Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 510.643

КРИТЕРИЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА С МЕТАПЕРЕМЕННЫМИ В МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ $S4.\alpha_N$

А. Н. Руцкий

Аннотация: Представлен критерий допустимости правил вывода с метапеременными в модальной логике $S4.\alpha_N$. Тем самым в логике $S4.\alpha_N$ решена проблема подстановки и получен алгоритм, распознающий разрешимость логических уравнений. Другим следствием критерия является разрешимость соответствующей квазиэквациональной теории свободной модальной алгебры в сигнатуре, обогащенной константами для свободных порождающих.

Ключевые слова: допустимое правило вывода, метапеременная, модальная логика, правило вывода.

1. Введение

Традиционно исследования допустимых правил вывода имели много аспектов — проверка разрешимости по допустимости, нахождение базиса допустимых правил вывода, проверка наследуемости допустимых правил вывода, проверка истинности квазитождеств на свободных алгебрах квазимногообразий и др. Еще одно направление исследований возникло в связи с проблемой подстановки, для интуиционистской логики поставленной еще в 1950-е гг. Проблемой подстановки для логики λ является решение вопроса: существует ли для произвольной формулы $\alpha(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_k)$, построенной из переменных $x_1,\dots,x_n$ и метапеременных (или параметров) $p_1,\dots,p_k$, такой набор формул $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, при котором $\alpha(\gamma_1,\dots,\gamma_n,p_1,\dots,p_k)\in\lambda$.

Определение 1.1. *Логическим уравнением для алгебраической логики* λ называется выражение

$$\alpha(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_k)=\beta(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_k),$$

где $\alpha(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_k)$ и $\beta(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_k)$ — формулы языка L, построенные из переменных $x_1,\dots,x_n$ и метапеременных (или параметров) $p_1,\dots,p_k$. *Решением* этого уравнения называется набор формул $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, при котором

$$\alpha(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_k)=\beta(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_k)\in\lambda.$$

Определение 1.2. *Правилом вывода с метапеременными в языке* L называется выражение

$$\mathbf{r}:=\frac{\alpha_1(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_m),\dots,\alpha_k(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_m)}{\beta(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_m)},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (грант 14G254).

где

$$\alpha_1(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_m),\dots,\alpha_k(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_m),\ \beta(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_m)$$

— формулы языка L, построенные из переменных $x_1,\dots,x_n$ и метапеременных (параметров) $p_1,\dots,p_k$. Правило вывода с метапеременными называется *допустимым* в логике λ тогда и только тогда, когда для любого набора формул $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ если $\alpha_1(\gamma_1,\dots,\gamma_n,p_1,\dots,p_k)\in\lambda,\dots,\alpha_m(\gamma_1,\dots,\gamma_n,p_1,\dots,p_k)\in\lambda$, то $\beta(\gamma_1,\dots,\gamma_n,p_1,\dots,p_k)\in\lambda$.

Исследования допустимости правил вывода с метапеременными в модальных транзитивных логиках и интуиционистских логиках активно проводились В. В. Рыбаковым (см. [1–3] и др). Было показано, что решение проблемы подстановок или определение разрешимости логических уравнений в свободных псевдобулевых, модальных (и топобулевых) алгебрах равносильно проверке на допустимость правил вывода с метапеременными в соответствующих логиках (см. лемму 2.5). В. Р. Кияткин доказал разрешимость для правил вывода с метапеременными в предтабличных модальных логиках (см., например, [4]).

Модальная логика $S4.\alpha_N$ образована добавлением к логике Льюиса $S4$ аксиомы α_N:

$$\bigwedge_{0\le i\le n}\Diamond\Box p_i\to\bigvee_{0\le i<j\le n}\Diamond\Box(p_i\wedge p_j).$$

Логика $S4.\alpha_N$ финитно аппроксимируема по Крипке классом всех транзитивных рефлексивных фреймов, имеющих не более N максимальных сгустков, и при $N=1$ совпадает с логикой $S4.1$. Логика $S4.\alpha_N$ не обладает ни свойством ветвления ниже m, ни обобщенным свойством ветвления ниже m, ни дизъюнктивным свойством, поэтому известные критерии разрешимости по допустимости для правил вывода с метапеременными были к ней непосредственно неприменимы [1–3]. Ранее [5] автором было показано, что логика $S4.\alpha_N$ разрешима по допустимости для обычных правил вывода, но для правил вывода, допускающих метапеременные, проблема оставалась открытой.

2. Предварительные сведения

Основные понятия, определения и теоремы изложены, например, в [2–5]. Здесь приведем необходимые для доказательств теоремы и построения.

Пусть $\mathscr{F}=\langle W,R\rangle$ — транзитивный фрейм. *Сгустком* (или *кластером*) *фрейма* $\mathscr{F}$ называется непустое подмножество $C\in W$, для которого справедливы тождества

$$\forall a,b\in C\ (aRb)\&(bRa),\quad \forall a\in C\,\forall c\in W\ (aRc)\&(cRa)\ \Rightarrow\ (c\in C)$$

либо которое состоит из одного иррефлексивного элемента $C=\{a\}$, называемого *вырожденным сгустком.* Через $C(a)$ обозначим сгусток, содержащий элемент a. Сгусток C_1 *видит* (*достигает*) сгусток C_2 во фрейме $\mathscr{F}$, если между некоторыми элементами этих сгустков $a\in C_1$, $b\in C_2$ во фрейме $\mathscr{F}$ также справедливо отношение «видимости»: aRb. Как и для элементов фреймов, это отношение будем записывать следующим образом: C_1RC_2. Сгусток C_1 называем *непосредственным R-предшественником* сгустка C_2, если C_1RC_2 и выполняется тождество $\forall C((C\ne C_1)\&(C_1RC)\&(CRC_2)\Rightarrow(C=C_2))$. В этом случае сгусток C_2 называем *непосредственным R-последователем* (*R-потомком*) сгустка C_1. *Цепью сгустков* фрейма $\mathscr{F}$ будем называть множество сгустков

