Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 532.516.5; 517.958

СОВМЕСТНАЯ ЗАДАЧА О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ СИЛЫ

С. А. Гуда, В. И. Юдович

Аннотация: Исследуются крутильные колебания тела вращения внутри сосуда, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, под действием момента упругой силы. Доказывается асимптотическая устойчивость состояния покоя. Используются два подхода: прямой метод Ляпунова и метод линеаризации. Глобальная асимптотическая устойчивость устанавливается при помощи однопараметрического семейства функционалов Ляпунова. Затем исследуются малые колебания системы жидкость-тело. Показано, что линеаризованный оператор задачи о вращении тела в жидкости можно реализовать как операторную матрицу, получаемую добавлением двух скалярных строк и двух столбцов к оператору Стокса. Таким образом, этот оператор является двумерным окаймлением оператора Стокса и наследует многие его свойства, в частности, дискретность спектра. Задача на собственные значения для линеаризованного оператора сводится к решению дисперсионного уравнения. Исследование уравнения показывает, что все собственные значения расположены внутри правой (устойчивой) полуплоскости. На основе этого затем проводится обоснование линеаризации. С применением абстрактной теоремы В. И. Юдовича доказывается асимптотическая устойчивость в шкале функциональных пространств, бесконечная дифференцируемость решений и затухание всех их производных со временем.

Ключевые слова: движение тела в вязкой жидкости, устойчивость, метод линеаризации, конечномерное окаймление.

Введение

В работе исследуется задача о крутильных колебаниях твердого тела вращения с закрепленной осью внутри сосуда произвольной формы, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. При таком движении область течения жидкости не меняется со временем. Упругий момент силы, действующий на тело, заставляет его совершать колебания около положения равновесия. Физически очевидно, что вследствие диссипации энергии амплитуда колебаний данного крутильного маятника затухает со временем, а жидкость приходит в состояние покоя. Далее эти утверждения точно сформулированы и строго доказаны. Исследованы малые колебания системы жидкость-тело.

Известны два основных подхода к исследованию устойчивости решения: прямой метод Ляпунова и метод линеаризации. Здесь применяются оба.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05–01–00567) и гранта президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ–5747.2006.1).

Для доказательства устойчивости прямым методом можно использовать полную энергию системы жидкость-тело. Однако даже в случае маятника с трением [1] этого недостаточно для того, чтобы установить затухание возмущений. Здесь можно пойти двумя путями. Первый — воспользоваться надлежащим обобщением теоремы Барбашина — Красовского [2]. Она была первоначально доказана для конечномерных дифференциальных уравнений. Но результат обобщается и на бесконечномерные системы, у которых траектории компактны (см. [3]), скажем, на различные параболические задачи. Мы, однако, пойдем вторым путем, применив, по существу, некоторый бесконечномерный вариант теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. По образцу задачи о маятнике с трением [1] построен функционал Ляпунова второго рода (для доказательства асимптотической устойчивости). Он зависит от некоторого параметра α. Хотя при фиксированном значении α он удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова лишь в некоторой окрестности положения равновесия, надлежащее значение параметра α можно подобрать для любой окрестности. Таким образом, глобальная устойчивость — затухание всех возмущений — устанавливается при помощи однопараметрического семейства функционалов Ляпунова.

Во второй части работы (§ 3) система жидкость-тело исследуется в малой окрестности состояния покоя при помощи метода линеаризации. Дана точная оценка скорости затухания возмущений, при этом доказывается их бесконечная гладкость и затухание всех производных. Используя подходящее разложение фазового пространства, линеаризованный оператор A_0 задачи о вращении тела в жидкости можно реализовать как операторную матрицу, получаемую добавлением двух скалярных строк и двух столбцов к оператору Стокса S. Таким образом, он является двумерным окаймлением[1)] оператора S. Это позволяет в задаче на собственные значения исключить скорость жидкости и перейти к отысканию корней дисперсионного уравнения.

Дисперсионная функция для оператора A_0 представляет собой сумму полинома и ряда из простейших дробей, у которого все вычеты в полюсах одного знака. Ее исследование показывает, что при малой частоте γ собственных колебаний тела в отсутствие жидкости спектр оператора расположен на положительной (устойчивой) вещественной полуоси, т. е. состояние покоя устойчиво монотонно. При возрастании частоты γ первые два собственные значения сталкиваются и выходят в комплексную плоскость. Таким образом, устойчивость состояния покоя становится колебательной. Однако в зависимости от формы, размеров области течения и параметра η — отношения плотности жидкости к плотности тела — явление монотонной устойчивости может повториться при бóльших γ. В соответствии с асимптотикой корней дисперсионного уравнения, при $\gamma \to \infty$ линеаризованный оператор имеет ровно два комплексно сопряженных собственных значения, причем последние неограниченно удаляются от вещественной оси.

Между прочим, исследование спектра линеаризованного оператора показывает, что при $\gamma > 0$ все собственные значения расположены внутри правой (устойчивой) полуплоскости. На основе этого затем проводится обоснование линеаризации. Исходная задача сводится к дифференциальному уравнению в банаховом пространстве $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{S}_p$ — замыкание по норме $\mathbb{L}_p$ множества финитных гладких соленоидальных полей. С применением абстрактной теоремы

[1)]Здесь и далее термин «окаймление» используется для обозначения результата, а не процесса.

[4, гл. 2, § 2, теорема 2.1] доказываются асимптотическая устойчивость в шкале функциональных пространств, бесконечная дифференцируемость решений и затухание всех их производных со временем.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим совместную задачу о движении твердого тела D_r в ограниченном контейнере D_c, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью. Тело подчинено связи — закреплено на своей оси симметрии OO' таким образом, что может лишь вращаться вокруг нее. Предположим также, что помимо силы вязкого трения на тело действует упругий вращательный момент по закону Гука: $M_{\mathrm{elastic}} = -\tilde{k}\varphi$, где $\tilde{k} > 0$ — коэффициент жесткости, φ — угол отклонения от положения равновесия $\varphi = 0$. В эксперименте такая ситуация реализуется, когда тело подвешено на столь тонком стержне, что его влиянием на движение жидкости можно пренебречь. Упругий момент M_{elastic} возникает из-за сопротивления стержня кручению.

Поле скорости жидкости $\vec{u}$ и давление p подчиняются уравнению Навье — Стокса и условию несжимаемости

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho_f}\nabla p + \nu \Delta \vec{u}, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\vec{u} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь ρ_f, ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости. Для вектор-функции $\vec{u}$ имеем краевые условия прилипания

$$\vec{u}|_{S_r} = r\dot{\varphi}\vec{e}_\phi, \quad \vec{u}|_{S_c} = 0, \tag{1.3}$$

где $\vec{e}_\phi$ — один из трех координатных ортов $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z). Угловая скорость $\dot{\varphi}$ вращения тела и угол поворота φ считаются неизвестными. Должно выполняться уравнение движения тела

$$J\ddot{\varphi} = \widetilde{M}(\vec{u}) - \tilde{k}\varphi, \tag{1.4}$$

J — момент инерции тела, $\widetilde{M}(\vec{u})$ — момент силы вязкого трения, выражающийся через компоненты тензора вязких напряжений $\widetilde{\Sigma}_{ij}(\vec{u}) = \nu\rho_f\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big)$ по формуле (см., например [5])

$$\widetilde{M}(\vec{u}) = -\int\limits_{S_r} r\widetilde{\Sigma}_{ij}(\vec{u}) n_i e_{\phi j}\, dS.$$

Здесь и далее принято обычное соглашение о суммировании по i, j от 1 до 3.

Таким образом, получается замкнутая система уравнений (1.1)–(1.4) с неизвестными $\vec{u}, p, \varphi$. Она имеет нулевое решение — состояние покоя $\vec{u}_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Мы будем изучать устойчивость этого равновесия и малые колебания системы около него. Договоримся далее трактовать систему (1.1)–(1.4) как задачу, описывающую эволюцию возмущений состояния покоя.

Перейдем к безразмерным переменным. Для этого достаточно выбрать масштабы длины L и времени T. Пусть заданы параметры $\nu, \rho_f, J, \tilde{k}$ и средняя плотность тела ρ_r. Масштаб длины L выберем так, чтобы выполнялось равенство $J = \rho_r L^5$. За единицу измерения времени примем так называемое вязкое время $T = \frac{L^2}{\nu}$.

После перехода к безразмерным переменным:

$$r = Lr_1, \quad z = Lz_1, \quad t = Tt_1, \quad \vec{u} = \frac{L}{T}\vec{u}_1, \quad p = \frac{\rho_f L^2}{T^2} p_1,$$

система (1.1)–(1.4) принимает вид (индексы опущены)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \Delta \vec{u}, \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0, \tag{1.5}$$

$$\vec{u}|_{S_r} = r\dot{\varphi}\vec{e}_\phi, \quad \vec{u}|_{S_c} = 0, \tag{1.6}$$

$$\ddot{\varphi} - \eta M(\vec{u}) + \gamma^2 \varphi = 0. \tag{1.7}$$

Здесь $\eta = \frac{\rho_f}{\rho_r}$ — отношение плотностей жидкости и тела, $k = \gamma^2 = \frac{\tilde{k}}{\nu^2 L \rho_r}$ — безразмерный коэффициент жесткости, γ — циклическая частота колебаний тела при отсутствии жидкости. Безразмерный момент $M(\vec{u})$ силы вязкого трения вычисляется по формуле

$$M(\vec{u}) = -\int\limits_{S_r} r\Sigma_{ij}(\vec{u}) n_i e_{\phi j}\, dS, \quad \Sigma_{ij}(\vec{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{1.8}$$

