Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 517.987

ТЕХНИКА СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРИБЛИЖЕННОЙ ВЕРСИИ ТЕОРЕМЫ РАДОНА — НИКОДИМА

Р. дель Кампо, Э. де Амо

Аннотация: Рассмотрена задача приближенного представления линейных функционалов и показано, как техника секвенциальной плотности может быть использована для ее решения.

Ключевые слова: Радон, Никодим, абсолютная непрерывность, секвенциальная плотность, аппроксимативное представление.

1. Введение

Недавно в рамках (непрерывного) интеграла Даниеля в [1] конструктивным способом установлены достаточные условия «точной» производной Радона — Никодима v, а именно, $J(h) = I(hv)$ для любого абсолютно I-непрерывного линейного функционала J и для любого h из B. В то же время без условий непрерывности (функционального аналога случая конечно аддитивной меры) в духе работы Фефермана [2] было показано, что $AC(I) \subset R(I)$, т. е. множество всех абсолютно I-непрерывных линейных функционалов (строго) содержится в множестве всех приближенно I-представимых линейных функционалов (см. [3]). В статье [3] решающую роль играло предположение $1 \in B$ (т. е. B — алгебра с единицей). Этот результат недавно был обобщен на системы типа алгебр Рисса в [4]. Некоторые идеи и обозначения мы используем из этой статьи, хотя наши методы различны.

В данной работе будет доказана приближенная версия теоремы Радона — Никодима с помощью новой процедуры, которая распадается на три этапа: сначала доказывается основная теорема о представлении для некоторых непрерывных функционалов (теорема 3.1), а затем с помощью свойства секвенциальной плотности (следствие 4.2) выводится включение $AC(I) \subseteq R(I)$ (см. теорему 5.2), что показывает естественность используемых ранее гипотез.

Мы делаем упор на естественность доказательства теоремы 5.2: свойство полноты для сопряженных пространств обеспечивает сходимость операторов по норме там, где была только поточечная сходимость, и это позволяет обосновать теорему 5.2 как непосредственное распространение теоремы 3.1 с учетом следствия 4.2.

2. Предварительные сведения

Всюду далее X — произвольное непустое множество и $B \subseteq \mathbb{R}^X$ — алгебра функций, определенных на X (т. е. векторная решетка, замкнутая относительно поточечного произведения функций). Пусть $+B := \{h \in B : h \geq 0\}$ — конус положительных элементов, $h^+ := h \vee 0$, $h^- := (-h) \wedge 0$ (и $|h| = h^+ + h^-$).

Пусть B' — множество всех линейных функционалов, определенных на B, снабженное порядком $J \geq 0 \Leftrightarrow J(h) \geq 0$, $h \in +B$. Через $B^\diamond$ будет обозначаться класс всех линейных функционалов, ограниченных на каждом промежутке $[u, v] := \{x \in B : u \leq x \leq v\}$ для $u, v \in B$, $u \leq v$ («*относительно ограниченных*» в [5, с. 35], «*порядково ограниченных*» в [6, с. 150], «*интервально ограниченных*» в [7. с. 169(a)]), представляющий собой векторную решетку относительно поточечных операций и индуцированного из B' порядка.

Система Люмиса — это тройка (X, B, I), где $X \neq \varnothing$ — абстрактное множество, $B \subseteq \mathbb{R}^X$ — алгебра функций с поточечными операциями и $I : B \to \mathbb{R}$ — положительный линейный функционал. Нам понадобится следующая формула (см. [5]):

$$(T \wedge S)(h) := \inf\{T(h_1) + S(h_2) : h_1, h_2 \in +B, h_1 + h_2 = h\} \quad \forall h \in +B.$$

Далее через $I : B \to \mathbb{R}$ будет обозначаться линейный положительный функционал на B. Такой функционал задает следующую полунорму на B:

$$I_1(h) := I(|h|) \quad \text{и} \quad I_2(h) := \sqrt{I(h^2)} \quad \forall h \in B.$$

Преимущество полунормы I_2 состоит в том, что она получается из полускалярного произведения ϕ, определенного на B формулой $\phi(h, g) := I(hg)$ $\forall h, g \in B$, так что выполнено неравенство Коши — Шварца

$$|I(hg)| \leq I_2(h)I_2(g) \quad \forall h, g \in B.$$

Эти полунормы приводят к соответствующим пространствам линейных непрерывных функционалов на B:

$$C_1(I) := \{J \in B' : \exists M \in \mathbb{R}\ \forall h \in B\ |J(h)| \leq MI_1(h)\},$$
$$C_2(I) := \{J \in B' : \exists M \in \mathbb{R}\ \forall h \in B\ |J(h)| \leq MI_2(h)\},$$