A, если для любых его двух сгустков $C_1, C_2 \in A$ во фрейме $\mathscr{F}$ выполняется либо отношение $C_1 R C_2$, либо отношение $C_2 R C_1$. Количество сгустков в цепи A будем называть ее *длиной*. *Антицепью сгустков* фрейма $\mathscr{F}$ называем множество сгустков A, попарно R-несравнимых во фрейме $\mathscr{F}$, т. е. для любых двух сгустков $C_1, C_2 \in A$ во фрейме $\mathscr{F}$ выполняется условие $\neg(C_1 R C_2) \& \neg(C_2 R C_1)$. Элемент a фрейма $\mathscr{F}$ имеет глубину n, если n — максимальная длина некоторой цепи во фрейме $\mathscr{F}$, начинающейся со сгустка $C(a)$. *Слоем глубины* n фрейма $\mathscr{F}$ будем называть множество всех элементов фрейма $\mathscr{F}$ глубиной n и обозначать его через $\mathrm{Sl}_n(\mathscr{F})$. Сгустки фрейма $\mathscr{F}$, входящие в верхний слой $\mathrm{Sl}_1(\mathscr{F})$, будем называть также максимальными в $\mathscr{F}$. Множество всех элементов фрейма $\mathscr{F}$ глубиной не больше n будем обозначать следующим образом: $S_n(\mathscr{F})$.

Фрейм $\mathscr{F}$ будем называть *корневым*, если существует элемент $a \in \mathscr{F}$, для которого справедливо тождество $\forall b \in \mathscr{F}\ aRb$, в этом случае сгусток $C(a)$ называем *корнем данного фрейма*. Фрейм $\mathscr{F} = \langle W, R \rangle$ является прямой суммой семейства фреймов $\{\mathscr{F}_i \mid i \in I,\ \mathscr{F}_i = \langle W_i, R_i \rangle\}$, если выполняется тождество $\forall i \neq j\ W_i \cap W_j = \varnothing$, а множество W и отношение R определены следующим образом: $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ и $R = \bigcup_{i \in I} R_i$. Обозначать прямую сумму будем так: $\mathscr{F} = \bigsqcup_{i \in I} \mathscr{F}_i$. Определим важное в дальнейшем множество $Y^{R\leq} = \{x \mid x \in W,\ \exists y \in Y,\ yRx\}$. Сгусток C будем называть *конакрытием для антицепи сгустков* A из $\mathscr{F}$, если выполняется условие $C^{R<} = \bigcup_{C_1 \in A} \big(C_1^{R<} \cup C_1\big)$. Фрейм $\mathscr{F}_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ называется *подфреймом* (*открытым подпространством*) фрейма $\mathscr{F}_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$, если $W_1 \subseteq W_2$, $R_1 = (W_1 \times W_1) \cap R_2$ и выполняется тождество $\forall a \in W_1, \forall b \in W_2\ aR_2 b \Rightarrow b \in W_1$, такое отношение будем обозначать следующим образом: $\mathscr{F}_1 \sqsubseteq \mathscr{F}_2$. Аналогично модель $\mathscr{M}_1 = \langle W_1, R_1, S_1 \rangle$ называется *открытой подмоделью* модели $\mathscr{M}_2 = \langle W_2, R_2, S_2 \rangle$, если фрейм $\langle W_1, R_1 \rangle$ является подфреймом фрейма $\langle W_2, R_2 \rangle$ и выполняется тождество $\forall x \in \mathrm{dom}(S_1)\, \forall a \in \mathrm{dom}(W_1)\ a \in S_1(x) \Rightarrow a \in S_2(x)$.

Определение 2.1 [3]. Модель Крипке $\mathscr{K}_n$ называется *n-характеристической для нормальной модальной логики* λ, если область определения означивания V из $\mathscr{K}_n$ есть множество $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ пропозициональных букв и для любой формулы α, построенной из этих букв, выполняется условие $\alpha \in \lambda \Longleftrightarrow \mathscr{K}_n \Vdash \alpha$.

Теорема 2.2 [3]. *Каждый элемент модели $\mathrm{Ch}_{K4}(n)$ является формульным. В частности, для любой нормальной транзитивной модальной логики λ каждый элемент модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$ является формульным.*

Построение n-характеристической модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n)$, определение и свойства p-морфного отображения приведены, например, в [3, 5].

Теорема 2.3 [3]. *Пусть $\mathscr{K}_n = \langle W_n, R_n, V_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность n-характеристических моделей для модальной или суперинтуиционистской логики λ. Правило вывода $\mathbf{r} := \alpha_1, \dots, \alpha_s/\beta$ с k переменными и n метапеременными является допустимым в логике λ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие. Для каждого значения $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq n)$ и каждого означивания S переменных и метапеременных правила $\mathbf{r}$ в модели $\mathscr{K}_m$ такого, что*

(i) *для каждой переменной x из $\mathbf{r}$ множество $S(x)$ является формульным в $\mathscr{K}_m$,*

(ii) *для каждой метапеременной p из $\mathbf{r}$ выполняется равенство $S(x) = V(x)$, где V — означивание модели $\mathscr{K}_m$,* *справедливо утверждение: если $S(\alpha_1) = |\mathscr{K}_m|, \ldots, S(\alpha_s) = |\mathscr{K}_m|$, то $S(\beta) = |\mathscr{K}_m|$.*