§ 2. Прямой метод Ляпунова

Доказывая законность линеаризации в § 3 (см. теорему 3.4), мы автоматически получим, что задача Коши для уравнений (1.5)–(1.7) имеет единственное решение $\mathrm{w}(t) = (\vec{u}(t), \varphi(t), \dot{\varphi}(t))^\tau$ по крайней мере для малых начальных данных $\mathrm{w}_0 = (\vec{u}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)^\tau$. Тем самым определен эволюционный оператор G, ставящий в соответствие начальному значению w_0 вектор-функцию $\mathrm{w}(t)$, определенную на $[0; +\infty)$. Устойчивость состояния покоя можно трактовать как непрерывность эволюционного оператора G в нуле. Таким образом, если рассматривать задачу в различных пространствах, то получаются разные определения устойчивости по Ляпунову (см. [4, гл. 2, § 1]). Выберем в качестве фазового пространства задачи (1.5)–(1.7) декартово произведение $\mathbb{H} = \mathbb{S}_2(D_f) \times \mathbb{R}^2$. Гильбертово пространство $\mathbb{S}_2(D_f)$ есть замыкание в $\mathbb{L}_2(D_f)$ множества финитных гладких соленоидальных полей в D_f. Норма элемента $\mathrm{w} = (\vec{u}, \varphi, \dot{\varphi})^\tau$ фазового пространства $\mathbb{H}$ определяется равенством

$$\|\mathrm{w}\|^2_{\mathbb{H}} = \int\limits_{D_f} \vec{u}^2\, dx + \varphi^2 + \dot{\varphi}^2. \tag{2.1}$$

Строгое определение *глобальной* устойчивости по Ляпунову требует, чтобы задача Коши для уравнений (1.5)–(1.7) была разрешима при всех начальных данных из пространства $\mathbb{H}$ и при $t \in [0; +\infty)$, т. е. чтобы был однозначно определен эволюционный оператор. Однако глобальной теоремы существования единственного решения нет даже для уравнений Навье — Стокса (см. [6]). Можно было бы рассмотреть обобщенные решения Лерэ — Хопфа (см. [7]) и доказать, что ветвление решений возможно лишь на некотором конечном промежутке времени $[0; T]$, причем для T можно получить оценку через начальные данные. При $t > T$ все решения оказываются уже малыми и гладкими и к ним применимы известные локальные рассмотрения (см. [4], а также теоремы 3.4 и 3.5 настоящей статьи). Таким образом можно все-таки установить глобальную устойчивость в несколько обобщенном смысле — с отказом от единственности решения начально-краевой задачи. Такое обобщение может, однако, стать содержательным лишь после того, как будет установлена неединственность обобщенного решения, в которую авторы мало верят.

Как известно, полная механическая энергия является подходящей функцией Ляпунова для доказательства устойчивости равновесия, но не позволяет установить *асимптотическую* устойчивость. Чтобы доказать затухание решений системы (1.5)–(1.7), мы воспользуемся приемом построения надлежащей функции Ляпунова, примененным в [1] в задаче о маятнике с трением. Рассмотрим сначала этот пример.

Дифференциальное уравнение, описывающее движение маятника, имеет вид

$$\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + \gamma^2\varphi = 0, \quad \gamma, h > 0. \tag{2.2}$$

Полная механическая энергия маятника $E = \frac{1}{2}\gamma^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$ не является функцией Ляпунова второго рода, так как ее производная в силу системы (2.2) $\dot{E} = -h\dot{\varphi}^2$ лишь отрицательна, но не отрицательно определена. Однако сумма $U = E + V$, где $V = \frac{1}{2}(h\varphi + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\varphi^2$, имеет уже отрицательно определенную производную $\dot{U} = -\gamma^2 h\varphi^2 - h\dot{\varphi}^2$. Поэтому она является функцией Ляпунова второго рода, откуда и следует асимптотическая устойчивость уравнения (2.2).

Полная механическая энергия системы жидкость-тело имеет вид

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_{D_f} \vec{u}^2\,dx + \frac{\gamma^2}{2\eta}\varphi^2 + \frac{1}{2\eta}\dot{\varphi}^2.$$

Вычислим ее производную в силу системы (1.5)–(1.7). Для этого докажем сначала несколько лемм. Далее предполагается, что поверхности S_r и S_c класса C^2.

Лемма 2.1. *Пусть $\vec{u}_k = (u_{k1}, u_{k2}, u_{k3})$, $k = 1, 2$, — гладкие соленоидальные поля, удовлетворяющие краевым условиям $\vec{u}_k|_{S_r} = r\dot{\varphi}_k\vec{e}_\phi$, $\vec{u}_k|_{S_c} = 0$, $k = 1, 2$. Тогда первая и вторая формулы Грина для оператора Стокса могут быть представлены в виде*

$$\int\limits_{D_f} \Delta\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{D_f} \Sigma_{ij}(\vec{u}_1)\Sigma_{ij}(\vec{u}_2)\,dx - M(\vec{u}_1)\dot{\varphi}_2, \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{D_f} \Delta\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2\,dx = \int\limits_{D_f} \vec{u}_1 \cdot \Delta\vec{u}_2\,dx + M(\vec{u}_2)\dot{\varphi}_1 - M(\vec{u}_1)\dot{\varphi}_2, \tag{2.4}$$

где M и Σ_{ij} определены в (1.8).

Доказательство. Выразив граничные интегралы в общих формулах Грина через $M(\vec{u}_{1,2})$ с использованием формулы (1.8), приходим к (2.3) и (2.4). $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $\vec{u}$ — гладкое соленоидальное поле, удовлетворяющее краевому условию* (1.6). *Тогда справедливо тождество*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_f} \Sigma^2(\vec{u})\,dx = \int\limits_{D_f} (\nabla\vec{u})^2\,dx + \ell\dot{\varphi}^2. \tag{2.5}$$

Здесь $\Sigma^2(\vec{u}) = \Sigma_{ij}(\vec{u})\Sigma_{ij}(\vec{u})$, $(\nabla\vec{u})^2 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, константа $\ell = -\int\limits_{S_r} rn_r\,dS = 2|D_r| > 0$ — удвоенный объем области D_r, $n_r = n_i e_{ri}$ — радиальная компонента внешней по отношению к жидкости нормали $\vec{n}$.

Доказательство. Равенство (2.5) есть тождество типа Корна (см. [8]). Интегрируя по частям и пользуясь соленоидальностью поля $\vec{u}$, выводим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_f} \Sigma^2(\vec{u})\,dx = \int\limits_{D_f} (\nabla\vec{u})^2\,dx + \int\limits_{S_r} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} n_j\,dS.$$

Краевое условие (1.6) позволяет преобразовать подынтегральное выражение в последнем слагаемом к виду

$$u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} n_j = r^2\dot{\varphi}^2 \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \vec{e}_\phi} \cdot \vec{n} = -r\dot{\varphi}^2 n_r.$$

В итоге приходим к (2.5). $\square$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $\vec{\chi}$ — решение краевой задачи

$$\Delta\vec{\chi} = \nabla q, \quad \mathrm{div}\vec{\chi} = 0, \quad \vec{\chi}|_{S_r} = r\vec{e}_\phi, \quad \vec{\chi}|_{S_c} = 0. \tag{2.6}$$

Граничное поле $r\vec{e}_\phi$ гладко продолжается внутрь области D_f, после чего доказательству гладкости решения $\vec{\chi}$ может препятствовать лишь недостаточная гладкость границы. При сделанных выше предположениях вектор-функция $\vec{\chi}$ принадлежит $\mathbb{W}_p^2$ для всех $p > 1$ (см. [4, гл. 1, § 5]). Следовательно, по теореме вложения [9, гл. 1, § 8, теорема 1] она принадлежит классу C^1. Вычислим соответствующий полю $\vec{\chi}$ момент силы вязкого трения. Полагая в формуле (2.3) $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{\chi}$, выводим

$$m \overset{\mathrm{def}}{=} -M(\vec{\chi}) = \frac{1}{2}\int\limits_{D_f} \Sigma^2(\vec{\chi})\,dx > 0. \tag{2.7}$$

Момент силы трения любого поля скоростей $\vec{u}$ связан с $M(\vec{\chi})$ формулой

$$M(\vec{u}) = -\int\limits_{D_f} \Delta\vec{u}\cdot\vec{\chi}\,dx - m\dot{\varphi}. \tag{2.8}$$

Она получается из (2.4), если положить $\vec{u}_1 = \vec{u}$, $\vec{u}_2 = \vec{\chi}$.

Теперь мы готовы вычислить производную энергии $\dot{E}$. Пусть $\vec{u}(t)$, $\varphi(t)$ — достаточно гладкое решение, тогда, пользуясь первой формулой Грина (2.3), имеем

$$\dot{E} = \int\limits_{D_f} \Delta\vec{u}\cdot\vec{u}\,dx + \dot{\varphi}M(\vec{u}) = -\frac{1}{2}\int\limits_{D_f} \Sigma^2(\vec{u})\,dx. \tag{2.9}$$

По аналогии с задачей о маятнике введем вспомогательный функционал

$$V = \frac{\eta}{2}\left(\int\limits_{D_f} \vec{u}\cdot\vec{\chi}\,dx + \frac{1}{\eta}\dot{\varphi} + m\varphi\right)^2 + \frac{\gamma^2}{2\eta}\varphi^2. \tag{2.10}$$

Вычисляя производную $\dot{V}$ с использованием равенства (2.8), получаем

$$\dot{V} = \eta\left(\int\limits_{D_f} \vec{u}\cdot\vec{\chi}\,dx + \frac{1}{\eta}\dot{\varphi} + m\varphi\right)\left[\int\limits_{D_f} u_i u_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j}\,dx - \frac{\gamma^2}{\eta}\varphi\right] + \frac{\gamma^2}{\eta}\varphi\dot{\varphi}. \tag{2.11}$$

Функционал Ляпунова U возьмем зависящим от некоторого положительного параметра α:

$$U = \alpha E + V. \tag{2.12}$$

Докажем, что произвольное возмущение $\mathrm{w}(t) = (\vec{u}, \varphi, \dot\varphi)$ экспоненциально затухает при $t \to \infty$. Из-за наличия нелинейного члена в уравнениях Навье — Стокса глобальный функционал Ляпунова построить не удается. Поэтому рассматриваются возмущения с энергией, ограниченной произвольной, но фиксированной константой, точнее, предполагается, что в начальный момент времени $\mathrm{w}(0) \in B_R$, т. е. $\|\mathrm{w}(0)\|_{\mathbb{H}} \le R$. Константа $\alpha = \alpha(R)$ подбирается для каждого R. Таким образом, для доказательства глобальной устойчивости приходится использовать семейство функционалов Ляпунова (2.12).

