Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 517.55

КРАТНЫЕ РЯДЫ ЛОРАНА И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. К. Лейнартас

Аннотация: На основе понятия фундаментального решения получено решение задачи Коши для однородного многомерного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: кратный ряд Лорана, многомерное разностное уравнение.

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество целых чисел и через $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ — n-мерную целочисленную решетку. Пусть $\mathbb{Z}^n_+$ — подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами, и $A = \{\alpha\} \subset \mathbb{Z}^n_+$ — некоторое фиксированное конечное множество таких точек.

Разностным уравнением (относительно неизвестной функции $f : \mathbb{Z}^n_+ \to \mathbb{C}$) назовем соотношение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x+\alpha) = 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{1}$$

где c_α — (постоянные) коэффициенты уравнения.

Характеристическим многочленом для разностного уравнения (1) назовем многочлен $\sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha =: P(z)$, где $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, а $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Характеристическим множеством для разностного уравнения (1) назовем множество $V = \{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\}$ нулей характеристического многочлена.

Для $n = 1$ известно (см., например, [1]), что всякое решение уравнения (1) является линейной комбинацией решений вида $x^s \lambda^x$, $s = 0, \dots, k-1$, где $\lambda \in V$ — корень характеристического многочлена кратности k. Следовательно, пространство решений уравнения (1) конечномерно, и его размерность равна степени m характеристического многочлена P (порядку уравнения).

Кроме того, очевидно, что всякое решение уравнения (1) полностью определяется своими значениями $f(x) = \phi_x$ в «начальных» точках $x = 0, 1, \dots, m-1$.

Для $n > 1$ ситуация значительно сложнее, так как пространство решений бесконечномерно и вопрос о множестве, на котором следует задавать «начальные» значения решений, представляется не столь очевидным (так же, как и вопрос от том, что считать порядком разностного уравнения). Отметим, что многомерные разностные уравнения (рекуррентные соотношения) возникают в комбинаторном анализе [2], а также при дискретизации дифференциальных уравнений (см., например, [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00517).

© 2007 Лейнартас Е. К.

В [4] дано описание пространства решений уравнения (1) с использованием таких понятий, как многогранник Ньютона и амеба характеристического многочлена. В данной работе определяется множество $\mathbb{Z}^n_m$, на котором задаются «начальные» значения, формулируется задача Коши для уравнения (1) и с учетом понятия фундаментального решения дается решение этой задачи.

Многогранником Ньютона N_P характеристического многочлена $P(z)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества A.

Фиксируем $m \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$ и обозначим $\mathbb{Z}^n_{m_j} = \{y \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq y_j < m_j\}$. Далее, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathbb{Z}^n_{m_j} =: \mathbb{Z}^n_m$, и пусть $\phi : \mathbb{Z}^n_m \to \mathbb{C}$ — заданная функция.

Задача. *Найти решение уравнения* (1), *совпадающее на* $\mathbb{Z}^n_m$ *с функцией* ϕ:

$$f(x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{Z}^n_m. \tag{2}$$

Отметим, что не для всякого $m \in \mathbb{Z}^n \cap N_P$ задача (1), (2) будет иметь единственное решение, например, для $n = 1$ это будет только при $m = \deg P$. Приведем пример для $n = 2$. Пусть уравнение имеет вид $f(x_1+2, x_2)+f(x_1, x_2+2) = 0$, тогда $P(z) = z_1^2 + z_2^2$, $N_P \cap \mathbb{Z}^2 = \{(2;0), (1;1), (0;2)\}$ и для $m = (1, 1)$ и начальных данных $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$ имеется решение задачи (1), (2), не равное тождественно нулю в $\mathbb{Z}^n_+$:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 = x_2 = 1, \\ 0 & \text{для остальных } (x_1, x_2). \end{cases}$$

Решение $\mathscr{P}(x)$ разностного уравнения

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \mathscr{P}(x + \alpha) = \delta_0(x), \quad x \in \mathbb{Z}^n, \tag{3}$$

где $\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ называется *фундаментальным решением*.

Если известно фундаментальное решение $\mathscr{P}$, то решение разностного уравнения $\sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = \mu(x)$, $x \in \mathbb{Z}^n$, можно найти по формуле

$$f(x) = \sum_{y} \mu(y) \mathscr{P}(x - y),$$

в правой части которой сумма, вообще говоря, бесконечная. Поэтому один из возникающих вопросов — сходимость ряда, в частности асимптотическое поведение фундаментального решения $\mathscr{P}(x)$ (см., например, [5–7]). Предлагаемая ниже конструкция для построения решения задачи (1), (2) обеспечивает конечность этой суммы.