Лемма 2.4 [3]. *Пусть λ — финитно аппроксимируемая модальная логика, расширяющая $K4$, или суперинтуиционистская логика. Пусть правило вывода $\mathbf{r} := \alpha_1, \ldots, \alpha_m/\beta$ содержит n переменных и k метапеременных и на фрейме некоторой s-характеристической модели $\mathrm{Ch}_\lambda(s)$ $(s \geq k)$ существует означивание S для переменных и метапеременных правила $\mathbf{r}$. При этом означивание S опровергает $\mathbf{r}$ и совпадает с начальным означиванием модели $\mathrm{Ch}_\lambda(p)$ для метапеременных. Тогда существует такое означивание S_1 этих переменных во фрейме модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n+k)$, которое опровергает правило $\mathbf{r}$ и также совпадает с начальным означиванием модели $\mathrm{Ch}_\lambda(n+k)$ для метапеременных.*

Лемма 2.5 [3]. *Пусть λ — алгебраическая логика, δ — формула без переменных (например, $\delta = \bot$), но $\delta \notin \lambda$. Логическое уравнение*

$$\alpha_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m) \equiv \beta(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m)$$

имеет решение $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ в λ тогда и только тогда, когда правило с метапеременными

$$\mathbf{r} = \frac{\alpha_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m) \equiv \beta(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m)}{\delta}$$

не является допустимым в λ и формулы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ являются препятствием для правила r.

Теорема 2.6 [3]. *Правило вывода с метапеременными*

$$\mathbf{r} := \frac{\alpha_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m), \ldots, \alpha_k(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m)}{\beta(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m)}$$

допустимо в алгебраической логике λ тогда и только тогда, когда квазитождество

$$q(\mathbf{r}) := \big(\alpha_1 = \top, \ldots, \alpha_k = \top \Longrightarrow \beta = \top\big)$$

истинно на свободной алгебре счетного ранга $\mathscr{F}_\lambda(\omega)$ из многообразия $\mathrm{Var}(\lambda)$ при любом означивании, которое интерпретирует $p_1, \ldots, p_m$ как свободные порождающие для $\mathscr{F}_\lambda(\omega)$.

Теорема 2.7 [3]. *Пусть λ — алгебраическая логика. Любое квазитождество $q := \big(g_1 = f_1, \ldots, g_k = f_k \Longrightarrow g = f\big)$ в сигнатуре $\mathscr{F}_\lambda(\omega)$, обогащенной константами p_i для свободных порождающих, истинно в $\mathrm{Var}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда все правила вывода с метапеременными p_i вида*

$$r(q) := \frac{(g_1 \equiv f_1), \ldots, (g_k \equiv f_k)}{g \equiv f}$$

допустимы в λ.

Определение 2.8 [3]. Пусть λ — финитно аппроксимируемая модальная логика, расширяющая логику $K4$, или суперинтуиционистская логика. Будем говорить, что логика λ *обладает эффективным свойством опускания точек ниже m* (*m-drop points*), если существует эффективно вычислимая (а именно рекурсивная) функция $g(x, y)$, для которой справедливо приведенное ниже утверждение. Пусть Y — конечное множество формул, замкнутое по отношению к взятию подформул, и $\mathscr{W} = \langle W, R, V\rangle$ — конечная λ-модель, удовлетворяющая условиям:

(a) область определения означивания V включает все пропозициональные буквы, входящие в формулы множества Y;

(b) каждый сгусток модели $\mathscr{W}$ содержит не более 2^n элементов, где n — число пропозициональных букв во всех формулах множества Y.

Тогда существуют модель $\mathscr{M}$, содержащая подмодель $\max(Y, \mathscr{W}, m) \cup S_m(\mathscr{W})$, и гомоморфизм f (или p-морфизм) модели $\mathscr{M}$ на конечную λ-модель $\mathscr{M}_1$, для которых справедливы следующие утверждения:

(i) модель $\mathscr{M}_1$ содержит не более $g(u, v)$ элементов, где u — число элементов модели $S_m(\mathscr{W})$, v — число формул множества Y;

(ii) для любой формулы α из множества Y и любого элемента $x \in |\mathscr{M}|$ справедливо утверждение: $x \Vdash_V \alpha$ в модели $\mathscr{M}$ (или в модели $\mathscr{W}$) $\iff$ $f(x) \Vdash_V \alpha$ в модели $\mathscr{M}_1$;

(iii) сужение гомоморфизма f на модель $S_m(\mathscr{W})$ является изоморфизмом, и гомоморфизм f не отождествляет элемент глубиной строго больше чем m с элементом глубиной не более m.

Лемма 2.9 [5]. *Модальная логика $S4.\alpha_N$ обладает эффективным свойством опускания точек ниже m.*

Для модальных логик, расширяющих логику $S4$, рассмотрим также обобщение свойства обозрения [3].

Определение 2.10. Будем говорить, что модель $\mathscr{M} = \bigsqcup_{j \in J} \mathscr{M}_j$ *обладает полным свойством обозрения* для множества формул Y и множества переменных Q ниже m в логике λ, если выполняется следующее утверждение. Пусть F — открытый порожденный подфрейм компоненты $\mathscr{M}_j$ глубиной не менее m и фрейм, образованный добавлением рефлексивного элемента — конакрытия к антицепи всех минимальных сгустков F, является λ-фреймом. Тогда для любого подмножества $Z \subseteq Q$ существует элемент x_{EZ} в модели $\mathscr{M}_j$ глубиной не менее m такой, что

$$S(x_{EZ}, Y) \cap Q = Z, \quad \Diamond(x_{EZ}, Y) = \bigcup_{y \in |F|} S(y, Y) \cup \bigcup_{y \in C(x_{EZ})} S(y, Y).$$