Лемма 2.3. *Существуют такие положительные константы $d_1(\alpha)$ и $d_2(\alpha)$, что для всех $\mathrm{w} \in \mathbb{H}$ справедливо неравенство*

$$d_1(\alpha)\|\mathrm{w}\|^2_{\mathbb{H}} \le U \le d_2(\alpha)\|\mathrm{w}\|^2_{\mathbb{H}}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Очевидно, что оценка (2.13) выполняется, если положить

$$d_1(\alpha) = \min\left\{\frac{\alpha}{2}; (\alpha+1)\frac{\gamma^2}{2\eta}; \frac{\alpha}{2\eta}\right\}, \quad d_2(\alpha) = \widetilde{C} + \max\left\{\frac{\alpha}{2}; (\alpha+1)\frac{\gamma^2}{2\eta}; \frac{\alpha}{2\eta}\right\}, \tag{2.14}$$

$$\widetilde{C} = \frac{\eta}{2}\left(\|\vec{\chi}\|^2_{\mathbb{L}_2} + \frac{1}{\eta^2} + m^2\right). \qquad \square$$

Теорема 2.1. *Пусть $\gamma > 0$. Для любого $R > 0$ найдутся такие значения параметров α и δ, что всякое достаточно гладкое решение $\mathrm{w} = (\vec{u}, \varphi, \dot\varphi)^\tau$ задачи (1.5)–(1.7) с начальным полем, для которого $\|\mathrm{w}(0)\|_{\mathbb{H}} \le R$, затухает в том смысле, что выполняется неравенство*

$$\|\mathrm{w}(t)\|_{\mathbb{H}} \le C\|\mathrm{w}(0)\|_{\mathbb{H}} e^{-\delta t} \tag{2.15}$$

и сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{D_f} e^{\delta_1 t}(\nabla\vec{u})^2\,dx\,dt < \infty \tag{2.16}$$

с произвольной константой $\delta_1 < 2\delta$.

Доказательство. Согласно формулам (2.9) и (2.11) производная функционала U в силу системы (1.5)–(1.7) такова:

$$-\dot U = \frac{\alpha}{2}\int\limits_{D_f}\Sigma^2(\vec{u})\,dx + m\gamma^2\varphi^2 + \gamma^2\varphi\int\limits_{D_f}\vec{u}\cdot\vec{\chi}\,dx - \eta\left(\int\limits_{D_f}\vec{u}\cdot\vec{\chi}\,dx + m\varphi + \frac{1}{\eta}\dot\varphi\right)\int\limits_{D_f} u_i u_j\frac{\partial\chi_i}{\partial x_j}\,dx. \tag{2.17}$$

Оценивая ее при помощи тождества (2.5), неравенств Фридрихса (константа C_F зависит только от области D_f)

$$\int\limits_{D_f}(\nabla\vec{u})^2\,dx \ge C_F\int\limits_{D_f}\vec{u}^2\,dx \tag{2.18}$$

и Коши — Буняковского, получаем

$$-\dot U \ge \alpha C_1\|\vec{u}\|^2_{\mathbb{L}_2} + C_3\varphi^2 + \alpha C_2\dot\varphi^2 - C_4|\varphi|\;\|\vec{u}\|_{\mathbb{L}_2} - C_5\|\mathrm{w}(t)\|_{\mathbb{H}}\|\vec{u}\|^2_{\mathbb{L}_2}.$$

Здесь введены обозначения $C_1 = C_F$, $C_2 = \ell$, $C_3 = m\gamma^2$, $C_4 = \gamma^2 \|\vec{\chi}\|_{\mathbb{L}_2}$,

$$C_5 = \frac{\eta}{2}\sqrt{\|\vec{\chi}\|^2_{\mathbb{L}_2} + \frac{1}{\eta^2} + m^2}\max_{x\in D_f}\sqrt{\sum_{i,k=1}^{3}\left|\frac{\partial \chi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i}\right|^2}.$$

Существенно, что все эти константы от α не зависят. Если точка $(\vec{u}, \varphi, \dot{\varphi})^\tau$ находится в шаре B_{R_1} ($R_1 \geq R$ — некоторое фиксированное число), то, пользуясь оценками $|\varphi| \cdot \|\vec{u}\|_{\mathbb{L}_2} \leq \frac{1}{2}\big(\frac{C_3}{C_4}\varphi^2 + \frac{C_4}{C_3}\|\vec{u}\|^2\big)$ и (2.13), приходим к дифференциальному неравенству $\dot{U} \leq -2\delta U$ с коэффициентом

$$\delta = \frac{1}{2d_2(\alpha)}\min\left\{\alpha C_1 - C_5 R_1 - \frac{C_4^2}{2C_3};\frac{C_3}{2};\ \alpha C_2\right\}, \tag{2.19}$$

где константа $d_2(\alpha)$ определена в (2.14). При этом $\delta > 0$, если $\alpha > \frac{C_5 R_1}{C_1} + \frac{C_4^2}{2C_1C_3}$. Применяя лемму Гроноулла (см., например, [10]), имеем

$$U(t) \leq U(0)e^{-2\delta t}. \tag{2.20}$$

Отсюда с учетом (2.13) следует оценка скорости затухания возмущения:

$$\|\mathrm{w}(t)\|_{\mathbb{H}} \leq C_6(\alpha)\|\mathrm{w}(0)\|_{\mathbb{H}}\, e^{-\delta t}, \quad C_6^2(\alpha) = \frac{d_2(\alpha)}{d_1(\alpha)}. \tag{2.21}$$

Данное неравенство справедливо, пока точка $\mathrm{w}(t)$ находится в шаре B_{R_1}. Положим $R_1 = R \sup\limits_{\alpha>1} C_6(\alpha)$ и $\alpha = \frac{C_5R_1}{C_1} + \frac{C_4^2}{2C_1C_3} + 1$. Тогда $\delta > 0$ и оценка (2.21) выполняется при всех $t \geq 0$.

Для доказательства сходимости интеграла (2.16) воспользуемся формулой (2.17). Имеем

$$\int\limits_0^T\int\limits_{D_f} e^{\delta_1 t}(\nabla\vec{u})^2\,dxdt \leq \left|\int\limits_0^T e^{\delta_1 t}\dot{U}(t)\,dt\right| + C_7\int\limits_0^T e^{\delta_1 t}U(t)\,dt.$$

Здесь $C_7 = \frac{1}{d_1(\alpha)}\max\big\{C_5R_1 + \frac{C_4^2}{2C_3}; \frac{C_3}{2}; \alpha C_2\big\}$. Интегрируя по частям и применяя оценку (2.20), устанавливаем существование конечного предела при $T \to \infty$. □

§ 3. Метод линеаризации

В данном параграфе устойчивость нулевого решения системы (1.5)–(1.7) исследуется методом линеаризации. Изучается спектр линеаризованного оператора A_0. Поскольку тело с закрепленной осью имеет одну степень свободы и его фазовое пространство двумерно, ясно, что оператор A_0 можно естественно трактовать как двумерное окаймление оператора Стокса S, отвечающего движению жидкости при неподвижной границе. Вследствие этого он наследует многие свойства оператора Стокса, в частности дискретность спектра. Задача на собственные значения для линеаризованного оператора при помощи исключения скорости жидкости сводится к решению дисперсионного уравнения. Исследуется зависимость корней уравнения от частоты γ. В частности, устанавливается устойчивость спектра линеаризованного оператора.

Далее с применением теоремы о законности линеаризации из [4] доказывается экспоненциальное затухание возмущений и всех их производных при

$t \to \infty$. Для этого требуются две вспомогательные теоремы. Из первой следует, что оператор $-A_0$ порождает аналитическую полугруппу, а во второй доказывается коэрцитивность линеаризованной задачи.

Дифференциальное уравнение в банаховом пространстве. Введем пространство $\mathbb{S}_p$, $1 < p < \infty$, как замыкание по норме $\mathbb{L}_p$ множества финитных гладких соленоидальных полей в D_f.

Фазовым пространством системы является декартово произведение $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$, состоящее из элементов $\mathrm{w} = (\vec{u}, \varphi, \beta)^\tau$, где $\vec{u} \in \mathbb{S}_p$, $(\varphi, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Норма вектора w определяется равенством

$$\|\mathrm{w}\|_{\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2} = \left(\int\limits_{D_f} \sum_{i=1}^{3} |u_i|^p \, dx + |\varphi|^p + |\beta|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = 2$ получим гильбертово пространство $\mathbb{H} = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{R}^2$.

Чтобы избавиться от давления в уравнении (1.5), подействуем на него гидродинамическим проектором $\Pi : \mathbb{L}_p \to \mathbb{S}_p$. При $1 < p < 2$ он определяется как расширение ортопроектора Π на подпространство $\mathbb{S}_2$ по непрерывности, а при $p > 2$ — как сужение на множество $\mathbb{L}_p$. В [4, гл. 1, § 5] показано, что для $1 < p < \infty$ проектор Π ограничен, причем его норма подчинена оценке $\|\Pi\|_{\mathbb{L}_p} \leq C \frac{p^2}{p-1}$ с константой C, не зависящей от p.

Введем операторы A_0 и K, действующие на вектор $\mathrm{w} = (\vec{u}, \varphi, \beta)^\tau$ по правилам

$$A_0 \mathrm{w} = \begin{pmatrix} -\Pi \Delta \vec{u} \\ -\beta \\ -\eta M(\vec{u}) + \gamma^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Pi\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\eta M & \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \varphi \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$K_0(\mathrm{w}, \mathrm{w}) = (-\Pi(\vec{u}, \nabla)\vec{u}, 0, 0)^\tau.$$

Область определения оператора A_0 есть

$$\mathscr{D}_p(A_0) = \left\{ (\vec{u}, \varphi, \beta)^\tau \in \mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2 \mid \vec{u} \in \mathbb{W}_p^2(D_f),\ \vec{u}|_{S_c} = 0,\ \vec{u}|_{S_r} = r\beta \vec{e}_\phi \right\}.$$

Теперь задачу (1.5)–(1.7) можно трактовать как дифференциальное уравнение в банаховом пространстве $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$

$$\dot{\mathrm{w}} + A_0 \mathrm{w} = K_0(\mathrm{w}, \mathrm{w}). \tag{3.2}$$

Задача о малых колебаниях системы жидкость-тело имеет вид

$$\dot{\mathrm{w}} + A_0 \mathrm{w} = 0. \tag{3.3}$$

Ее удобно рассматривать в комплексном расширении пространства $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$, которое будем обозначать через $\mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2$.