являющимся сопряженными к (B, I_1) и (B, I_2) соответственно. Элементы из $C_1(I)$ и $C_2(I)$ называются соответственно I_1- и I_2-непрерывными функционалами. Отметим, что I_1-непрерывность для положительного J равносильна тому, что $J \leq MI$ с некоторым $M \geq 0$. I_1-непрерывность является обобщением следующего понятия (см. [3, пример 1]).

Определение 2.1. Пусть (X, B, I) — система Люмиса. Функционал $J \in B'$ называется *абсолютно непрерывным относительно* I, обозначается через $J \ll I$, если

$$(\forall \varepsilon > 0\ \forall h \in +B\ \exists \delta > 0 \forall k \in +B)\ k \leq h,\ I(k) < \delta \Rightarrow |J(k)| < \varepsilon.$$

Положим $AC(I) := \{J \in B' : J \ll I\}$.

Легко показать, что $C_1(I) \subseteq AC(I) \subseteq B^\diamond$. На самом деле это (порядковые) идеалы в $B^\diamond$ и $AC(I)$ даже является полосой (в терминах из [8, с. 93]), но нам надо будет только то, что это векторные решетки в $B^\diamond$. Однако, как показывают примеры 6.3 и 6.5, $C_1(I)$ $C_2(I)$ не связаны отношением включения.

В завершение мы рассмотрим введенные в [3] пространства $SR(I)$ и $R(I)$ строго и приближенно I-представимых функций соответственно:

$$SR(I) := \{I_g : g \in B\},\ \text{где}\ I_g(h) := I(gh) \quad \forall h \in B,$$
$$R(I) := \{J \in B' : \exists v_n \in B\ I_{v_n}(h) \to J(h) \quad \forall h \in B\}.$$

Очевидно, что $SR(I) \subseteq R(I)$. В этих обозначениях точная версия теоремы Радона — Никодима гласит, что $AC(I) = SR(I)$. В [3, пример 2] показано, что вообще говоря, невозможно ожидать большего, чем включение $AC(I) \subseteq R(I)$ (даже в предположении $1 \in B$).

3. Теорема о представлении для $C_2(I)$

Здесь мы докажем первую теорему о приближенном представлении для класса $C_2(I)$ всех I_2-непрерывных функционалов с использованием классической теоремы Рисса — Фреше для гильбертовых пространств. Это модифицированная версия предложения 1 из [3].

Теорема 3.1. *Пусть (X, B, I) — система Люмиса и $J \in B'$. Если J I_2-непрерывен, то J приближенно I-представим и, кроме того, приближенная производная J — I_2-фундаментальная последовательность, т. е. для любого $J \in C_2(I)$ существует I_2-фундаментальная последовательность $\{v_n\} \subseteq B$ такая, что $J(h) = \lim\limits_{n\to\infty} I(hv_n)$ для любого $h \in B$. В частности, $C_2(I) \subseteq R(I)$.*

Доказательство. Пусть $K := \{h \in B : I_2(h) = 0\}$. Переходя к классам эквивалентности в B по модулю K, получим фактор-пространство $\widehat{B} := B/K$, снабженное индуцированной нормой $\widehat{I}_2(\hat{h}) := I_2(h)\ \forall h \in \hat{h}$. На самом деле $\widehat{B}$ — предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$\widehat{\psi}(\hat{u}, \hat{v}) := I(uv), \quad u \in \hat{u},\ v \in \hat{v}.$$

Предгильбертово пространство $(\widehat{B}, \widehat{\psi})$ может быть пополнено до гильбертова пространства $(\overline{B}, \overline{\psi})$, и каждый элемент $\widehat{B}$ может быть отождествлен с его образом в $\overline{B}$ при естественном вложении $\widehat{B} \subseteq \overline{B}$. Тем самым для каждого $\bar{h} \in \overline{B}$ существует I_2-фундаментальная последовательность $\{\hat{h}_n\}$ в $\widehat{B}$ такая, что $\hat{h}_n \to \bar{h}$ в $\overline{B}$ и скалярное произведение в $\overline{B}$ задается формулой

$$\overline{\psi}(\bar{u}, \bar{v}) := \lim_{n\to\infty} \widehat{\psi}(\hat{u}_n, \hat{v}_n) = \lim_{n\to\infty} I(u_n v_n) \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \overline{B}.$$