Пусть модель $\mathscr{M}$ основана на рефлексивном и транзитивном фрейме, но не имеет бесконечно возрастающих цепей. Мы потребуем также, чтобы в любом сгустке модели $\mathscr{M}$ не было двух элементов с одинаковым означиванием пропозициональных переменных, а среди максимальных сгустков модели $\mathscr{M}$ — двух различных изоморфных как модели сгустков. Пусть $\{p_1, \ldots, p_k\} = \mathrm{Dom}(V)$ — переменные и метапеременные правила $\mathbf{r}$ из области означивания модели $\mathscr{M}$. Рассмотрим класс формул

$$\Omega(\mathscr{M}) := \{\varphi(C_1, \ldots, C_f) \mid C_k \in \mathrm{Sl}_1(\mathscr{M})\},$$

где

$$\varphi(C_1, \ldots, C_f) = \Big(\bigwedge_{C_i \in \{C_1, \ldots, C_f\}} \rho(C_i)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{C_j \notin \{C_1, \ldots, C_f\}} \neg\rho(C_j)\Big),$$

$$\rho(C) = \Diamond\Box\Big(\bigwedge_{a \in C} \Box\Diamond\gamma(a)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{b \notin C, \forall a \in C\, \gamma(b) \neq \gamma(a)} \neg\Diamond\gamma(b)\Big),$$

$$\gamma(a) = \Big(\bigwedge_{a \Vdash_v p_i} p_i\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{a \nVdash_v p_j} \neg p_j\Big).$$

Нетрудно заметить, что

$$\forall a \in |\mathscr{M}|\, \forall C_i \in S_1(\mathscr{M}) \quad a \Vdash_V \rho(C_i) \iff$$
$$C_i \in S_1(C(a)^{R\leq}) \text{ и } a \Vdash_V \varphi(C_1, \dots, C_f) \iff \{C_1, \dots, C_f\} = S_1(C(a)^{R\leq}).$$

Отметим, что класс $\Omega(\mathscr{M})$ конечен и эффективно конструируется для каждой модели $\mathscr{M}$ с конечным числом переменных из области означивания $\mathrm{Dom}(V)$.

3. Основные результаты

С помощью класса $\Omega(\mathscr{M})$ выведен следующий критерий допустимости правил вывода с метапеременными.

Теорема 3.1. *Правило вывода с метапеременными*

$$\mathbf{r} := \frac{\alpha_1(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_m), \dots, \alpha_k(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_m)}{\beta(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_m)}$$

недопустимо в модальной логике $S4.\alpha_N$ тогда и только тогда, когда существует модель Крипке $\mathscr{M} = \bigsqcup_{j \in J} \mathscr{M}_j$ с означиванием S для переменных и метапеременных правила вывода $\mathbf{r}$, обладающая следующими свойствами:

(a) *модель $\mathscr{M}$ является $S4.\alpha_N$-моделью, модель $S_1(\mathscr{M})$ изоморфна модели $S_1(\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m))$;*

(b) *модель $\mathscr{M}$ содержит не более $g(l,q) \cdot (2^{2^{(n+m)}})$ элементов, $l = S_1(\mathrm{Ch}_{S4}(n+m))$, $q = \|\mathrm{Sub}(\mathbf{r})\| + \|\Omega(\mathscr{M})\|$, где $\mathrm{Sub}(\mathbf{r})$ — множество подформул правила вывода $\mathbf{r}$, замкнутое по взятию отрицания к подформулам, $g(l,q)$ — функция, определяемая формулой* (1) [5]*;*

(c) *модель $\mathscr{M}$ обладает полным свойством обозрения ниже* 1 *для множеств $Y = \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})$ и $\{p_1, \dots, p_m\}$;*

(d) *каждая модель $\mathscr{M}_j$ — открытая подмодель модели $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m)$;*

(e) *модель $\mathscr{M}$ опровергает правило вывода $\mathbf{r}$.*

Доказательство. Необходимость. Если правило r недопустимо в логике $S4.\alpha_N$, то по теореме 2.3 для фрейма l-характеристической модели $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(l)$, $(l \geq m)$ существует опровергающее правило $\mathbf{r}$ означивание W, формульное для переменных $x_1, \dots, x_n$ и совпадающее с означиванием модели $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(l)$ для метапеременных $p_1, \dots, p_m$. Тогда по лемме 2.4 на фрейме модели $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m)$ найдется означивание W_2 с теми же свойствами. Согласно [5] $(n+m)$-характеристическая модель может быть представлена в виде

$$\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m) = \bigsqcup_{j \in J} \mathscr{H}_j, \text{ где } \|J\| \leq 2^{2^{n+m}}.$$

Выделим в каждой компоненте $\mathscr{H}_j$ конечную подмодель $\mathscr{K}_j$ следующим образом: для каждого подмножества $Z \subseteq \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m))$ выделяем не лежащий в максимальном сгустке элемент x_Z так, чтобы $S(x_Z, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m))) = Z$ (если такой элемент в модели $\mathscr{H}_j$ найдется). Тогда модель $\mathscr{K}_j = \bigcup_{Z \subseteq \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m))} x_Z^{R\leq}$ будет открытой конечной подмоделью $\mathscr{H}_j$. На модели $\mathscr{K} = \bigsqcup_{j \in J} \mathscr{K}_j$, также основанной на $S4.\alpha_N$-фрейме, правило

$\mathbf{r}$ будет ложным. По лемме 2.9 для каждой компоненты $\mathscr{K}_j$ можно построить сжимающий p-морфизм f_j из $\mathscr{K}_j$ в конечную $S4.\alpha_N$-модель $\mathscr{M}_j$. Тогда модель $\mathscr{M} = \bigsqcup\limits_{j\in J} \mathscr{M}_j$ будет удовлетворять свойствам (b) и (d). При этом верхний слой таких моделей сохраняется: $S_1(\mathscr{M}) = S_1(\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N})$. Поэтому свойство (a) для модели $\mathscr{M}$ выполняется, откуда $\Omega(\mathscr{M}) = \Omega(\mathscr{K}) = \Omega(\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m))$. Поскольку при p-морфном отображении истинность формул на моделях сохраняется, то модель $\mathscr{M}$ также удовлетворяет свойству (e).