Линеаризованный оператор. Выделим из оператора A_0 оператор Стокса S, отвечающий движению жидкости при неподвижной границе. Оператор S действует по правилу

$$\mathrm{S}\vec{u} = -\Pi \Delta \vec{u} \tag{3.4}$$

и имеет область определения $\mathscr{D}(\mathrm{S}) = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{W}_p^2(D_f) \mid \vec{u}|_{S_c \cup S_r} = 0 \right\}$. Основная трудность заключается в том, что в отличие от оператора A_0 область определения оператора Стокса состоит из вектор-функций, *исчезающих* на ∂D_f.

Представим значение оператора A_0 в некоторой точке $\mathrm{w} \in \mathscr{D}(A_0)$ в виде

$$A_0\mathrm{w} = \begin{pmatrix} \mathrm{S}(\vec{u} - \beta\vec{\chi}) \\ -\beta \\ -\eta M(\vec{u} - \beta\vec{\chi}) + \gamma^2\varphi + \eta m\beta \end{pmatrix} = \mathscr{A}_0 \begin{pmatrix} \vec{u} - \beta\vec{\chi} \\ \varphi \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\mathscr{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\eta M & \gamma^2 & \eta m \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

где вектор-функция $\vec{\chi}$ определена в (2.6), $m = -M(\vec{\chi}) > 0$ (см. (2.7)), $\mathscr{A}_0$ — матрица оператора $A_0 : \mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2$, записанная (в отличие от (3.1)) с использованием *двух* координатных систем в его прообразе и в образе, соответствующих двум разложениям фазового пространства $\mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2$ в прямую сумму:

$$\mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2 = (\mathbb{S}_p, 0, 0)^\tau \dotplus \mathrm{Lin}((0,1,0)^\tau) \dotplus \mathrm{Lin}((\vec{\chi}, 0, 1)^\tau), \tag{3.7}$$

$$\mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2 = (\mathbb{S}_p, 0, 0)^\tau \dotplus \mathrm{Lin}((0,1,0)^\tau) \dotplus \mathrm{Lin}((0, 0, 1)^\tau). \tag{3.8}$$

Компоненты вектора $(\vec{u} - \beta\vec{\chi}, \varphi, \beta)$ из формулы (3.5) суть «координаты» вектора $\mathrm{w} = (\vec{u}, \varphi, \beta)^\tau$ в разложении (3.7), т. е. $\mathrm{w} = (\vec{u} - \beta\vec{\chi}, 0, 0)^\tau + \varphi(0,1,0)^\tau + \beta(\vec{\chi}, 0, 1)^\tau$. Они получаются из стандартных координат $\vec{u}$, φ и β при помощи матрицы перехода

$$\begin{pmatrix} \vec{u} - \beta\vec{\chi} \\ \varphi \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & -\vec{\chi} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \varphi \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathscr{A}_0$ есть двумерное окаймление оператора Стокса, получаемое добавлением двух строк и двух столбцов. Ниже понятие окаймления определяется для произвольного оператора.

Конечномерное окаймление оператора. Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство, представленное в виде прямой суммы своих подпространств: $\mathbb{X} = \widehat{\mathbb{X}} \dotplus \mathbb{L} = \widehat{\mathbb{X}} \dotplus \mathbb{M}$, причем $n \overset{\mathrm{def}}{=} \dim\mathbb{L} = \dim\mathbb{M} < \infty$. Таким образом, конечномерные подпространства $\mathbb{L}$ и $\mathbb{M}$ суть два, возможно различные, дополнения подпространства $\widehat{\mathbb{X}}$. Пусть заданы линейные операторы $\widehat{A} : \widehat{\mathbb{X}} \to \widehat{\mathbb{X}}$, $A_{12} : \mathbb{L} \to \widehat{\mathbb{X}}$, $A_{21} : \widehat{\mathbb{X}} \to \mathbb{M}$ и $A_{22} : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ такие, что оператор $\widehat{A}$ плотно определен и $\mathscr{D}(A_{21}) \supset \mathscr{D}(\widehat{A})$.

Определение 3.1. *n-Мерным окаймлением* оператора $\widehat{A}$ посредством операторов A_{12}, A_{21} и A_{22} называется оператор $A : \widehat{\mathbb{X}} \dotplus \mathbb{L} \to \widehat{\mathbb{X}} \dotplus \mathbb{M}$, определенный на $\mathscr{D}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathscr{D}(\widehat{A}) \dotplus \mathbb{L}$ правилом

$$A : \begin{pmatrix} \hat{x} \\ x_L \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \widehat{A} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ x_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{A}\hat{x} + A_{12}x_L \\ A_{21}\hat{x} + A_{22}x_L \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Здесь координаты $\hat{x}$ и x_L — проекции вектора $x \in \mathscr{D}(A)$ на подпространства $\widehat{\mathbb{X}}$ и $\mathbb{L}$, а координаты вектора Ax — проекции[2)] на подпространства $\widehat{\mathbb{X}}$ и $\mathbb{M}$ соответственно.

[2)] Заметим, что проектирование на подпространство $\widehat{\mathbb{X}}$ векторов x и Ax происходит по разному: в первом случае параллельно подпространству $\mathbb{L}$, а во втором — $\mathbb{M}$.

Во многих задачах полезно рассматривать окаймление оператора A как специальное возмущение оператора $\widehat{A}$, при этом обычно бывают заданы операторы A и $\widehat{A}$, а подпространства $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$ и операторы A_{12}, A_{21} и A_{22} приходится определять дополнительно.

Оператор A_0 (см. (3.1)) задачи о малых колебаниях системы жидкость-тело является двумерным окаймлением оператора Стокса в смысле определения 3.1. Соответствующие подпространства $\widehat{\mathbb{X}}$, $\mathbb{L}$ и $\mathbb{M}$ суть $\widehat{\mathbb{X}} = (\mathbb{S}_p, 0, 0)^\tau$, $\mathbb{L} = \operatorname{Lin}((0,1,0)^\tau, (\vec{\chi}, 0, 1)^\tau)$, $\mathbb{M} = \operatorname{Lin}((0,1,0)^\tau, (0,0,1)^\tau)$, а операторы A_{12}, A_{21} и A_{22} согласно (3.6) определяются равенствами

$$A_{12}(\beta\vec{\chi}, \varphi, \beta)^\tau = 0, \quad A_{22}(\beta\vec{\chi}, \varphi, \beta)^\tau = (0, -\beta, \gamma^2\varphi + \eta m\beta)^\tau,$$
$$A_{21}(\vec{u}, 0, 0)^\tau = (0, 0, -\eta M(\vec{u}))^\tau, \quad \vec{u} \in \mathscr{D}(\mathrm{S}).$$

Общие свойства оператора A_0. Как двумерное окаймление оператора Стокса оператор A_0 наследует многие его свойства, часть их выражает

Лемма 3.1. *Оператор A_0 замкнут в пространстве $\mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2$ и имеет чисто точечный спектр, представляющий собой счетное множество конечнократных собственных значений $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$, при этом $\operatorname{Re}\sigma_k \to +\infty$.*

Данное утверждение следует из теоремы 3.2 (см. следствие 3.1).

Замечание. Оператор A_0 получается в результате конечномерного возмущения самосопряженного и положительно определенного в пространстве $\mathbb{H}$ оператора $\widetilde{A}_0$, определенного на $\mathscr{D}(A_0)$ равенством $\widetilde{A}_0\mathrm{w} = (-\Pi\Delta\vec{u}, \varphi, -M(\vec{u}))^\tau$ (в том смысле, что разность $A_0 - \widetilde{A}_0$ — двумерный оператор). Это позволяет так же, как и в лемме 5.6 из [4, гл. 1], доказать, что спектр и корневые векторы оператора A_0 в пространствах $\mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2$ не зависят от индекса p и последние образуют полную систему в $\mathbb{S}_p \times \mathbb{C}^2$, а также в $\mathscr{D}_p(A_0)$ с метрикой $\mathbb{W}_p^2 \times \mathbb{C}^2$.

Дисперсионное уравнение. Если оператор A есть конечномерное окаймление оператора $\widehat{A}$, то задача на собственные значения для оператора A сводится к решению дисперсионного уравнения (см. [11; 12, гл. IV, § 3]). В ряде случаев, например, это позволило доказать вещественность и простоту собственных значений некоторых несамосопряженных операторов (см. [13–15]).

Перейдем от задачи на собственные значения для оператора A_0 к исследованию нулей соответствующей ему дисперсионной функции f. Предварительно заметим, что иногда помимо корней дисперсионного уравнения $f(\sigma) = 0$ спектр оператора A_0 также содержит и некоторые собственные значения оператора Стокса. Это те собственные значения, которые не зависят от параметров возмущения η и γ. В отвечающих им собственных подпространствах существуют вектор-функции, не создающие момента силы вязкого трения. Очевидно, что такое возможно, если оператор Стокса содержит кратные собственные значения, а также если область течения жидкости D_f симметрична относительно оси OO'.

Отметим, что теорема 3.1 о спектре, представленная ниже, относится к *глобальной* теории возмущений. Это означает, что, во-первых, рассматриваемые возмущения не малы, а во-вторых, результат относится ко всему спектру, а не к его компактной части, как в локальной теории возмущений.

Пусть σ — собственное значение оператора A_0, $\mathrm{w} = (\vec{u}, \varphi, \beta)^\tau$ — один из отвечающих ему собственных векторов:

$$\sigma\mathrm{w} - A_0\mathrm{w} = 0. \tag{3.10}$$

Запишем данное равенство с учетом (3.5) в виде системы

$$\sigma(\vec{u}_0 + \beta\vec{\chi}) - \mathrm{S}\vec{u}_0 = 0, \tag{3.11}$$

$$\sigma\varphi + \beta = 0, \tag{3.12}$$

$$\sigma\beta + \eta M(\vec{u}_0) - \gamma^2\varphi - \eta m\beta = 0. \tag{3.13}$$

Здесь $\vec{u}_0 = \vec{u} - \beta\vec{\chi}$, $\vec{u}_0|_{S_r} = 0$. Допустим, что число σ не принадлежит спектру $\mathfrak{S}_{\mathrm{S}}$ оператора Стокса. Тогда, исключая компоненты $\vec{u}_0$ и β из системы (3.11)–(3.13), приходим к равенству

$$\varphi f(\sigma) = 0, \quad f(\sigma) = -\sigma^2 + \eta\sigma^2 M(R_\sigma\vec{\chi}) - \gamma^2 + \eta m\sigma. \tag{3.14}$$

Здесь $R_\sigma = (\sigma I - \mathrm{S})^{-1}$ — резольвента оператора Стокса, дисперсионная функция f определена всюду *вне спектра* оператора S. Множитель φ отличен от нуля, поскольку по предположению $\vec{u}_0$ не является собственной вектор-функцией оператора Стокса. Поэтому σ есть корень *дисперсионного уравнения* $f(\sigma) = 0$.

