)^{\beta}}-\int\limits_t^T\frac{\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{(\sigma-t)^{\beta}}\right]\ge 0.$$

Следовательно, аналогично (20) видим, что

$$\int\limits_{\Sigma_T}g|u|^q\varphi\le\frac{1}{p}\int\limits_{\Sigma_T}h|v|^p\varphi+\frac{1}{p'}\int\limits_{\Sigma_T}(h\varphi)^{-p'/p}|D^{\beta}_{t|T}\varphi|^{p'}.\tag{27}$$

Отсюда, принимая во внимание (27) в (26), выводим, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Sigma_T}h|v|^p\varphi+\int\limits_{\Sigma_T}u_0(x').D^{\alpha}_{t|T}\varphi\\ &\quad\le\frac{1}{pq}\int\limits_{\Sigma_T}h|v|^p\varphi+\frac{1}{p'q}\int\limits_{\Sigma_T}(h\varphi)^{-p'/p}\left|D^{\beta}_{t|T}\varphi\right|^{p'}+\frac{1}{q'}\int\limits_{\Sigma_T}(g\varphi)^{-q'/q}\left|D^{\alpha}_{t|T}\varphi\right|^{q'}.\end{aligned}\tag{28}$$

После несложных вычислений получаем

$$D^{\theta}_{t|T}\varphi=\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\theta)}\Phi T^{-\theta}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{k-\theta}.\tag{29}$$

Воспользуемся равенством $\Gamma_{k,\theta}=\Gamma(1+k)/\Gamma(1+k-\theta)$, $\theta=\alpha,\beta$. Соотношения (28) и (29) вместе с тем фактом, что $pq>1$, приводят к неравенству

$$\begin{aligned}&\Gamma_{k,\alpha}T^{-\alpha}\int\limits_{\Sigma_T}u_0(x')\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{k-\alpha}\\ &\qquad\le\frac{1}{p'q}(\Gamma_{k,\beta})^{p'}T^{-\beta p'}\int\limits_{\Sigma_T}h^{-p'/p}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{k-\beta p'}\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{q'}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'}T^{-\alpha q'}\int\limits_{\Sigma_T} g^{-q'/q}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{k-\alpha q'}.$$

Используя величину k, можно проверить, что $1+k-\beta p'>0$ и $1+k-\alpha q'>0$. Поэтому если $\widetilde{\Gamma}_{k,\alpha}=\Gamma(1+k)/\Gamma(2+k-\alpha)$, то

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_{k,\alpha}T^{1-\alpha}&\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_0(x')\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'\\ &\le \frac{1}{p'q(1+k-\beta p')}(\Gamma_{k,\beta})^{p'}T^{1-\beta p'}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}(\inf_{t\in(0,T)}h)^{-p'/p}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'\\ &\quad+\frac{1}{q'(1+k-\alpha q')}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'}T^{1-\alpha q'}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}(\inf_{t\in(0,T)}g)^{-q'/q}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'. \quad (30)\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_{k,\alpha}T^{1-\alpha}&\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')\inf[(\inf_{t\in(0,T)}h)^{p'/p},(\inf_{t\in(0,T)}g)^{q'/q}]\}\\ &\quad\times\int\limits_{|x'|>R}\sup[(\inf_{t\in(0,T)}h)^{-p'/p},(\inf_{t\in(0,T)}g)^{-q'/q}]\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'\\ &\le\frac{1}{p'q(1+k-\beta p')}(\Gamma_{k,\beta})^{p'}T^{1-\beta p'}\int\limits_{|x'|>R}(\inf_{t\in(0,T)}h)^{-p'/p}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'\\ &\quad+\frac{1}{q'(1+k-\alpha q')}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'}T^{1-\alpha q'}\int\limits_{|x'|>R}(\inf_{t\in(0,T)}g)^{-q'/q}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'. \quad (31)\end{aligned}$$

Разделив обе части в (31) на

$$\int\limits_{|x'|>R}\sup[(\inf_{t\in(0,T)}h)^{-p'/p},(\inf_{t\in(0,T)}g)^{-q'/q}]\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx',$$

находим, что

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_{k,\alpha}T^{1-\alpha}&\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')\inf[(\inf_{t\in(0,T)}h)^{p'/p},(\inf_{t\in(0,T)}g)^{q'/q}]\}\\ &\le\frac{1}{p'q(1+k-\beta p')}(\Gamma_{k,\beta})^{p'}T^{1-\beta p'}+\frac{1}{q'(1+k-\alpha q')}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'}T^{1-\alpha q'}\end{aligned}$$

или

$$\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')\inf[(\inf_{t\in(0,T)}h)^{p'/p},(\inf_{t\in(0,T)}g)^{q'/q}]\}\le C_1T^{\alpha-\beta p'}+C_2T^{\alpha(1-q')},$$

где

$$C_1=\frac{(2+k-\alpha)}{p'q(1+k-\beta p')}(\Gamma_{k,\beta})^{p'-1},\quad C_2=\frac{(2+k-\alpha)}{q'(1+k-\alpha q')}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'-1}.$$

Переходя к пределу при $R\to+\infty$, получаем

$$V\le C_1T^{\alpha-\beta p'}+C_2T^{\alpha(1-q')}.$$

Используя (15) вместо (14) и рассуждая аналогично, можно доказать второе соотношение в утверждении теоремы.