Покажем, что модель $\mathscr{M}$ обладает полным свойством обозрения ниже 1 для множеств $Y = \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})$ и $\{p_1, \dots, p_m\}$. Пусть F — произвольный конечно порожденный подфрейм фрейма компоненты $\mathscr{M}_j$, причем фрейм, образованный добавлением рефлексивного элемента — конакрытия к антицепи E всех минимальных сгустков фрейма F — является $S4.\alpha_N$-фреймом. Тогда фрейм F содержит не более N максимальных сгустков: $S_1(F) = \{C_1, \dots, C_f\}$ $(f \le N)$. Пусть U — множество элементов z, взятых по одному из каждого сгустка антицепи E, так называемых «представителей» сгустков антицепи. В модели $\mathscr{K}_j$ выделим множество прообразов $f_j^{-1}(U)$, соответствующие элементы для которых в модели $\mathscr{H}_j$ обозначим через $\mathscr{H}\big(f_j^{-1}(U)\big)$. Обозначим через $C\big(\mathscr{H}\big(f_j^{-1}(U)\big)\big)$ множество сгустков модели $\mathscr{H}_j$, содержащих элементы $\mathscr{H}\big(f_j^{-1}(U)\big)$. Фрейм $\big(f_j^{-1}(U)\big)^{R\le}$ имеет не более N максимальных сгустков в модели $\mathscr{K}_j$, тогда по свойству класса формул $\Omega(\mathscr{M})$ имеем

$$\forall x \in E \quad x \Vdash_S \Big(\bigwedge_{C_j \notin \{C_1,\dots,C_f\}} \neg\rho(C_j)\Big)\text{ю}$$

По выбору элементов вида x_Z и определению p-морфизма для любого $y \in C\big(\mathscr{H}\big(f_j^{-1}(U)\big)\big)$ получим $y \Vdash_V \big(\bigwedge\limits_{C_j \notin \{C_1,\dots,C_f\}} \neg\rho(C_j)\big)$, что влечет

$$\{C_1, \dots, C_f\} \subseteq \mathrm{Sl}_1\big(C\big(f_j^{-1}\big)^{R\le}\big), \quad f \le N,$$

и фрейм $G = \big\{C\big(\mathscr{H}\big(f_j^{-1}(U)\big)\big)\big\}^{R\le}$ имеет не более N максимальных сгустков. Пусть $R \subseteq \{Z \mid Z \subseteq \{p_1, \dots, p_m\}\}$. По построению n-характеристических моделей антицепь минимальных сгустков фрейма G в модели $\mathscr{H}_j$ имеет сгусток (конакрытие C^*), состоящий из $\|R\|$ элементов, на каждом элементе x_i которого истинны метапеременные из некоторого множества Z_i из R. Тогда для любого $x_i \in C^*$

$$\Diamond(x_i, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) = \bigcup_{y\in|F|} S(y, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cup \bigcup_{y\in C^*} S(y, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})).$$

Поскольку $C^* \notin S_1(\mathscr{M})$, по построению модели $\mathscr{K}_j$

$$\forall x_i \in C^* \ \exists v_i \in |\mathscr{K}_j| : S(v_i, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) = S(x_i, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})).$$

По свойству p-морфных отображений

$$\exists u_i \in |\mathscr{M}_j| : S(u_i, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) = S(x_i, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})),$$

т. е.

$$\{S(u_i, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M}) \cap \{p_1, \dots, p_m\}\} \cap R = Z_i,$$

$$\Diamond(u_i, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) = \bigcup_{y\in|G|} S(y, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cup \bigcup_{y\in C^*} S(y, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M}))$$

и модель $\mathscr{M}$ обладает свойством (c).

Достаточность. Пусть существует $S4.\alpha_N$-модель $\mathscr{M}$, удовлетворяющая свойствам (a)–(e). В силу этого без ограничения общности можем рассматривать модели $\mathscr{M} = \bigsqcup_{j\in J} \mathscr{M}_j$ и $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m) = \bigsqcup_{j\in J} \mathscr{H}_j$ как объединение соответствующих непересекающихся компонент. Мы можем полагать фрейм $\mathscr{M}$ подфреймом для фрейма модели $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m)$ и принимать $S_1(\mathscr{M}_j) = S_1(\mathscr{H}_j)$. По теореме 2.2 каждый элемент модели $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m)$, а значит, и модели $\mathscr{M}$ является формульным. Поэтому мы можем полагать, что означивание S модели $\mathscr{M}$ является формульным означиванием «фрагмента» модели $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m)$ и на нем эти означивания будут совпадать для метапеременных $\{p_1,\dots,p_m\}$. Распространим означивание S на всю модель $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m)$ так, чтобы правило $\mathbf{r}$ опровергалось. Для этого в каждой компоненте $\mathscr{H}_j$ введем последовательность множеств $\Sigma(x,t)$ элементов фрейма модели $\mathscr{H}_j$, $x \in |\mathscr{M}_j|$, $0 \le t \le \|\mathscr{M}_j\|$, обладающую свойствами:

(a1) $\forall x \in |\mathscr{M}_j|\ \Sigma(x,t) \subseteq \Sigma(x,t+1)$; $\forall x_i, x_k \in |\mathscr{M}_j|\ x_i \ne x_k \implies \Sigma(x_i,t) \cap \Sigma(x_k,t) = \varnothing$;