Обратное тоже верно. Действительно, пусть σ — нуль функции f. Тогда $\sigma \notin \mathfrak{S}_{\mathrm{S}}$ и уравнение (3.14) имеет нетривиальное решение $\varphi = 1$. Определяя компоненты $\vec{u}_0$ и β из уравнений (3.11) и (3.12), получаем, что вектор $\mathrm{w} = (\sigma^2 R_\sigma\vec{\chi} - \sigma\vec{\chi}, 1, -\sigma)^\tau$ есть собственный вектор оператора A_0.

Теорема 3.1. *Спектр оператора A_0 есть $\mathfrak{S}_{A_0} = \mathfrak{S}_f \cup \mathfrak{S}'_{\mathrm{S}}$, где*

$$\mathfrak{S}_f = \{\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{S}_{\mathrm{S}} \mid f(\sigma) = 0\},\ \mathfrak{S}'_{\mathrm{S}} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{S}} \mid \exists\vec{\Phi} \neq 0 : \mathrm{S}\vec{\Phi} = \sigma\vec{\Phi},\ M(\vec{\Phi}) = 0\}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Равенство $\mathfrak{S}_f = \mathfrak{S}_{A_0} \setminus \mathfrak{S}_{\mathrm{S}}$ уже доказано. Покажем, что $\mathfrak{S}_{A_0} \cap \mathfrak{S}_{\mathrm{S}} = \mathfrak{S}'_{\mathrm{S}}$.

Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}_{A_0} \cap \mathfrak{S}_{\mathrm{S}}$, w — отвечающий числу σ собственный вектор оператора A_0 (см. (3.11)–(3.13)). Если $\beta = 0$, то $\varphi = 0$ и $\vec{u}_0$ есть собственная вектор-функция оператора Стокса, причем согласно (3.13) $M(\vec{u}_0) = 0$. Если же $\beta \neq 0$, то из разрешимости уравнения (3.11) следует, что $(\vec{\chi}, \vec{\Phi})_{\mathbb{S}_2} = 0$ для любой собственной вектор-функции $\vec{\Phi}$, отвечающей собственному значению σ. Воспользовавшись равенством

$$M(\vec{\Phi}) = \sigma(\vec{\chi}, \vec{\Phi})_{\mathbb{S}_2}, \tag{3.16}$$

которое следует из формулы (2.8), получаем, что $\sigma \in \mathfrak{S}'_{\mathrm{S}}$. Таким образом, доказано вложение $\mathfrak{S}_{A_0} \cap \mathfrak{S}_{\mathrm{S}} \subset \mathfrak{S}'_{\mathrm{S}}$. Обратное очевидно. $\square$

Запишем функцию f, представив резольвенту R_σ через собственные вектор-функции $\{\vec{\Phi}_n\}_{n=1}^\infty$ оператора Стокса (см. (3.4)), отвечающие собственным значениям $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ ($\lambda_n > 0$), и воспользовавшись равенством (3.16):

$$f(\sigma) = -\sigma^2 - \eta\sigma^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n\chi_n^2}{\lambda_n - \sigma} - \gamma^2 + \eta m\sigma. \tag{3.17}$$

Здесь $\chi_n = (\vec{\chi}, \vec{\Phi}_n)_{\mathbb{S}_2} = \frac{1}{\lambda_n}M(\vec{\Phi}_n)$, $m = -M(\vec{\chi}) > 0$ (см. (2.7)). Ряд в (3.17) сходится для всех $\sigma \notin \mathfrak{S}_{\mathrm{S}}$, причем его можно почленно дифференцировать любое число раз, так как $\sum\limits_{n=1}^\infty \chi_n^2 = \|\vec{\chi}\|^2_{\mathbb{L}_2}$, и собственные значения λ_n неограниченно возрастают. Таким образом, функция f мероморфна.

Собственные значения λ оператора Стокса, обладающие свойством

$$\exists \vec{\Phi} \neq 0 : \mathrm{S}\vec{\Phi} = \lambda \vec{\Phi},\ M(\vec{\Phi}) \neq 0,$$

составляют множество полюсов функции f. Оно бесконечно, так как среди величин $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеется бесконечно много отличных от нуля. Если бы это было не так, то разложение $\vec{\chi} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_n \vec{\Phi}_n$ превратилось бы в конечную сумму и из условия $\vec{\Phi}_n|_{S_r} = 0$ следовало бы, что $\vec{\chi}|_{S_r} = 0$. А это противоречит равенству $\vec{\chi}|_{S_r} = r\vec{e}_\phi$ (см. (2.6)). Обозначим полюсы функции f через $\tilde{\lambda}_j$, $j = 1, 2 \ldots$, причем так, что $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 < \cdots < \tilde{\lambda}_n < \ldots$. Сгруппируем слагаемые в сумме (3.17), соответствующие каждому полюсу $\tilde{\lambda}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$\tilde{f}(\sigma) = 0, \quad \tilde{f}(\sigma) = -\sigma^2 - \eta\sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_n \tilde{\chi}_n^2}{\tilde{\lambda}_n - \sigma} - \gamma^2 + m\eta\sigma, \quad \tilde{\chi}_n^2 = \sum_{k:\, \lambda_k = \tilde{\lambda}_n} \chi_k^2. \tag{3.18}$$

Исследуя дисперсионную функцию f, мы фактически будем работать с ее продолжением по непрерывности $\tilde{f}$, определенным на множестве $\mathbb{C} \setminus \{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ее устранимые особые точки суть те собственные значения оператора Стокса, *все* собственные вектор-функции которых дают нулевой момент силы вязкого трения. Все такие точки вне зависимости от того, являются они нулями функции $\tilde{f}$ или нет, принадлежат спектру оператора A_0 как элементы множества $\mathfrak{S}'_{\mathrm{S}}$ (см. (3.15)).

Исследование зависимости корней дисперсионного уравнения от частоты γ. Будем следовать здесь подходу статьи [16]. Введем обозначение $k = \gamma^2$ и рассмотрим уравнение (3.18) при всех $k \in \mathbb{R}$. Если параметр k положителен, то он имеет смысл безразмерной крутильной жесткости стержня, на котором подвешено тело. Выражая k через σ из уравнения (3.18), получаем

$$k = \vartheta(\sigma), \quad \vartheta(\sigma) = -\sigma^2 + m\eta\sigma - \eta\sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_n \tilde{\chi}_n^2}{\tilde{\lambda}_n - \sigma}. \tag{3.19}$$

Это облегчает изучение поведения собственных значений при изменении жесткости k. Действительно, согласно (3.19) при возрастании k корни уравнения перемещаются по линиям нулевого уровня функции $\vartheta_{\mathrm{im}} = \operatorname{Im}\vartheta$ в направлении увеличения $\vartheta_{\mathrm{re}} = \operatorname{Re}\vartheta$. Это позволяет построить траектории собственных значений, не находя последних.

Изучим множество Z_0 нулевого уровня функции ϑ_{im} и установим направление возрастания функции ϑ_{re} на различных его участках.

Представим множество Z_0 в виде объединения $Z_0 = \mathbb{R} \cup Z_{\mathbb{C}}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная ось, а множество $Z_{\mathbb{C}}$ состоит из мнимых (невещественных) чисел. Начнем с вещественной оси (см. рис. 1). На интервале $(-\infty; \tilde{\lambda}_1)$ функция ϑ строго вогнута ($\vartheta'' < 0$), причем $\vartheta(0) = 0$, $\vartheta'(0) = m\eta > 0$ и $\vartheta(\tilde{\lambda}_1 - 0) = -\infty$. Поэтому она достигает максимального значения $k_0^+ > 0$ в единственной стационарной точке $a_0^+ \in (0; \tilde{\lambda}_1)$. На остальных интервалах $(\tilde{\lambda}_n; \tilde{\lambda}_{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}$) функция ϑ изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, быть может, не монотонно. Обозначим через n_j номера интервалов $(\tilde{\lambda}_{n_j}; \tilde{\lambda}_{n_j+1})$, на которых функция ϑ всюду убывает ($\vartheta'(\sigma) \leq 0$), а через ℓ_j — номера оставшихся интервалов $(\tilde{\lambda}_{\ell_j}; \tilde{\lambda}_{\ell_j+1})$ (на рис. 1 $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 3$).

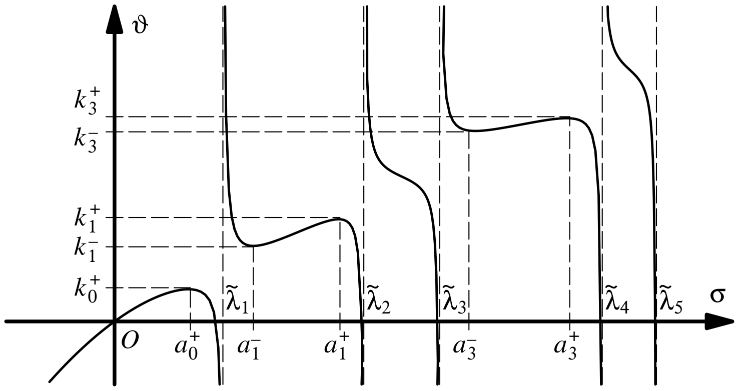

Рис. 1. График функции ϑ.

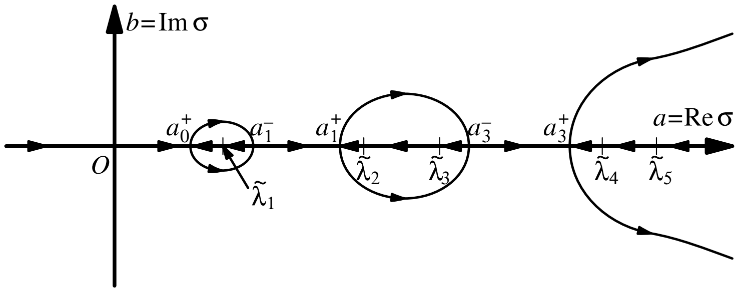

Рис. 2. Множество нулевого уровня функции ϑ_{im}
(стрелки обозначают направление возрастания функции ϑ_{re}).