Пусть $J \in C_2(I)$. Тогда существует $M > 0$ такое, что $|J(h)| \le M I_2(h)$ $\forall h \in B$. Следовательно, функционал $\widehat{J} : \widehat{B} \to \mathbb{R}$, $\widehat{J}(\hat{h}) := J(h)\ \forall h \in \hat{h}$, определен, и верна формула

$$|\widehat{J}(\hat{h})| = |J(h)| \le M I_2(h) = M \widehat{I}_2(\hat{h}).$$

Поэтому $\widehat{J}$ — линейный непрерывный функционал на $\widehat{B}$ и его можно распространить единственным образом до линейного непрерывного функционала $\overline{J} : \overline{B} \to \mathbb{R}$ на пополнение $\overline{B}$. По теореме Рисса — Фреше существует единственный элемент $\bar{v} \in \overline{B}$ такой, что $\overline{J}(\bar{h}) = \overline{\psi}(\bar{h}, \bar{v})\ \forall \bar{h} \in \overline{B}$. В частности, найдется I_2-фундаментальная последовательность $\{v_n\}$ в B такая, что

$$J(h) = \widehat{J}(\hat{h}) = \overline{J}(\hat{h}) = \overline{\psi}(\hat{h}, \bar{v}) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\psi}(\hat{h}, \hat{v}_n) = \lim_{n\to\infty} I(h\ v_n) \quad \forall h \in B. \qquad \square$$

4. Секвенциальная плотность $C_1(I)$ в $AC(I)$

В этом пункте отличной от использованной ранее техникой мы дадим прямое доказательство одного из основных утверждений работ [3, 4], чтобы доказать соответствующие теоремы о представлении. Эти утверждения можно получить с помощью классических результатов в рамках теории векторных решеток (таких, как [5, следствие II.1.5, с. 26]), если учесть, что $AC(I)$ является полосой, порожденной I в $B^{\diamond}$ (см. [5, с. 37]). Преимущество приводимого здесь доказательства (основанного на идеях из [9]) в том, что мы не используем общую теорию и тем самым можем получать результаты в контексте функциональных пространств.

Теорема 4.1. *Пусть (X, B, I) — система Люмиса и $J \in +AC(I)$. Тогда*

$$J(h) = \lim_{m\to\infty}(J \wedge mI)(h) \quad \forall h \in +B.$$

Доказательство. Пусть $h \in +B$ и $\varepsilon > 0$. Так как $J \ll I$, существует $\delta > 0$ такое, что

$$(\forall\, g \in +B)\ g \le h,\ I(g) < \delta \Rightarrow J(g) < \varepsilon/2. \tag{1}$$

Положим $k := \frac{J(h)}{\delta}$, и пусть $n \ge k$. Тогда

$$|J(h) - (J \wedge nI)(h)| = J(h) - (J \wedge nI)(h) \le J(h) - (J \wedge kI)(h).$$

Кроме того, согласно формуле

$$(J \wedge kI)(h) = \inf\{J(h_1) + kI(h_2) : h_1, h_2 \in +B, h_1 + h_2 = h\}$$

найдутся h_1, h_2 такие, что $(J \wedge kI)(h) + \frac{\varepsilon}{2} \ge J(h_1) + kI(h_2)$. Итак, имеем

$$\begin{aligned}|J(h) - (J \wedge nI)(h)| &\le J(h) - (J \wedge kI)(h)\\ &\le J(h) - (J(h_1) + kI(h_2) - \varepsilon/2) = J(h_2) - kI(h_2) + \varepsilon/2.\end{aligned}$$

Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что из $g \le h$ вытекает $J(g) - kI(g) \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Если $I(g) < \delta$, то ввиду (1)

$$J(g) - kI(g) = J(g) - \frac{J(h)}{\delta}I(g) < \frac{\varepsilon}{2} - \frac{J(h)}{\delta}\delta < \frac{\varepsilon}{2} - J(h) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $I(g) \ge \delta$, то

$$J(g) - kI(g) = J(g) - \frac{J(h)}{\delta}I(g) = J(g) - J\left(\frac{I(g)}{\delta}h\right) < J\left(g - \frac{I(g)}{\delta}h\right)$$