Следствие 1. *Допустим, что задача* (1), (2) *имеет глобальное неотрицательное слабое решение. Тогда*

(a) *если* $\alpha - \beta p' < 0$, *то* $V = 0$, *иначе говоря,*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{u_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} = 0;$$

(b) *если* $\beta - \alpha q' < 0$, *то* $W = 0$, *иначе говоря,*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{v_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} = 0;$$

(c) *если* $\alpha - \beta p' = 0$, *то* $V \le C_1$, *иначе говоря,*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{u_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} \le C_1;$$

(d) *если* $\beta - \alpha q' = 0$, *то* $W \le C_3$, *иначе говоря,*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{v_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} \le C_3.$$

Замечание 2. Отметим, что если $\alpha \le \beta$, то $\alpha/\beta \le 1 < p'$, а если $\beta \le \alpha$, то $\beta/\alpha \le 1 < q'$. Поэтому в любой ситуации выполнен по крайней мере один из случаев предыдущего следствия.

Следствие 2. *Пусть* $V = +\infty$ *или* $W = +\infty$. *Тогда задача* (1), (2) *не может иметь локального неотрицательного слабого решения.*

Следствие 3. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если* $\alpha - \beta p' < 0$ *и* $V > 0$, *то* $\min(T^{\beta p' - \alpha}, T^{(q'-1)\alpha}) \le (C_1 + C_2)/V$;

(ii) *если* $\beta - \alpha q' < 0$ *и* $W > 0$, *то* $\min(T^{\alpha q' - \beta}, T^{(p'-1)\beta}) \le (C_3 + C_4)/W$.

Замечание 3. В том случае, если локально существует слабое решение задачи (1), (2), последнее следствие дает оценки сверху для времени его разрушения.

В завершение укажем другие необходимые условия существования глобального решения.

Теорема 3. *Если задача* (1), (2) *допускает неотрицательное глобальное слабое решение, то существуют четыре положительные константы* κ, $\tilde\kappa$ *и* K, $\widetilde K$ *такие, что*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{u_0(x')|x'|^{\kappa} \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} \le K,$$

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{v_0(x')|x'|^{\tilde\kappa} \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} \le \widetilde K.$$

Доказательство. Из (30) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_0(x')\Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx' \le C_1 T^{\alpha-\beta p'} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} (\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p} \Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx'$$
$$+ C_2 T^{\alpha(1-q')} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} (\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q} \Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx'.$$

Если $\operatorname{supp}\Phi \subset \{x' : R < |x'| < 2R\}$, то, умножая в интегралах на $|x'|^{\kappa}|x'|^{-\kappa}$, где $\kappa = \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$ с $\kappa_1 = \beta p' - \alpha$ и $\kappa_2 = \alpha(q'-1)$, находим, что

$$\begin{aligned}
&\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')|x'|^{\kappa}\inf[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in(0,T)} g)^{q'/q}]\} \\
&\qquad\times \int\limits_{|x'|>R} |x'|^{-\kappa}\sup[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p}, (\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}]\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx' \\
&\qquad\le C_1 T^{\alpha-\beta p'}(2R)^{\kappa_1}\int\limits_{|x'|>R} |x'|^{-\kappa_1}(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx' \\
&\qquad\quad + C_2 T^{\alpha(1-q')}(2R)^{\kappa_2}\int\limits_{|x'|>R} |x'|^{-\kappa_2}(\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'. \quad (32)
\end{aligned}$$

Взяв $T = R$ и разделив обе части (32) на

$$\int\limits_{|x'|>R} |x'|^{-\kappa}\sup[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p}, (\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}]\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx',$$

очевидно, получим

$$\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')|x'|^{\kappa}\inf[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in(0,T)} g)^{q'/q}]\} \le 2^{\kappa_1}C_1 + 2^{\kappa_2}C_2 =: K.$$

