Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 512.54:512.544.43+512.534.12

О ПРОБЛЕМЕ ИЗОМОРФИЗМА В КЛАССЕ РАСШИРЕНИЙ СВОБОДНЫХ ГРУПП С ПОМОЩЬЮ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ

Р. А. Викентьев

Аннотация: Доказано, что в группе автоморфизмов свободной группы ранга три существуют два несопряженных автоморфизма с изоморфными группами торов.

Ключевые слова: свободная группа, группа автоморфизмов, тор автоморфизма, преобразование Титце.

Пусть F_n — свободная группа ранга n, порожденная элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$, и ϕ — автоморфизм группы F_n. Через $\mathrm{Inn}(F_n)$ обозначим группу внутренних автоморфизмов группы F_n, $\mathrm{Out}(F_n) = \mathrm{Aut}(F_n)/\mathrm{Inn}(F_n)$. Через $[\phi]$ обозначим образ ϕ при естественном гомоморфизме из $\mathrm{Aut}(F_n)$ в $\mathrm{Out}(F_n)$. Существует канонический гомоморфизм из группы $\mathrm{Out}(F_n)$ на $GL_n(\mathbb{Z})$. Пусть группа $M_\phi = F_n \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ — тор автоморфизма ϕ, т. е. $M_\phi = \langle x_1, \dots, x_n, t \mid t^{-1}x_it = x_i\phi \ (i = 1, \dots, n)\rangle$.

В работе [1] доказана следующая

Теорема. *Если F_2 — свободная группа ранга 2 и $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(F_2)$, то группы M_ϕ и M_ψ изоморфны тогда и только тогда, когда $[\phi]$ и $[\psi]^{\pm 1}$ сопряжены в $\mathrm{Out}(F_2)$.*

Справедливо ли это утверждение для произвольного ранга?

В настоящей заметке доказано следующее

Утверждение. *Существуют автоморфизмы $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}(F_3)$ такие, что $M_\phi \cong M_\psi$, но $[\phi]$ не сопряжен с $[\psi]^{\pm 1}$ в группе $\mathrm{Out}(F_3)$.*

Доказательство. Рассмотрим группу $G = \langle g, h \mid gw = wg\rangle$, где $w = h^2g^{-1}h^{-1}$. В следующих выкладках мы используем преобразование Титце, где через y_i обозначается элемент $x^{-i}yx^i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

С одной стороны,

$$
\begin{aligned}
G &\cong \langle g, h, x, y \mid g = x^{-1}yx^{-1}, h = x^{-1}y, g^{-1}hgh^{-2}gh^2g^{-1}h^{-1} = 1\rangle \\
&\cong \langle x, y \mid yx^{-1}y^{-1}x^{-1}yx^{-1}yxy^{-1}xy^{-1}x = 1\rangle \\
&\cong \left\langle y_0, y_1, y_2, y_3, x \mid x^{-1}y_0x = y_1, x^{-1}y_1x = y_2, x^{-1}y_2x = y_3, y_0y_1^{-1}y_2y_3y_2^{-1}y_1^{-1} = 1\right\rangle \\
&\cong \left\langle y_0, y_1, y_2, x \mid x^{-1}y_0x = y_1, x^{-1}y_1x = y_2, x^{-1}y_2x = y_2^{-1}y_1y_0^{-1}y_1y_2\right\rangle \cong M_\phi,
\end{aligned}
$$

где ϕ — автоморфизм группы $F_3 = \langle a, b, c\rangle$, заданный правилом $a \to b \to c \to c^{-1}ba^{-1}bc$.

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
G &\cong \langle g,h,x,y \mid g=x^{-1}y, h=x^{-1}yx^{-1}, g^{-1}hgh^{-2}gh^{2}g^{-1}h^{-1}=1\rangle \\
&\cong \langle x,y \mid x^{-2}yxy^{-1}xyx^{-2}yx^{-1}y^{-1}x^{2}y^{-1}x=1\rangle \\
&\cong \left\langle y_0,y_1,y_2,y_3,x \mid x^{-1}y_0x=y_1, x^{-1}y_1x=y_2, x^{-1}y_2x=y_3, y_2y_1^{-1}y_0y_2y_3^{-1}y_1^{-1}=1\right\rangle \\
&\cong \left\langle y_0,y_1,y_2,x \mid x^{-1}y_0x=y_1, x^{-1}y_1x=y_2, x^{-1}y_2x=y_1^{-1}y_2y_1^{-1}y_0y_2\right\rangle \cong M_\psi,
\end{aligned}
$$

где ψ — автоморфизм группы $F_3=\langle a,b,c\rangle$, заданный правилом $a\to b\to c\to b^{-1}cb^{-1}ac$.

Это доказывает, что $M_\phi\cong M_\psi$, тогда как внешние автоморфизмы $[\phi],[\psi]\in \mathrm{Out}(F_3)$ не являются ни сопряженными, ни обратно сопряженными, так как образами этих автоморфизмов в $GL_3(\mathbb{Z})$ будут матрицы

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}
$$

с определителями -1 и 1 соответственно.

Отметим, что в классе расширений свободных групп с помощью конечной циклической пример изоморфных торов (как первый пример такого рода) для несопряженных автоморфизмов размерности четыре был построен в 1989 г. Д. Г. Храмцовым (см. [2]). В этой же работе было замечено, что для размерностей 2 и 3 изоморфность торов автоморфизмов конечного порядка влечет их сопряженность.

Автор благодарит своего научного руководителя О. В. Богопольского за постановку вопроса, постоянное внимание и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bogopolski O., Martino A., Ventura E.* The automorphism group of a free-by-cyclic group in rank 2. Bellaterra, 2005. (Preprint / Centre de Recerca Matematica; N 640).

2. *Храмцов Д. Г.* О внешних автоморфизмах свободных групп // Теоретико-групповые исследования. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. С. 95–127.

Статья поступила 12 мая 2006 г.

Викентьев Руслан Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vra@gorodok.net