(b1) каждое подмножество $\Sigma(x,t)$ формульно при означивании V в модели $\mathscr{H}_j$:

$$\forall x \in |\mathscr{M}_j|\ \exists \alpha(x,t) \forall y \in |\mathscr{H}_j|\ y \Vdash_V \alpha(x,t) \iff y \in \Sigma(x,t);$$

(c1) множество $\bigcup_{x\in|\mathscr{M}_j|} \Sigma(x,t)$ образует открытый подфрейм фрейма модели $\mathscr{H}_j$;

(d1) для означивания S_1, определенного на фрейме модели $\bigcup_{x_i\in|\mathscr{M}_j|} \Sigma(x,t)$ любой переменной или метапеременной q правила $\mathbf{r}$:

$$S_1(q) := \bigcup \{\Sigma(x,t) \mid x_i \in |\mathscr{M}_j|, x \Vdash_{S_1} q\},$$

справедливо утверждение

$$\forall \gamma \in \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})\, \forall x_i \in |\mathscr{M}_j|\, \forall a \in \Sigma(x,t) \quad a \Vdash_{S_1} \gamma \iff x \Vdash_S \gamma;$$

(d2) для каждой метапеременной p_i правила $\mathbf{r}$ верно

$$\forall x \in |\mathscr{M}_j|\, \forall a \in \Sigma(x,t) \quad x \Vdash_S p_i \iff a \Vdash_V p_i \text{ в модели } \mathscr{H}_j;$$

(e1) $\forall y \in |\mathscr{H}_j|$ если $y \notin \bigcup_{x\in|\mathscr{M}_j|} \Sigma(x,t)$, то существует $(t+1)$-элементное подмножество $W \subseteq |\mathscr{M}_j|$ такое, что

$$\forall x \in W \quad |y^{R\le}| \cap \Sigma(x,t) \ne \varnothing.$$

Определим множества $\Sigma(x,t)$ индукцией по параметру t. Пусть $\Sigma(x,0) := \{x\}$ для всех $x \in |\mathscr{M}_j|$, тогда очевидно, что множества $\Sigma(x,0)$ обладают свойствами (a1)–(e1). Пусть для некоторого значения t при $0 \le t \le \|\mathscr{M}\|$ для любого $x \in |\mathscr{M}_j|$ множества $\Sigma(x,t)$ определены и свойства (a1)–(e1) для них доказаны. Рассмотрим все подмножества $D \subseteq |\mathscr{M}_j|$, $\|D\| = (t+1)$, из которых по крайней мере один элемент не находится в верхнем слое $\mathscr{M}_j$, но фрейм $D^{R\le}$ имеет не более N максимальных сгустков. Для каждого множества D выделим антицепи E из $\mathscr{H}_j$ такие, что

$$\bigcup_{y\in E} \Diamond(y, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) = \bigcup_{y\in D} \Diamond(y, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})).$$

По свойству класса формул $\Omega(\mathscr{M})$ фрейм $E^{R\leq}$ также является $S4.\alpha_N$-фреймом. Возьмем произвольное множество $R \subseteq \{Z \mid Z{\subseteq}\{p_1, \dots, p_m\}\}$. По свойству (c) (см. определение 2.10) на модели $\mathscr{M}_j$ найдется элемент x_{EZR}:

$$S(x_{EZR}, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cap \{p_1, \dots, p_m\} = Z, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\diamondsuit(x_{EZR}, &\mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \\ &= \bigcup_{y \in E} \diamondsuit(y, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cup \bigcup_{Z_1 \in R} S(x_{EZ_1R}, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})),\end{aligned}$$

где можем полагать $\forall Z_1 \in R \quad x_{EZ_1R} \in C(x_{EZR})$.

Выделим все такие элементы x_{EZR} для R. Введем формулы

$$\begin{gathered} q(D) = \bigwedge_{x \in D} \diamondsuit\alpha(x,t) \wedge \bigwedge_{x \notin D, x \in |\mathscr{M}_j|} \neg\diamondsuit\alpha(x,t) \wedge \neg\Big(\bigvee_{x \notin D, x \in \mathscr{M}_j} \alpha(x,t)\Big), \\ p(Z) = \bigwedge_{p_i \in Z} p_i \vee \bigwedge_{p_i \in \{p_1,\dots,p_m\}/Z} \neg p_i. \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим дополнительное свойство:

(f1) для множества D существует элемент $g \in D$, для которого

$$\diamondsuit(g, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) = \bigcup_{x \in D} \diamondsuit(x, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})).$$

Если свойство (f1) не выполняется, то для заданных множеств D, E, R ($R \neq \varnothing$) и всех множеств $Z \in D$ выделим все подходящие элементы x_{EZR} из $\mathscr{M}_j$. Определим

$$\chi_1(D,Z,R) = p(Z) \wedge q(D) \wedge \bigwedge_{Z_1 \in R} \diamondsuit(p(Z_1) \wedge q(D) \wedge \delta(R,D)) \wedge \beta(R,D),$$

где

$$\delta(R,D) = \bigwedge_{Z_1 \in R} \diamondsuit(p(Z_1) \wedge q(D)),$$

$$\beta(R,D) = \Box\Big(q(D) \to \bigvee_{Z_1 \in R} \Big(p(Z_1) \wedge \bigwedge_{Z_2 \in R} \diamondsuit(p(Z_2) \wedge q(D) \wedge \delta(R,Z))\Big)\Big).$$

Если же свойство (f1) выполняется, то рассмотрим множество

$$\begin{aligned}P(D) = \{S(x, &\mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cap \{p_1, \dots, p_m\} \mid x \in D, \\ &x \text{ удовлетворяет свойству (f1)}\}.\end{aligned}$$