и из $I(g) \ge \delta$, $h \ge g$ вытекает, что $J(g) - kI(g) \le J(g - g) = 0 \le \varepsilon/2$. $\square$

Согласно теореме 4.1 для любого $J \in +AC(I)$ существует последовательность $J_m := mI \wedge J$, $m \in \mathbb{N}$, в $+C_1(I)$ такая, что $J_m \to J$ поточечно. Отметим, что $J_m \in C_1(I)$, ибо $J_m \le mI$ и $J \ge 0$. Тем самым $C_1(I)$ секвенциально плотно в $AC(I)$. Отсюда вытекает

Следствие 4.2. *Для любого $J \in AC(I)$ существует последовательность $\{J_m\} \subseteq C_1(I)$ такая, что $J_m(h) \to J(h)$ для каждого $h \in B$.*

Свойство секвенциальной плотности и отсутствие явного вида последовательности $\{J_m\}$ наиболее важны для нас. При этих обстоятельствах становится естественным наш подход к решению задачи о приближенном представлении.

5. Представимость абсолютно непрерывных функционалов

Получим приближенную теорему Радона — Никодима (теорема 5.2) из теоремы 3.1 и следствия 4.2. Обратим внимание на свойство полноты пространства $C_2(I)$, сопряженного к пространству B, снабженному I_2-нормой. Представляется более естественным наложение условия $C_1(I) \subseteq C_2(I)$, которое, как показывает следующая лемма, слабее требования $1 \in B$.

Лемма 5.1. *Пусть (X, B, I) — система Люмиса и $1 \in B$. Тогда $C_1(I) \subseteq C_2(I)$.*

Доказательство. Пусть J из $C_1(I)$. Для $h \in B$ найдется $M > 0$ такое, что

$$|J(h)| \le MI_1(h) = MI(|h|) = MI(1\ |h|) \le MI_2(1)\ I_2(|h|) = M_0 I_2(h),$$

где $M_0 := MI_2(1)$ и использовано неравенство Коши — Шварца. Тем самым $J \in C_2(I)$, откуда $C_1(I) \subseteq C_2(I)$. $\square$

Обратное к утверждению леммы 5.1 неверно, как показано в примере 6.3, поэтому следующая теорема строго обобщает теорему из [3, с. 446]).

Теорема 5.2 (приближенная теорема Радона — Никодима). *Пусть (X, B, I) — система Люмиса и $C_1(I) \subseteq C_2(I)$. Тогда $AC(I) \subseteq R(I)$, т. е. если $J \ll I$, то существует последовательность $\{v_m\} \subseteq B$ такая, что $J(h) = \lim\limits_{m\to\infty} I(hv_m)$ для любого $h \in B$.*

Доказательство. Возьмем J из $AC(I)$. С учетом следствия 4.2 найдется последовательность $\{J_m\}$ в $C_1(I)$ такая, что $J_m \to J$ поточечно. Согласно предположениям для любого $m \in \mathbb{N}$ будет $J_m \in C_1(I) \subseteq C_2(I)$, и ввиду теоремы 3.1 существует I_2-фундаментальная последовательность $\{v_m(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ в B такая, что $I_{v_m(n)} \to J_m$ поточечно. Обозначим через $\|\cdot\|$ дуальную норму для I_2 в $C_2(I)$, т. е. стандартную норму оператора на $C_2(I)$. На самом деле $I_{v_m(n)}$ сходится к J_m по этой норме. Отметим, что J_m и $I_{v_m(n)}$ в $C_2(I)$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Найдется n_0 такое, что

$$\forall p, q \ge n_0 \quad I_2(v_m(p) - v_m(q)) < \varepsilon.$$

Если $p, q \ge n_0$ и $h \in B$ с $I_2(h) \le 1$, то

$$\begin{aligned}|(I_{v_m(p)} - I_{v_m(q)})(h)| &= |I_{v_m(p)}(h) - I_{v_m(q)}(h)| = |I(h\ v_m(p)) - I(h\ v_m(q))|\\ &= |I(h\ [v_m(p) - v_m(q)])| \le I_2(h)\ I_2(v_m(p) - v_m(q)) \le I_2(v_m(p) - v_m(q)) < \varepsilon,\end{aligned}$$