Продолжим функцию ϕ на $\mathbb{Z}^n$:

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{если } x \in \mathbb{Z}^n_m, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}^n_m, \end{cases} \tag{4}$$

и определим функцию μ следующим образом:

$$\mu(x) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \tilde{\phi}(x + \alpha), \quad x \in \mathbb{Z}^n. \tag{5}$$

Пусть $S = \{x \in \mathbb{Z}^n : \text{ существует } \alpha \in A \text{ такое, что } x + \alpha \in \mathbb{Z}^n_m\}$, а $S_+ = S \cap \mathbb{Z}^n_+$ и $S_- = S \setminus S_+$.

Определим функцию

$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x), & x \in S_-, \\ 0, & x \notin S_-, \end{cases} \tag{6}$$

и отметим, что $\tilde{\mu}(x) = 0$ для $x \in \mathbb{Z}^n_+$.

Обозначим через $\operatorname{Supp} \mathscr{P} = \{x \in \mathbb{Z}^n : \mathscr{P}(x) \neq 0\}$ носитель функции $\mathscr{P}$.

Теорема 1. *Если существует фундаментальное решение разностного уравнения, удовлетворяющее условиям:*

(i) *для любого* $x \in \mathbb{Z}^n_+$ *множество* $\operatorname{Supp} \mathscr{P} \cap (x - S_-)$ *состоит из конечного числа точек;*

(ii) *для любого* $x \in \mathbb{Z}^n_m$ *множество* $\operatorname{Supp} \mathscr{P} \cap (x - S_+)$ *пустое,*

то функция

$$f(x) = \sum_{y \in \mathbb{S}_-} \tilde{\mu}(y) \mathscr{P}(x - y) \tag{7}$$

удовлетворяет уравнению (1) *и начальным данным* (2).

Доказательство. Из условия (i) следует, что сумма в правой части (7) конечная и

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = \sum_{y \in S_-} \tilde{\mu}(y) \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \mathscr{P}(x - y + \alpha) = \tilde{\mu}(x) = 0$$

для $x \in \mathbb{Z}^n_+$.

Из условия (ii) вытекает, что для $x \in \mathbb{Z}^n_m$ суммирование в (7) можно проводить по $y \in S$ (так как для $y \in S_+$ имеем $\mathscr{P}(x - y) = 0$), тогда

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{y \in S} \mu(y) \mathscr{P}(x - y) &= \sum_{y \in S} \Big(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \tilde{\phi}(y + \alpha) \Big) \mathscr{P}(x - y) \\ &= \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \sum_{y \in S} \tilde{\phi}(y + \alpha) \mathscr{P}(x - (y + \alpha) + \alpha). \end{aligned}$$

Меняя во внутренней сумме индекс суммирования $y + \alpha$ на y и пользуясь свойством (3), получим

$$f(x) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \sum_{y} \tilde{\phi}(y) \mathscr{P}(x - y + \alpha) = \sum_{y} \tilde{\phi}(y) \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \mathscr{P}(x - y + \alpha) = \tilde{\phi}(x) = \phi(x).$$

Приведем способ построения фундаментальных решений, связанный с разложениями рациональной функции $1/P(x)$ в ряд Лорана.

Амебой называется образ множества нулей V многочлена $P(z)$ при отображении $\operatorname{Log} : z = (z_1, \ldots, z_n) \to (\log |z_1|, \ldots, \log |z_n|) = \operatorname{Log} |z|$. Применение термина «амеба» объясняется тем, что для $n = 2$ изображение множества $\operatorname{Log} V$ действительно напоминает амебу.

Укажем некоторые необходимые нам свойства амебы, другие свойства и доказательства приведены в [8].

Дополнение амебы $\mathbb{R}^n \backslash \operatorname{Log} V$ состоит из конечного множества связных компонент, количество которых не превосходит числа целых точек многогранника N_P.