Для D выделим подмножество $G(D) \subseteq D$, которое состоит из некоторых элементов, удовлетворяющих условию (f1) для этого множества D, причем $\|G(D)\| = \|P(D)\|$ и $P(G(D)) = P(D)$, где $P(G(D)) = \{S(g, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cap \{p_1, \dots, p_m\} \mid g \in G(D)\}$. Аналогично введем формулы для произвольного $Z \in P(G(D))$ и $g \in G(D)$, для которого $S(g, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cap \{p_1, \dots, p_m\} = Z$:

$$\Psi(D,Z,g) = p(Z) \wedge q(D) \wedge \Box\Big(q(D) \to \bigwedge_{Z_1 \in P(G(D))} p(Z_1)\Big).$$

Пусть для множеств D, E, R ($R \neq \varnothing$) существуют элементы x_{EZR} и найдется такое $Z_1 \in R$, что $Z_1 \notin P(G(D))$. Тогда определим формулу

$$\chi_2(D,Z,R) = p(Z) \wedge q(D) \wedge \bigwedge_{Z_1 \in R} \diamondsuit(p(Z_1) \wedge q(D) \wedge \delta(R,D)) \wedge \beta_1(R,D),$$

где

$$\beta_1(R,D)=\Box\Big(q(D)\to\bigvee_{Z_1\in R}\Big(p(Z_1)\wedge\bigwedge_{Z_2\in R}\Diamond(p(Z_2)\wedge q(D)\wedge\delta(R,Z))\Big)\Big)\vee\Theta,$$

$$\Theta=\bigvee\{\Psi(D,Z,g)\mid Z\in R, g\in G(D): S(g,\mathrm{Sub}(\mathbf{r})\cup\Omega(\mathscr{M}))\cap\{p_1,\dots,p_m\}=Z\}.$$

Если же такие формулы для заданных множеств D, Z, R ввести нельзя, то также полагаем их определенными, но эквивалентными $\perp$. Тогда определим множество $\Sigma(x,t+1)$ для $x\in|\mathscr{M}_j|$ следующим образом:

$$\Sigma(x,t+1)=V(\alpha(x,t+1)),$$

где

$$\alpha(x,t+1)=\alpha(x,t)\vee\Big(\bigvee_{x_{EZR}=x}(\chi_1(D,Z,R)\wedge\chi_2(D,Z,R))\vee\bigvee_{D,Z}\Psi(D,Z,g)\Big). \quad (3)$$

Множества $\Sigma(x,t+1)$ также удовлетворяют свойствам (a1)–(e1). Доказательство свойств (a1)–(d2) достаточно очевидно и полностью определяется свойствами формул $\chi_1(D,Z,R)$, $\chi_2(D,Z,R)$ и $\Psi(D,Z,g)$. Докажем свойство (e1). Пусть $y\in\mathscr{H}_j$, но

$$y\notin\bigcup_{x\in\mathscr{M}_j}\Sigma(x,t+1). \quad (4)$$

Тогда по свойству (a1) $y\notin\bigcup\limits_{x\in\mathscr{M}_j}\Sigma(x,t)$. По индуктивному предположению свойства (e1) существует $(t+1)$-элементное множество $D\subseteq|\mathscr{M}_j|$ такое, что

$$\forall x\in D\quad |y^{R\leq}|\cap\Sigma(x,t)\neq\varnothing.$$

Если существует элемент $x_y\in|\mathscr{M}_j|/D$, для которого

$$|x_y^{R\leq}|\cap\Sigma(x,t+1)\neq\varnothing, \quad (5)$$

то положим $W=D\cup\{x_y\}$ и свойство (e1) выполняется для $\Sigma(x,t+1)$. Допустим, что такого элемента нет. Мы можем полагать, что y — максимальный элемент с такими свойствами. Из (2) получим $y\Vdash_V q(D)$. Пусть $v\in|y^{R\leq}|$ и $v\notin\bigcup\limits_{x\in\mathscr{M}_j}\Sigma(x,t)$. Тогда по (2) имеем $v\Vdash_V q(D)$. Отметим, что по свойству класса формул $\Omega(\mathscr{M})$ элементы множества $\Sigma(x,t)$ могут «достигать» в модели $\mathscr{H}_j$ только тех максимальных сгустков, что и элемент x в модели $\mathscr{M}_j$, и фрейм $D^{R\leq}$ будет иметь не более N максимальных сгустков. Пусть E — антицепь представителей минимальных сгустков фрейма $D^{R\leq}$. Тогда для любых множеств $R\subseteq\{Z\mid Z\subseteq\{p_1,\dots,p_m\}\}$ и любого $Z\subseteq R$ найдутся элементы x_{EZR}, удовлетворяющие условию (1) по элементу v.

Если допустить, что свойство (f1) для D не выполняется, то $v\Vdash_v\chi(D,Z,R)$ для некоторых Z, R. Но тогда $v\in\Sigma(x_{EZR},t+1)$ по (3) и определению множества $\Sigma(x,t+1)$. По условию $v\notin D$, следовательно, $y\in|v^{R\leq}|$ и $y\in C(v)$, что противоречит нашему предположению.

Допустим теперь, что свойство (f1) для D выполняется. Из (4) и (3) следует, что $y\nVdash_v(D,Z,G)$ для всех Z и g. Следовательно, найдется такой элемент z, «достигаемый» из y, что $z\Vdash_V q(D)$, $z\Vdash_V p(Z_1)$, где $Z_1\notin P(G(D))$. Рассмотрим максимальный элемент z с такими свойствами. По свойству (c) найдется элемент x_{ERZ}, удовлетворяющий условию (1) для множества

$$R:=\{S(h,\mathrm{Sub}(\mathbf{r})\cup\Omega(\mathscr{M}))\cap\{p_1,\dots,p_m\}\mid h\in G(D)\}$$

и любого множества $Z \in R$. Очевидно, $z \Vdash_V \chi_2(D, Z_1, R)$ и $z \in \Sigma(x_{ERZ}, t+1)$.