тем самым $\|I_{v_m(p)} - I_{v_m(q)}\| < \varepsilon$, т. е. для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\{I_{v_m(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в банаховом пространстве $(C_2(I), \|\cdot\|)$ (сопряженном к (B, I_2)). Отсюда $\{I_{v_m(n)}\}$ сходится к некоторому элементу из $(C_2(I), \|\cdot\|)$. Кроме того, $I_{v_m(n)} \to J_m$ поточечно. Значит, $I_{v_m(n)} \to J_m$ по норме в $C_2(I)$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим $n_m \in \mathbb{N}$ такое, что $\|I_{v_m(n_m)} - J_m\| < 1/m$, и положим $u_m := v_m(n_m)$, $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\|I_{u_m} - J_m\| < 1/m$. Для данных $h \in B$ и $\varepsilon > 0$ пусть $m_1 \in \mathbb{N}$ таково, что $\|I_{u_m} - J_m\| I_2(h) < \varepsilon/2$ для любого $m \ge m_1$, и из сходимости $J_m(h) \to J(h)$ вытекает существование $m_2 \in \mathbb{N}$ такого, что $|J_m(h) - J(h)| < \varepsilon/2$ для любого $m \ge m_2$. Наконец, полагая $m \ge \max\{m_1, m_2\}$, выводим, что

$$\begin{aligned}|J(h) - I(u_m h)| &\le |J(h) - J_m(h)| + |J_m(h) - I_{u_m}(h)|\\ &\le |J(h) - J_m(h)| + \|J_m - I_{u_m}\| I_2(h) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

т. е. $I(u_m h) \to J(h)\ \forall\ h \in B$. $\square$

6. Обсуждения и примеры

В этом пункте мы установим связь между условием $C_1(I) \subseteq C_2(I)$ теоремы 5.2 и существованием I_2-аппроксимативной I-единицы. Приведем также несколько примеров, взятых главным образом из [4].

Последовательность $\{u_n\}$ из B называется *I_2-аппроксимативной I-единицей*, если $I(u_n h) \to I(h)$ $\forall h \in B$ и $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_2(u_n) < \infty$. Введя обозначение

$$R_2(I) := \{J \in B' : \exists v_n \in B \ \sup_{n\in\mathbb{N}} I_2(v_n) < \infty, I_{v_n}(h) \to J(h) \forall h \in B\},$$

можно сказать, что существование I_2-аппроксимативной I-единицы равносильно тому, что $I \in R_2(I)$.

Лемма 6.1. *Пусть (X, B, I) — система Люмиса. Равносильны следующие утверждения:*

(i) $C_1(I) \subseteq C_2(I)$,

(ii) $I \in C_2(I)$,

(iii) $I_1 \leq MI_2$ *для некоторого* $M > 0$.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$ (ii) Имеем $I \in C_1(I)$, так как $|I(h)| \leq I(|h|)$ для любого $h \in B$, а тогда ввиду (i) $I \in C_2(I)$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) найдется $M > 0$ такое, что $|I(h)| \leq MI_2(h)$ для любого $h \in B$. Поэтому если $h \in +B$, то $I_1(h) = I(h) = |I(h)| \leq MI_2(h)$ и для любого $h \in B$ будет

$$\begin{aligned} I_1(h) = I_1(|h|) = I_1(h^+ + h^-) &\leq I_1(h^+) + I_1(h^-) \\ &\leq MI_2(h^+) + MI_2(h^-) \leq 2MI_2(|h|) = 2MI_2(h) \end{aligned}$$

(iii)$\Rightarrow$(i) Пусть $J \in C_1(I)$. Существует $M' > 0$ такое, что $|J(h)| \leq M'I_1(h) \leq M'MI_2(h)$ $\forall h \in B$, откуда $J \in C_2(I)$. $\square$

Предложение 6.2. *Пусть (X, B, I) — система Люмиса и $I \in R_2(I)$. Тогда $C_1(I) \subseteq C_2(I)$.*

Доказательство. Если $I \in R_2(I)$, то существует последовательность $\{u_n\}$ в B с $I_2(u_n) \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ такая, что $I(u_n h) \to I(h)$. Используя неравенство Коши — Шварца, получаем

$$|I(u_n h)| \leq I_2(u_n) I_2(h) \leq MI_2(h) \quad \forall h \in B,$$

и, перейдя к пределу, имеем $|I(h)| \leq MI_2(h)$ для любого $h \in B$, откуда $I \in C_2(I)$. По лемме 6.1 $C_1(I) \subseteq C_2(I)$. $\square$