Всякой непустой компоненте E дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Log} V$ соответствует точка $\nu \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$ (кратность компоненты E), и в этой компоненте E_ν функция $1/P(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \frac{\mathscr{P}(x)}{z^x}, \quad \text{где } \mathscr{P}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\operatorname{Log}^{-1} u} \frac{z^{x-I}}{P(z)}, \quad u \in E_\nu. \tag{8}$$

Если m — вершина многогранника N_P, то ей соответствует (непустая) связная компонента дополнения амебы E_m такая, что в области $\operatorname{Log}^{-1} E_m \subset \mathbb{C}^n$ функция $1/P(z)$ разлагается в ряд вида

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{x \in K_m + m} \frac{\mathscr{P}_m(x)}{z^x}, \tag{9}$$

где K_m — конус, построенный на векторах $m - \alpha$, $\alpha \in A$. Коэффициенты $\mathscr{P}(x)$ разложения (9) можно помимо формулы (8) получить следующим образом:

$$1/P(z) = 1\Big/\Big(c_m z^m + \sum_{\alpha \neq m} c_\alpha z^\alpha\Big) = 1\Big/\Big(c_m z^m \Big(1 - \sum_{\alpha \neq m} \tilde{c}_\alpha z^{\alpha - m}\Big)\Big)$$
$$= (1/c_m z^m) \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha \neq m} \tilde{c}_\alpha z^{\alpha - m}\Big)^k = \sum_{x \in K_m + m} \mathscr{P}_m(x)/z^x.$$

Формула (9), в частности, означает, что для всякой вершины $m \in N_P$ существует фундаментальное решение $\mathscr{P}_m$ такое, что $\operatorname{Supp} \mathscr{P}_m \subset K_m + m$.

Теорема 2. *Пусть m — вершина многогранника Ньютона N_P, удовлетворяющая одному из следующих двух условий:*

$(*)$ $m_1 = \dots = m_{j-1} = m_{j+1} = \dots = m_n = 0$ *и* $m_j > \alpha_j$ *для всех* $\alpha \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$, $\alpha \neq m$;

$(**)$ $m_j \geq \alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, *для всех* $\alpha \in N_P \cap \mathbb{Z}^n$.

Тогда задача (1), (2) *имеет единственное решение, которое можно найти по формуле* (7).

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (1), (2) можно вывести из теоремы 5 работы [9], однако в рассматриваемых в теореме 2 случаях $(*)$ и $(**)$ это нетрудно доказать и непосредственно. Действительно, так как m — вершина многогранника Ньютона, то $c_m \neq 0$ и из уравнения (1) можно найти $f(x+m)$:

$$f(x+m) = \sum_{\substack{\alpha \neq m, \\ \alpha \in A}} \tilde{c}_\alpha f(x+\alpha). \tag{10}$$

Положим $x = 0$, из $(*)$, $(**)$ следует, что $\alpha \in \mathbb{Z}^n_m$, поэтому значение f в точке m выражается через «начальные данные» $f(\alpha) = \phi(\alpha)$. Рассмотрим случай $(*)$, и пусть для определенности $m = (m_1, 0, \dots, 0)$. Пусть $x = (0, x_2, \dots, x_n)$ произвольное, а так как $x + \alpha \in \mathbb{Z}^n_m$, то значение функции f в точках $x + m$ также выражается через «начальные» данные. Тем самым мы определили f на множестве $\mathbb{Z}^n_{m+e_1}$, где $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. По индукции можно найти значения f на $\mathbb{Z}^n_{m+ke_1}$, $k = 0, 1, \dots$. В случае $(**)$ обозначим $k = \|x\| = x_1 + \dots + x_n$ и предположим, что значения f вычислены для всех $x + m$ таких, что $\|x\| < k$. Так как $\|x + \alpha\| = \|x\| + \|\alpha\| = k + \|\alpha\| < k + \|m\|$, значения функции f в точках $x + m$, $\|x\| = k$ выражаются через «начальные» данные.

Покажем, что в случае, когда вершина m многогранника Ньютона удовлетворяет условию $(*)$ или $(**)$, соответствующее фундаментальное решение $\mathscr{P}_m$ удовлетворяет условиям (i) и (ii). Условие (i) эквивалентно тому, что для любого $x \in \mathbb{Z}^n_+$ уравнение $y + \beta = x$ имеет конечное число решений y, β, где $y \in S_-$, а $\beta \in \operatorname{Supp} \mathscr{P} \subset K_m + m$. По определению множества S_- найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что $y + \alpha_0 \in \mathbb{Z}^n_m$. Пусть $\beta = m + \nu$, $\nu \in K_m$, тогда $y + \beta = (y + \alpha_0) + (m - \alpha_0) + \nu$. Следовательно, $y + \beta$ является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами векторов $e_1, \dots, e_n$, $m - \alpha$, $\alpha \in A$. Так как конус, построенный на этих векторах, является заостренным, то вектор $x \in \mathbb{Z}^n_+$ можно представить в виде такой линейной комбинации конечным числом способов (см., например, [10]).