Разложение функции ϑ на простейшие дроби имеет вид

$$\vartheta(\sigma) = -\sigma^2 + m\eta\sigma - \eta\sum_{n=1}^{\infty}\tilde\lambda_n\tilde\chi_n^2\biggl(\frac{\tilde\lambda_n^2}{\tilde\lambda_n - \sigma} - \tilde\lambda_n - \sigma\biggr).$$

Трехкратное дифференцирование аннулирует полиномиальную часть, и мы приходим к всюду отрицательной функции

$$\vartheta'''(\sigma) = -6\eta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde\lambda_n^3\tilde\chi_n^2}{(\tilde\lambda_n - \sigma)^4} < 0. \tag{3.20}$$

Таким образом, на интервалах $(\tilde\lambda_{\ell_j}; \tilde\lambda_{\ell_j+1})$ функция ϑ', определяющая направление возрастания функции ϑ, меняет знак ровно два раза. Пусть $a_{\ell_j}^- < a_{\ell_j}^+$ — стационарные точки функции ϑ.

Теперь исследуем компоненту $Z_{\mathbb{C}}$ нулевого множества функции ϑ_{im}. Запишем мнимую часть функции ϑ в виде ($\sigma = a + ib$; $a, b \in \mathbb{R}$)

$$\vartheta_{\mathrm{im}}(a+ib) = b\zeta(a,b), \quad \zeta(a,b) = -2a + m\eta + \eta\sum_{n=1}^{\infty}\tilde\lambda_n\tilde\chi_n^2\biggl(1 - \frac{\tilde\lambda_n^2}{|\tilde\lambda_n - (a+ib)|^2}\biggr). \tag{3.21}$$

Рассмотрим ζ как функцию переменной b. Она четная, возрастает при $b > 0$, поэтому ее минимальное значение равно $\zeta(a,0)$. Из условий Коши — Римана вытекает равенство $\vartheta'(a) = \frac{\partial(b\zeta)}{\partial b}\big|_{b=0} = \zeta(a,0)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde\lambda_n\tilde\chi_n^2$ расходится, так как вектор-функция $\vec{\chi}$ удовлетворяет неоднородному граничному условию (2.6) и поэтому не принадлежит энергетическому пространству оператора Стокса. Следовательно, $\zeta(a,b) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Таким образом, множество нулевого уровня функции ζ (оно же $Z_{\mathbb{C}}$) состоит из симметричных дуг вокруг полюсов $\tilde{\lambda}_n$, пересекающих вещественную ось в точках a_0^+, $a_{\ell_j}^-$ и $a_{\ell_j}^+$ (см. рис. 2). В силу условий Коши — Римана вещественная часть функции ϑ возрастает на этих дугах в сторону увеличения $\operatorname{Re}\sigma$. Отсюда следуют неравенства

$$\vartheta(a_0^+) < \vartheta(a_{\ell_1}^-) < \vartheta(a_{\ell_1}^+) < \vartheta(a_{\ell_2}^-) < \vartheta(a_{\ell_2}^+) < \dots. \tag{3.22}$$

Введем обозначения $k_{\ell_j}^- = \vartheta(a_{\ell_j}^-)$, $k_{\ell_j}^+ = \vartheta(a_{\ell_j}^+)$.

Таким образом, при $k \le k_0^+$ уравнение (3.19) имеет два корня $\sigma_0(k)$ и $\sigma_1(k)$ на интервале $(-\infty; \tilde{\lambda}_1)$ ($\sigma_0(k) > 0$ при $0 < k \le k_0^+$) и по одному корню $\sigma_j(k)$ на интервалах $(\tilde{\lambda}_{j-1}; \tilde{\lambda}_j)$, $j = 2, 3, \dots$. При $0 < k \le k_0^+$ спектр оператора A_0 расположен на положительной вещественной полуоси, так что система жидкость-тело устойчива монотонно.

Будем непрерывно увеличивать жесткость стержня k. Тогда корни $\sigma_0(k)$ и $\sigma_1(k)$, монотонно сближаясь, сливаются при $k = k_0^+$ в точке a_0^+ и при $k_0^+ < k < k_{\ell_1}^-$ превращаются в комплексно сопряженную пару $\sigma_0(k) = \sigma_1^*(k)$, т. е. монотонная устойчивость сменяется колебательной.

Если множество $\{\ell_j\}$ номеров интервалов, где функция ϑ немонотонна, непусто (как, например, на рис. 1), то при $k_{\ell_1}^- \le k \le k_{\ell_1}^+$ пара комплексно сопряженных корней $\sigma_0(k)$ и $\sigma_1(k)$ возвращается на вещественную ось в точке $a_{\ell_1}^-$, образуя на интервале $(\tilde{\lambda}_{\ell_1}; \tilde{\lambda}_{\ell_1+1})$ три вещественных корня (для случая, представленного на рис. 1, этими корнями будут $\sigma_0(k) \le \sigma_1(k) \le \sigma_2(k)$). Таким образом, если $\{\ell_j\} \ne \varnothing$, то при увеличении жесткости k система жидкость-тело повторно становится монотонно устойчивой. Как показал численный расчет, данное несколько неожиданное явление действительно имеет место, в частности, в задаче о крутильных колебаниях шара в концентрическом сферическом сосуде при некоторых значениях параметров (например, при радиусах сфер $R_1 = 1$ и $R_2 = 20$, $\eta = 1$).

При дальнейшем увеличении жесткости k корни $\sigma_1(k)$ и $\sigma_2(k)$ сливаются в точке $a_{\ell_1}^+$ и опять образуют комплексно сопряженную пару. Так происходит и на следующих интервалах $(\tilde{\lambda}_{\ell_2}; \tilde{\lambda}_{\ell_2+1})$, $(\tilde{\lambda}_{\ell_3}; \tilde{\lambda}_{\ell_3+1})$, … , но не более конечного числа раз[3)]. В соответствии с асимптотикой корней при $k \to +\infty$ (см. [17])

$$\sigma = i\sqrt{k} + \frac{-m_1\eta}{2\sqrt{2}}(1-i)\sqrt[4]{k} + O(1), \quad m_1 = -\int\limits_{S_r} r^2\,dS < 0,$$

комплексно сопряженные корни неограниченно удаляются от вещественной оси. Подчеркнем, что при $k > 0$ спектр оператора A_0 устойчив, а при $k = 0$ содержит нулевое собственное значение, которому соответствует семейство равновесий задачи (3.3) (а также (3.2)) $\vec{u} = 0$, $\beta = 0$, $\varphi = \mathrm{const}$.

Обоснование линеаризации. Для обоснования линеаризации воспользуемся абстрактной теоремой из книги [4] (см. [4, гл. 2, теорема 2.1]). Проверка

[3)] Подробное изучение этого явления и, в частности, доказательство того факта, что количество таких возвратов на вещественную ось может быть сколь угодно большим, должно послужить предметом другой работы.

ее условий будет проведена в теореме 3.4. Сейчас же докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Оценка резольвенты. Покажем, что оператор $-A_0$ порождает аналитическую полугруппу в $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$ при $p > 1$. Таким образом, мы установим, что он наследует свойства оператора Стокса (см. [4], где можно найти и дальнейшие ссылки). Ниже рассматривается случай произвольного конечномерного окаймления, так как доказанные теоремы понадобятся в будущем, при исследовании более сложных движений тела в вязкой жидкости.

Пусть A — плотно определенный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathbb{X}$. Согласно теореме М. З. Соломяка [18] для того чтобы оператор $-A$ порождал аналитическую полугруппу, достаточно выполнения оценки резольвенты

$$\|(\sigma I - A)^{-1}\|_{\mathbb{X}\to\mathbb{X}} \le \frac{C(\sigma^{(0)}, \delta)}{1 + |\sigma|}, \tag{3.23}$$

справедливой для всех σ из сектора $S_{\sigma^{(0)},\delta} = \{\sigma \in \mathbb{C} \mid |\arg(\sigma - \sigma^{(0)})| > \delta\}$, где $\sigma^{(0)} \in \mathbb{R}$ и $\delta \in (0; \frac{\pi}{2})$ — некоторые числа. Предположим, что оператор A есть конечномерное окаймление оператора $\widehat{A} : \widehat{\mathbb{X}} \to \widehat{\mathbb{X}}$ посредством операторов A_{12}, A_{21} и A_{22} (см. определение 3.1). Пусть f — произвольный вектор пространства $\mathbb{X}$. Рассмотрим задачу $\sigma x - Ax = f$. Записывая ее покомпонентно, приходим к системе

$$\sigma\hat{x} - \widehat{A}\hat{x} = \hat{f} - \sigma P x_L + A_{12} x_L, \tag{3.24}$$

$$\sigma Q x_L - A_{21}\hat{x} - A_{22} x_L = f_M. \tag{3.25}$$

Здесь P — проектор на подпространство $\widehat{\mathbb{X}}$ параллельно $\mathbb{M}$, $Q = I - P$, $x = \hat{x} + x_L$, $f = \hat{f} + f_M$, $\hat{x}, \hat{f} \in \widehat{\mathbb{X}}$, $x_L \in \mathbb{L}$, $f_M \in \mathbb{M}$ (см. определение 3.1). Далее нам потребуется понятие относительно ограниченного оператора.

Определение 3.2. Говорят, что оператор $F_1 : \mathbb{X} \to \mathbb{X}_1$ *ограничен относительно оператора* $F_2 : \mathbb{X} \to \mathbb{X}_2$, если $\mathscr{D}(F_2) \subset \mathscr{D}(F_1)$, и для всех $x \in \mathscr{D}(F_2)$ выполняется неравенство $\|F_1 x\|_{\mathbb{X}_1} \le a\|x\|_{\mathbb{X}} + b\|F_2 x\|_{\mathbb{X}_2}$ с константами a и b, не зависящими от x.