Предыдущие утверждения облегчают проверку предположения теоремы 5.2, как показывает следующий

Пример 6.3. Пусть $B := C_0([0,1])$ — пространство непрерывных на $[0,1]$ вещественных функций таких, что $f(0) = f(1) = 0$, и $I(f) := \int\limits_0^1 f(t)\,dt$, $f \in B$. Пусть $L^p := L^p([0,1])$ с лебеговой мерой. Тогда $B \subseteq L^\infty \subseteq L^2 \subseteq L^1$ и $I_1 = \|\cdot\|_1$, $I_2 = \|\cdot\|_2$ ограниченные на B. Пусть $u \in B$ кусочно линейна, равна единице на $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ и $u_n := (nu) \wedge 1 \in B$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку u_n является I_2-аппроксимативной I-единицей, согласно предложению 6.2 $C_1(I) \subseteq C_2(I)$. Поэтому можно применить теорему 5.2 и получить, что $AC(I) \subseteq R(I)$.

Пусть $\pi : L^1 \to B'$ отображает g в $\pi(g) := I_g$, где $I_g : B \to \mathbb{R}$ задано по формуле $\pi(g)(f) = I_g(f) = I(gf)$, $f \in B$. Можно доказать, что

$$SR(I) = \pi(B) \subset C_1(I) = \pi(L^\infty) \subset C_2(I) = \pi(L^2) \subset AC(I) = \pi(L^1)$$

и все включения строгие. В частности, включение $C_1(I) \subset C_2(I)$ строгое.

Однако наличие I_2-аппроксимативной I-единицы не равносильно тому, что $C_1(I) \subseteq C_2(I)$, как показывает

Пример 6.4. Возьмем $B = l^2(\mathbb{N}) = \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leq \infty\right\}$ и линейный функционал $I(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j x_j$, $x \in B$, где $\beta \in l^1$ фиксировано и $\beta_j > 0$. Тогда $SR(I) = \pi(\beta l^2) \subset C_1(I) = \pi(\beta l^\infty) \subset C_2(I) = \pi(\sqrt{\beta} l^2)$ и I_2-аппроксимативной I-единицы нет.

Наконец, приведем пример, показывающий, что включения $C_1(I) \subseteq C_2(I)$ может и не быть.

Пример 6.5. Рассмотрим $B = l^1(\mathbb{N}) = \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \infty\right\}$ и $I(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j$, $x \in B$. В этом случае $SR(I) = \pi(l^1) \subset C_2(I) = \pi(l^2) \subset C_1(I) = \pi(l^\infty)$ и все включения строгие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Amo E. de, Chitescu I., Díaz Carrillo M.* An exact functional Radon–Nikodym theorem for Daniell integrals // Studia Math. 2001. V. 148, N 2. P. 97–110.
2. *Fefferman C.* A Radon–Nikodym theorem for finitely additive set functions // Pacific J. Math. 1967. V. 23, N 1. P. 35–45.
3. *Amo E. de, Chitescu I., Díaz Carrillo M.* An approximate functional Radon–Nikodym theorem // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). 1999. V. 48, N 3. P. 443–450.
4. *Günzler H.* Approximate Radon–Nikodym representations on Riesz algebras // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). 2005. V. 54, N 1, P. 5–36.
5. *Bourbaki N.* Les structures fondamentales de l'anlyse. Livre VI. Paris: Hermann, 1956.
6. *Cristescu R.* Ordered vector spaces and linear operators. Kent: Abacus Press, 1976.
7. *Günzler H.* Linear functionals which are integrals // Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. 1973. V. 43. P. 167–176.
8. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz spaces. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1971. V. I.
9. *Dubins L. E.* An elementary proof of Bochner's finitely additive Radon–Nikodym theorem // Amer. Math. Monthly. 1969. V. 76. P. 520–523.

Статья поступила 12 июля 2005 г.

Ricardo del Campo, Enrique de Amo
Dpto. de Álgebra y Análisis Matemático, Universidad de Almería,
04120 Almería, Spain
`rcampo@ual.es`, `edeamo@ual.es`