Если $x_{ERZ} \notin D$, то yRz, что противоречит условию выбора элемента y, нашему предположению и (5). Если же $x_{ERZ} \in D$, то x_{ERZ} удовлетворяет условию (f1). Поэтому из (1) получим

$$S(x_{ERZ}, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cap \{p_1, \dots, p_m\} \in P(G(D)).$$

Но тогда по свойству (d2) вновь придем к противоречию: $Z_1 \in P(G(D))$. Следовательно, множества вида $\Sigma(x, t+1)$ обладают свойством (e1).

Докажем, что множества $\Sigma(x, t)$, $1 \leq t \leq t_1$ ($t_1 = \|\mathscr{M}_j\|$), включают в себя все элементы фрейма модели $\mathscr{M}_j$. Для этого достаточно показать, что если элемент $y \in |\mathscr{H}_j|$ не вошел ни в одно из множеств вида $\Sigma(x, t_1 - 1)$, то он будет включен в некоторое множество вида $\Sigma(x, t_1)$. Пусть $y \notin \bigcup\limits_{x \in \mathscr{M}_j} \Sigma(x, t_1 - 1)$, тогда по свойству (e1) и формуле (2) для некоторого D будет $y \Vdash_V q(D)$. Предположим, что $y \notin \bigcup\limits_{x \in \mathscr{M}_j} \Sigma(x, t_1)$. Рассмотрим такой максимальный элемент y. Рассмотрим все элементы v такие, что $v \notin \bigcup\limits_{x \in \mathscr{M}_j} \Sigma(x, t_1 - 1)$, но $v \in |y^{R\leq}|$. Для любых множеств $R \subseteq \{Z \mid Z \subseteq \{p_1, \dots, p_m\}\}$ и $Z \subseteq R$ найдутся элементы $x_{EZR} \in |\mathscr{M}_j|$, удовлетворяющие условию (1) по элементу v. Если бы условие (f1) не выполнялось для всего $D = |\mathscr{M}_j|$, то элементы x_{EZR} не принадлежали бы $\mathscr{M}_j$. Поэтому условие (f1) выполняется и для таких v существуют элементы $x_{EZR} \in |\mathscr{M}_j|$:

$$\begin{aligned} S(x_{EZR}, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cap \{p_1, \dots, p_m\} \\ = S(v, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cap \{p_1, \dots, p_m\} = Z \in P(G(\mathscr{M}_j)), \end{aligned}$$

$$R = \{S(u, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cap \{p_1, \dots, p_m\} \mid u \in C(v)\}.$$

Следовательно, $v \Vdash_V p(Z)$ для некоторого $Z \in P(G(\mathscr{M}_j))$, и для некоторого $g \in G(\mathscr{M}_j)$ справедливо $S(g, \mathrm{Sub}(\mathbf{r}) \cup \Omega(\mathscr{M})) \cap \{p_1, \dots, p_m\} = Z$. Поэтому $y \Vdash_V \Psi(D, Z, g)$ и $y \in \Sigma(g, t_1)$.

Описанную выше процедуру «распространения» означивания проводим для каждой компоненты $\mathscr{H}_j$. Полученные означивания S_j будут формульными для переменных x_i правила вывода $\mathbf{r}$: $S_j(x_i) = V_j(\gamma_{ji})$. Для каждой компоненты $\mathscr{H}_j$ существует формула $\delta_j = \varphi(C_1, \dots, C_f)$, где $S_1(\mathscr{H}_j) = \{C_1, \dots, C_f\}$, истинная только на ее элементах. Тогда мы получим для всей модели $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m)$ означивание S, формульное для переменных x_i правила $\mathbf{r}$ и совпадающее с оригинальным означиванием модели $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m)$ для метапеременных p_i правила $\mathbf{r}$:

$$S(x_i) := V\Big(\bigvee_{j \in J} \gamma_{ji} \wedge \delta_j\Big), \quad S(p_i) := V(p_i).$$

По свойству (d1) означивание S опровергает правило $\mathbf{r}$, и по теореме 2.3 правило $\mathbf{r}$ не является допустимым в логике $\mathrm{Ch}_{S4.\alpha_N}(n+m)$. $\square$

Из этой теоремы, леммы 2.5 и теорем 2.6, 2.7 непосредственно вытекают

Следствие 3.2. *Существует алгоритм, позволяющий определить разрешимость логических уравнений в модальной логике $S4.\alpha_N$, который строит конечное решение для разрешимых уравнений.*

Следствие 3.3. *Квазиэквациональная теория свободной модальной алгебры $\mathscr{F}_{S4.\alpha_N}(\omega)$ в сигнатуре, обогащенной константами для свободных порождающих, разрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыбаков В. В.* Уравнения в свободной топобулевой алгебре и проблема подстановки // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 3. С. 554–557.
2. *Rybakov V. V.* Logical equations and admissible rules of inference with parameters in modal provability logics // Studia Logica. 1990. V. 49, N 2. P. 215–239.
3. *Rybakov V. V.* Admissibility of logical inference rules. North-Holland; New York; Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1997.
4. *Кияткин В. Р.* Правила вывода с метапеременными и логические уравнения в предтабличной модальной логике $PM1$ // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 88–97.
5. *Rutskiy A. N.* Decidability of modal logics $S4 \oplus \alpha_N$, $S4 \oplus \xi_{N+1}$ w.r.t. admissible inference rules // Bull. Sect. Logic. 2001. V. 30, N 4. P. 181–189.

Статья поступила 14 февраля 2005 г.

Руцкий Алексей Николаевич
Красноярский гос. педагогический университет им. В. П. Астафьева,
факультет математики и информатики,
ул. А. Лебедевой, 89, Красноярск 660049
rootskey@land.ru