Теорема 3.2. *Пусть резольвента оператора $\widehat{A}$ удовлетворяет условию (3.23), а оператор A_{21} ограничен относительно оператора $\widehat{A}$. Тогда существует число $\sigma^{(1)} \ge \sigma^{(0)}$ такое, что задача (3.24), (3.25) разрешима единственным образом для всех $\sigma \in S_{\sigma^{(1)},\delta}$ и ее решение подчиняется оценке*

$$\|\hat{x}\| + \|x_L\| \le \frac{C(\sigma^{(1)}, \delta)}{1 + |\sigma|}(\|\hat{f}\| + \|f_M\|), \tag{3.26}$$

т. е. оператор $-A$ тоже порождает аналитическую полугруппу.

Доказательство. Пусть $\sigma \in S_{\sigma^{(0)},\delta}$. Выражая компоненту $\hat{x}$ из уравнения (3.24) и подставляя в (3.25), приходим к конечномерному уравнению

$$H_\sigma x_L = Q|_{\mathbb{L}}^{-1}(f_M + A_{21}\widehat{R}_\sigma \hat{f}), \tag{3.27}$$

где $\widehat{R}_\sigma = (\sigma I - \widehat{A})^{-1}$, а оператор $H_\sigma : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ определяется равенством

$$H_\sigma = \sigma I - U_\sigma, \quad U_\sigma = Q|_{\mathbb{L}}^{-1}(A_{21}\widehat{R}_\sigma(-\sigma P + A_{12}) + A_{22}). \tag{3.28}$$

Оператор $Q|_{\mathbb{L}} : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ биективен, так как пространство $\mathbb{M}$ конечномерно, и $\mathbb{L} \cap \widehat{\mathbb{X}} = \varnothing$. Заметим, что при достаточно больших $|\sigma|$ оператор H_σ обратим.

Действительно, оператор A_{21} ограничен относительно оператора $\widehat{A}$, а операторы $\widehat{A}\widehat{R}_\sigma$ сильно сходятся к нулю при $|\sigma| \to \infty$, $\sigma \in S_{\sigma^{(0)},\delta}$. Это следует из теоремы Банаха — Штейнгауза, так как они равномерно ограничены ($\|\widehat{A}\widehat{R}\| \le C$, $\sigma \in S_{\sigma^{(0)},\delta}$), и для всех элементов x из всюду плотного множества $\mathscr{D}(\widehat{A})$, полагая $z = \sigma_* x - \widehat{A}x$ (σ_* — фиксированная точка резольвентного множества оператора $\widehat{A}$), выводим, что

$$\|\widehat{A}\widehat{R}_\sigma x\| = \|\widehat{A}\widehat{R}_\sigma \widehat{R}_{\sigma_*} z\| \le \|\widehat{A}\widehat{R}_{\sigma_*}\| \, \|R_\sigma z\| \le \frac{C}{1+|\sigma|}\|z\| \underset{|\sigma|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Так как в конечномерном случае сильная сходимость влечет равномерную, то $\left\|Q|_{\mathbb{L}}^{-1} A_{21}\widehat{R}_\sigma A_{12}\right\|_{\mathbb{L}\to\mathbb{L}} \to 0$ и $\left\|\sigma Q|_{\mathbb{L}}^{-1} A_{21}\widehat{R}_\sigma Q\right\|_{\mathbb{L}\to\mathbb{L}} = o(|\sigma|)$ (при $|\sigma| \to \infty$, $\sigma \in S_{\sigma^{(0)},\delta}$). Таким образом, можно подобрать число $\sigma^{(1)} \ge \sigma^{(0)}$ такое, что для всех $\sigma \in S_{\sigma^{(1)},\delta}$ выполняется неравенство $\|U_\sigma\|_{\mathbb{L}\to\mathbb{L}} \le |\sigma|/2$. По теореме об операторе, близком к обратимому, при $\sigma \in S_{\sigma^{(1)},\delta}$ система (3.27) разрешима и для решения x_L выполняется требуемая оценка (3.26). Применяя ее, из уравнения (3.24) получаем оценку для компоненты $\hat{x}$ решения x. В итоге приходим к (3.26). $\square$

Следствие 3.1. *Резольвента оператора A_0, определенного в* (3.1), *компактна и подчиняется оценкам* (3.23) *и*

$$\|(\sigma I - A)^{-1}\|_{\mathbb{S}_p\times\mathbb{C}^2\to\mathbb{W}_p^{(2)}\times\mathbb{C}^2} \le C(\sigma^{(0)},\delta), \quad \sigma \in S_{\sigma^{(1)},\delta}, \tag{3.29}$$

с произвольной константой $\delta \in (0;\frac{\pi}{2})$ и некоторой константой $\sigma^{(1)} = \sigma^{(1)}(\delta)$. Таким образом, оператор $-A_0$ порождает аналитическую полугруппу.

Доказательство. Резольвента оператора Стокса удовлетворяет условию (3.23) с произвольной константой $\delta \in (0;\frac{\pi}{2})$ и $\sigma = 0$ (см. [4, гл. 1, § 6]). Формула (2.8) показывает, что функционал M ограничен относительно оператора S. Таким образом, оператор A_0 удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2. Заметим к тому же, что в соответствии с рассуждениями, проведенными при доказательстве этой теоремы, резольвента R_σ оператора A действует по правилу

$$\begin{aligned}
&R_\sigma f = \begin{pmatrix} R_{\sigma 11} & R_{\sigma 12} \\ R_{\sigma 21} & R_{\sigma 22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{f} \\ f_M\end{pmatrix} = R_{\sigma 11}\hat{f} + R_{\sigma 12}f_M + R_{\sigma 21}\hat{f} + R_{\sigma 22}f_M,\\
&R_{\sigma 11} = \widehat{R}_\sigma + \widehat{R}_\sigma(A_{12} - \sigma P)H_\sigma^{-1}Q|_{\mathbb{L}}^{-1}A_{21}\widehat{R}_\sigma,\\
&R_{\sigma 12} = \widehat{R}_\sigma(A_{12} - \sigma P)H_\sigma^{-1}Q|_{\mathbb{L}}^{-1},\\
&R_{\sigma 21} = H_\sigma^{-1}Q|_{\mathbb{L}}^{-1}A_{21}\widehat{R}_\sigma, \quad R_{\sigma 22} = H_\sigma^{-1}Q|_{\mathbb{L}}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Отсюда видно, что резольвента оператора A_0 компактна как сумма вполне непрерывного и конечномерных операторов. Оценки (3.23) и (3.29) вытекают из соответствующих неравенств для резольвенты оператора Стокса (см. [4, гл. 1, § 6]). $\square$

Неравенство коэрцитивности. Для доказательства бесконечной дифференцируемости решений достаточно установить коэрцитивность линеаризованной задачи. Пусть, как и выше, оператор A есть конечномерное окаймление оператора $\widehat{A} : \widehat{\mathbb{X}} \to \widehat{\mathbb{X}}$ посредством операторов A_{12}, A_{21} и A_{22} (см. определение 3.1). Для $q > 1$ и $T > 0$ введем банахово пространство $\mathbb{L}_q(C_T, \mathbb{X})$ всех T-периодических вектор-функций со значениями в пространстве $\mathbb{X}$, определенных на окружности C_T длины T. Норма в пространстве $\mathbb{L}_q(C_T, \mathbb{X})$ задается равенством

$$\|x\|_{\mathbb{L}_q(C_T,\mathbb{X})} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_{C_T} \|x(t)\|^q_{\mathbb{X}} dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Предположим, что спектры операторов A и $\widehat{A}$ не содержат точек вида $i\omega k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Рассмотрим линейные периодические задачи для операторов $\widehat{A}$ и A:

$$\frac{dy}{dt} + \widehat{A}y = g(t), \tag{3.31}$$

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t). \tag{3.32}$$

Коэрцитивность задачи (3.32) в пространстве $\mathbb{L}_q(C_T, \mathbb{X})$ означает, что для каждой вектор-функции $f \in \mathbb{L}_q(C_T, \mathbb{X})$ существует такое периодическое решение x, что $\frac{dx}{dt}, Ax \in \mathbb{L}_q(C_T, \mathbb{X})$ и выполняется неравенство

$$\left\| \frac{dx}{dt} \right\|_{\mathbb{L}_q(C_T,\mathbb{X})} + \|Ax\|_{\mathbb{L}_q(C_T,\mathbb{X})} \leq C\|f\|_{\mathbb{L}_q(C_T,\mathbb{X})}. \tag{3.33}$$

Можно рассматривать уравнения (3.31) и (3.32) с начальными условиями и неравенство коэрцитивности для задачи Коши, при этом не накладывая ограничений на спектры операторов A и $\widehat{A}$. Согласно теореме 3.2 из [4, гл. 1], восходящей к П. Е. Соболевскому, эти оценки эквивалентны. Более того, если неравенство (3.33) выполняется при одном периоде T_0, то соответствующее неравенство для решения задачи Коши будет справедливо при любом T, причем константу можно взять не зависящей от T (см. [4, гл. 1, теорема 3.2 и приложение к § 5]).

Если оператор $\widehat{A}$ порождает аналитическую полугруппу, то уравнение (3.31) имеет единственное периодическое решение $y = \widehat{G}g$, причем оператор $\widehat{G}$, действующий в пространстве $\mathbb{L}_q(C_T, \widehat{\mathbb{X}})$, непрерывен (см. [4, гл. 1, теоремы 2.4 и 2.2]). Коэрцитивность задачи (3.31) означает, что оператор $\frac{d}{dt}\widehat{G} : \mathbb{L}_q(C_T, \widehat{\mathbb{X}}) \to \mathbb{L}_q(C_T, \widehat{\mathbb{X}})$ (тогда и $\widehat{A}\widehat{G}$) ограничен.

Теорема 3.3. *Пусть спектры операторов A и $\widehat{A}$ не содержат точек мнимой оси вида $i\omega k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Пусть задача* (3.31) *коэрцитивна и оператор A_{21} ограничен относительно оператора $\widehat{A}$. Тогда задача* (3.32) *тоже коэрцитивна.*

Доказательство. Из коэрцитивности задачи (3.31) следует, что резольвента оператора $\widehat{A}$ подчиняется оценке (3.23) (см. [19]), а значит, оператор $\widehat{A}$ порождает аналитическую полугруппу. Докажем коэрцитивность задачи (3.32) при $q = 2$. Отсюда будет следовать справедливость оценки (3.33) при всех q (см. [4, гл. 1, теорему 3.1]).