Второе соотношение в утверждении теоремы получается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod-Gautiers Villars, 1969.
2. *Hintermann T.* Evolution equations with dynamic boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1989. Sect. A. V. 113, N 1–2. P. 43–60.
3. *Escher J.* Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions // Comm. Partial Differential Equations. 1993. V. 18, N 7/8. P. 1309–1364.
4. *Escher J.* Nonlinear elliptic systems with dynamical boundary conditions // Math. Z. 1992. Bd 210. S. 413–439.
5. *Kirane M.* Blow-up for some equations with semilinear dynamical boundary conditions of parabolic and hyperbolic types // Hokkaido Math. J. 1992. V. 21, N 2. P. 221–229.
6. *Amann H., Fila M.* A Fujita-type theorem for the Laplace equation with a dynamical boundary condition // Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 1997. V. 66, N 2. P. 321–328.
7. *Kirane M., Nabana E., Pokhozhaev S. I.* Nonexistence of global solutions to an elliptic equation with a dynamical boundary condition // Bol. Soc. Paran. Mat. (2). 2004. V. 22, N 2. P. 9–16.
8. *Киране М., Набана Э., Похожаев С. И.* Построение самосопряженного расширения оператора Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на пучке плоскостей. I // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 6. С. 768–774.
9. *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conductor of heat in solids. Oxford: Oxford Univ. Press, 1960.
10. *Gröger, K.* Initial boundary value problems from semiconductor device theory // Z. Angew. Math. Mech. 1987. Bd 67. S. 345–355.
11. *Igbida N., Kirane M.* A degenerate diffusion problem with dynamical boundary conditions // Math. Ann. 2002. V. 323, N 2. P. 377–396.
12. *Bejenaru I., Diaz J. I., Vrabie I. I.* An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamic boundary conditions // Electron. J. Differential Equations. 2001. V. 50. P. 16–19.
13. *Grobbelaar-Van Dalsen M., Sauer N.* Solutions in Lebesgue spaces of the Navier–Stokes equations with dynamical boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1993. V. 123, N 4. P. 745–761.

14. *Langer R. E.* A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid // Tôhoku Math. J. 1932. V. 35. P. 260–275.
15. *Popescu L.* Parabolic large diffusion equations with dynamical boundary conditions // An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 2001. V. 28. P. 173–182.
16. *Popescu L.* Parabolic large diffusion equations with dynamical boundary conditions. Existence results // Math. Rep. (Bucur.) 2003. V. 4. P. 401–413.
17. *Sun N.-Z.* Mathematical modelling of groundwater pollution. New York: Springer-Verl., 1996.
18. *Vulkov L. G.* Applications of Steklov-type eigenvalue problems to convergence of difference schemes for parabolic and hyperbolic equations with dynamical boundary conditions // Numerical analysis and its applications (Rousse, 1996). Berlin: Springer, 1997. P. 557–564. (Lecture Notes in Comput. Sci.; 1196).
19. *Koleva M. N., Vulkov L. G.* On the blow up of finite difference solutions to the heat-diffusion equation with semilinear dynamical boundary conditions // Appl. Math. Comput. 2005. V. 161, N 1. P. 69–71.
20. *Zlateva K.* Method of lines for parabolic equations with dynamical boundary conditions // Math. Balkanica. 2000. V. 14, N 3–4. P. 275–290.
21. *Ahmed N. U., Kerbal S.* Necessary conditions of optimality for systems governed by B-evolutions // Proc. dynamic systems and applications. Atlanta, GA, 1995. V 2. P. 293–300. Atlanta, GA: Dynamic, 1996.
22. *Aiki T.* Multi-dimensional Stefan problems with dynamic boundary conditions // Appl. Anal. 1995. V. 56, N 1–2. P. 71–94.
23. *Andreucci D., Gianni R.* Global existence and blow up in a parabolic problem with nonlocal dynamical boundary conditions // Adv. Differential Equations. 1996. V. 1, N 5. P. 729–752.
24. *Arrieta J. M., Quittner P., Rodriguez-Bernal A.* Parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and singular initial data // Differential Integral Equations. 2001. V. 14, N 12. P. 1487–1510.
25. *Von Below J., De Coster C.* A qualitative theory for parabolic problems under dynamical boundary conditions // J. Ineq. Appl. 2000. V. 5, N 5. P. 467–486.
26. *Fila M., Quittner P.* Global solutions of the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. P. 1325–1333.
27. *Friedman A., Shinbrot M.* The initial value problem for the linearized equations of water waves // J. Math. Mech. 1968. V. 17. P. 107–180.
28. *Kacur J.* Nonlinear parabolic equations with the mixed nonlinear and nonstationary boundary conditions // Math. Slovaca. 1980. V. 30. P. 213–237.
29. *Koleva M. N.* On the computation of blow-up solutions of parabolic equation with semilinear dynamical boundary conditions // Proc. Math. Inform. 2003. V. 39. P. 122–126.
30. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* О существовании решения уравнения Лапласа с нелинейным динамическим граничным условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 1. С. 95–110.
31. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. Amsterdam: Gordon and Breach, 1993.

Статья поступила 17 октября 2005 г., окончательный вариант — 20 февраля 2006 г.

Mokhtar Kirane
Laboratoire de Mathématiques,
Université de La Rochelle, France
mkirane@univ-lr.fr

Nasser-eddine Tatar
King Fahd University of Petroleum and Minerals,
Department of Mathematical Sciences
Dhahran, 31261, Saudi Arabia
tatarn@kfupm.edu.sa