Пользуясь определением 3.1, запишем задачу (3.32) в виде системы

$$\frac{d\hat{x}}{dt} + \widehat{A}\hat{x} = \hat{f} - P\frac{dx_L}{dt} - A_{12}x_L, \tag{3.34}$$

$$Q\frac{dx_L}{dt} + A_{21}\hat{x} + A_{22}x_L = f_M. \tag{3.35}$$

Здесь используются те же обозначения, что и в задаче (3.24), (3.25). Действуя так же, как при доказательстве теоремы 3.2, приходим к интегродифференциальному уравнению в конечномерном пространстве $\mathbb{L}$:

$$\frac{dx_L}{dt} + Vx_L = z, \quad z = Q|_{\mathbb{L}}^{-1}(f_M - A_{21}\widehat{G}\hat{f}). \tag{3.36}$$

Заметим, что в силу коэрцитивности задачи (3.31) вектор-функция z принадлежит $\mathbb{L}_2(C_T, \mathbb{X})$. Интегродифференциальный оператор $V : \mathbb{L}_2(C_T, \mathbb{L}) \to \mathbb{L}_2(C_T, \mathbb{L})$ действует по правилу

$$Vx_L = Q|_{\mathbb{L}}^{-1} \left(-A_{21}\widehat{G} \left(P\frac{dx_L}{dt} + A_{12}x_L \right) + A_{22}x_L \right).$$

Покажем, что оператор $\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} + V\right)^{-1}$ ограничен в пространстве периодических функций $\mathbb{L}_2(C_T, \mathbb{L})$. Воспользуемся для этого теоремой Марцинкевича о мультипликаторах [20]. Определим в пространстве $\mathbb{L}$ скалярное произведение. Зафиксировав базис $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, для любых двух элементов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\zeta_i$ и $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i\zeta_i$ положим $(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$. Ввиду конечномерности норма, задаваемая этим скалярным произведением, эквивалентна исходной. Представим периодическое решение уравнения (3.36) в виде ряда Фурье

$$\frac{dx_L}{dt} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} i\omega k H_{-i\omega k}^{-1} z_k e^{i\omega kt}, \quad z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k e^{i\omega kt}.$$

Операторы H_σ, определенные в (3.28), обратимы для всех точек $\sigma = i\omega k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, ввиду предположения о регулярности данных точек. При доказательстве теоремы 3.2 было установлено, что операторы H_σ^{-1} подчиняются оценке $\left\|\sigma H_\sigma^{-1}\right\| \le C_1$, $\sigma \in S_{\sigma^{(1)},\delta}$. Нетрудно также показать, что выполняется неравенство

$$\left\| \frac{d\left(\sigma H_\sigma^{-1}\right)}{d\sigma} \right\| \le \frac{C_2}{1 + |\sigma|}, \quad \sigma \in S_{\sigma^{(1)},\delta}.$$

Отсюда следует, что мультипликаторы $\Lambda_k = -i\omega k H_{-i\omega k}^{-1}$ удовлетворяют всем условиям теоремы Марцинкевича [20]. Значит, уравнение (3.36) разрешимо для любой вектор-функции $z \in \mathbb{L}_2(C_T, \mathbb{L})$, и ее решение x_L подчиняется оценке

$$\left\| \frac{dx_L}{dt} \right\|_{L_2(C_T,\mathbb{L})} \le C\|z\|_{L_2(C_T,\mathbb{L})}. \tag{3.37}$$

Далее, используя полученное неравенство и коэрцитивность задачи (3.31), оцениваем вектор-функцию $\frac{d\hat{x}}{dt}$ в уравнении (3.34). $\square$

Рассмотрим линейную периодическую задачу для оператора A_0, определенного в (3.1):

$$\dot{\mathrm{w}} + A_0\mathrm{w} = f(t). \tag{3.38}$$

Следствие 3.2. *Для любой вектор-функции* $f \in \mathbb{L}_q(C_T, \mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2)$ $(q > 1)$ *задача* (3.38) *имеет единственное периодическое решение* $\mathrm{w} = (\vec{u}, \varphi, \beta)^\tau$, *обладающее обобщенными производными* $\dot{\mathrm{w}} \in \mathbb{L}_q(C_T, \mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2)$, $\partial_x^2\vec{u} \in \mathbb{L}_q(C_T, \mathbb{L}_p(D_f))$, *и выполняется оценка*

$$\|\dot{\mathrm{w}}\|_{\mathbb{L}_q(C_T,\mathbb{S}_p\times\mathbb{R}^2)} + \left\|\partial_x^2\vec{u}\right\|_{\mathbb{L}_q(C_T,\mathbb{L}_p(D_f))} \le C\|f\|_{\mathbb{L}_q(C_T,\mathbb{S}_p\times\mathbb{R}^2)}. \tag{3.39}$$

Теоремы об устойчивости и затухании старших производных возмущений. Мы выяснили, что при $\gamma > 0$ спектр линеаризованного оператора лежит целиком в правой полуплоскости. Теперь на основе этого докажем, что нулевое решение нелинейной системы (1.5)–(1.7) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем возмущения экспоненциально затухают со временем.

Теорема 3.4. *Пусть $\gamma > 0$, тогда нулевое решение задачи* (1.5)–(1.7) *асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространствах $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$ при $p > 3$. Более того, существует число $R > 0$ такое, что для всех решений $\mathrm{w}(t) = (\vec{u}(t), \varphi(t), \beta(t))^\tau$ уравнения* (3.2), *начинающихся в шаре B_R пространства $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$ ($\|\mathrm{w}(0)\|_{\mathbb{S}_p\times\mathbb{R}^2} \leq R$), выполняется оценка*

$$e^{t\sigma^{(0)}}\|\mathrm{w}(t)\|_{\mathbb{S}_p\times\mathbb{R}^2} + \left\{\int_0^t [e^{\tau\sigma^{(0)}}\|\mathrm{w}(\tau)\|_{\mathbb{S}_{q_1}\times\mathbb{R}^2}]^{r_1}\,d\tau\right\}^{\frac{1}{r_1}} + \left\{\int_0^t [e^{\tau\sigma^{(0)}}\|\partial_x\vec{u}(\tau)\|_{\mathbb{L}_{q_2}(D_f)}]^{r_2}d\tau\right\}^{\frac{1}{r_2}} \leq C\|\mathrm{w}(0)\|_{\mathbb{S}_p\times\mathbb{R}^2}.$$

Здесь постоянная C не зависит от времени, $\sigma^{(0)} > \operatorname{Re}\sigma_{\min}$, где $\sigma_{\min}$ — собственное значение оператора A_0 с минимальной вещественной частью, а числа p_1, r_1, p_2, r_2 должны удовлетворять условиям[4)]

$$q_{1,2} \geq p;\ \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} > \frac{1}{p};\ \frac{1}{r_1} > \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1}\right);\ \frac{1}{r_2} > \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{3}\right);\ r_{1,2} > 1.$$

Доказательство состоит в проверке условий теоремы 2.1 [4, гл. 2], которая проводится так же, как и для системы Навье — Стокса (см. [4, гл. 2, теорема 2.3]), с тем лишь изменением, что в качестве пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ здесь берутся $\mathbb{S}_p \times \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{S}_q \times \mathbb{R}^2$. □

В условиях теоремы 3.4 возмущения затухают не только по норме $\mathbb{S}_p\times\mathbb{R}^2$, но и в более сильном смысле. Методами теорем 8.1 и 8.2 из [4, гл. 3] доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.5. *Пусть границы S_r, S_c класса $\mathbb{C}^\infty$, тогда в условиях теоремы 3.4 возмущения $\mathrm{w}(t)$ принадлежат $\mathbb{C}^\infty(D_f) \times \mathbb{R}^2$ при $t > 0$ и имеет место сходимость $\|\partial_t^n \mathrm{w}(t)\|_{\mathbb{C}^k(D_f)\times\mathbb{R}^2} \to 0$ при $t \to +\infty$ для любых натуральных n и k.*

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность рецензенту за ряд критических замечаний, которые были учтены в тексте статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
2. *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86, № 3. С. 453–456.
3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
4. Юдович В. И. Метод линеаризации в теории гидродинамической устойчивости. Ростов-на-Дону: РГУ, 1984. (Англ. пер.: Yudovich V. I. The Linearization Method in Hydrodynamical Stability Theory. AMS Transl. Math. Monogr. 1989. V. 74.)
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
6. *Yudovich V. I.* Eleven great problems of mathematical hydrodynamics. January, 2002. University of Hull. (Preprint, N 8).
7. *Hopf E.* Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen // Math. Nachr. 1951. N 4. P. 213–231.

[4)] Все эти условия удовлетворяются, например, если $p = 4$, $q_1 = q_2 = 6$, $r_1 < 8$, $r_2 < \frac{8}{5}$.

8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

9. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

10. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

11. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях. Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970.

12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

13. *Барковский Ю. С., Юдович В. И.* Спектральные свойства конечномерных операторов и проблема моментов // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. Естественные науки. 1975. № 4. С. 49–56.

14. *Барковский Ю. С., Юдович В. И.* Рождение вихрей Тейлора в случае разновращающихся цилиндров и спектральные свойства одного класса краевых задач // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 4. С. 784–787.

15. *Барковский Ю. С., Юдович В. И.* Спектральные свойства одного класса краевых задач // Мат. сб. 1981. Т. 114, № 3. С. 438–450.

16. *Юдович В. И.* О границе монотонной и колебательной конвективной устойчивости горизонтального слоя жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1991. № 6. С. 44–50.

17. *Гуда С. А., Юдович В. И.* Асимптотика спектра малых крутильных колебаний твердого тела в вязкой жидкости // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. Естественные науки. 2007. № 2. С. 26–30.

18. *Соломяк М. З.* Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха // Докл. АН СССР. 1958. Т. 122, № 5. С. 766–769.

19. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 1. С. 52–55.

20. *Marcinkiewicz J.* Sur les multiplicatours des series de Fourier // Studia Math. 1939. N 8. P. 78–91.

Статья поступила 24 декабря 2005 г.

Гуда Сергей Александрович, $\boxed{\textit{Юдович Виктор Иосифович}}$
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук,
кафедра вычислительной математики и математической физики,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090
gudasergey@mail.ru