Поскольку в случаях $(*)$, $(**)$ имеем $(x - S_+) \subset (x - \mathbb{Z}^n_m)$, то условие (ii) в случае $(*)$ выполняется, так как для любых $x, y \in \mathbb{Z}^n_m$ получим $x_1 - y_1 < m_1$, но тогда $x - y \notin m + K_m$. Аналогично в случае $(**)$ из неравенств $x_j - y_j < m_j$, $j = 1, \dots, n$, следует, что $x - y \notin m + K_m$.

В качестве примера рассмотрим уравнение $f(x_1 + 1, x_2 + 1) - f(x_1 + 1, x_2) - f(x_1, x_2 + 1) = 0$, которое в комбинаторном анализе (см. [2]) иногда называют *основным рекуррентным соотношением*. В данном случае $P(z_1, z_2) = z_1 z_2 - z_1 - z_2$, $A = \{(1,1), (1,0), (0,1)\}$. Возьмем вершину $m = (1,1)$. Легко видеть, что $S_- = \{(-1,-1), (-1,m), (m,-1), m = 0, 1, 2, \dots\}$. Тогда из соотношения (5) найдем

$$\mu(y_1, y_2) = \tilde{\phi}(y_1 + 1, y_2 + 1) - \tilde{\phi}(y_1 + 1, y_2) - \tilde{\phi}(y_1, y_2 + 1).$$

Для $y \in S_-$ имеем

$$\mu(-1,-1) = \phi(0,0), \quad \mu(-1,m) = \phi(0, m+1) - \phi(0,m),$$

$$\mu(m,-1) = \phi(m+1, 0) - \phi(m,0).$$

Фундаментальное решение, соответствующее вершине $m = (1,1)$, найдем, разлагая функцию $1/(z_1 z_2 - z_1 - z_2) = (1/z_1 z_2)(1 - 1/z_1 - 1/z_2)^{-1}$ в ряд геометрической прогрессии. Тогда $\mathscr{P}_{1,1} = \frac{(x_1+x_2-2)!}{(x_1-1)!(x_2-1)!}$ и из формулы (7) получим решение задачи (1), (2):

$$f(x_1, x_2) = \phi(0,0)\frac{(x_1 + x_2)!}{x_1! x_2!} + \sum_{y_1=1}^{x_1} [\phi(y_1, 0) - \phi(y_1 - 1, 0)] \frac{(x_1 + x_2 - y_1)!}{(x_1 - y_1)! x_2!} + \sum_{y_2=1}^{x_2} [\phi(0, y_2) - \phi(0, y_2 - 1)] \frac{(x_1 + x_2 - y_2)!}{x_1!(x_2 - y_2)!}.$$

В случае, когда начальные данные имеют вид $\phi(0, x_2) = \phi(x_2, 0) \equiv 1$, получаем $f(x_1, x_2) = \frac{(x_1+x_2)!}{x_1! x_2!}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1972.
3. *Duffin R.* Discrete potential theory // Duke Math. J. 1953. V. 20. P. 233–251.
4. *Лейнартас Е. К.* Кратные ряды Лорана и разностные уравнения // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 387–393.
5. *Duffin R., Shaffer D.* Asymptotic expansion of double Fourier transforms // Duke Math. J. 1960. V. 27. P. 581–596.

6. *De Boor C., Höllig K., Riemensckneider S.* Fundamental solutions of multivariate difference equations // J. Amer. Math. Soc. 1989. V. 111. P. 403–415.
7. *Vert J.* Fundamental solutions of multidimensional difference equations with periodical and matrix coefficients // Aequationes Math. 1995. V. 49. P. 47–56.
8. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 45–70.
9. *Bousquet-Mélou M., Petrovšek M.* Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Math. 2000. V. 225. P. 51–75.
10. *Brion M., Vergne M.* Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes // J. Amer. Math. Soc. 1997. V. 10, N 4. P. 797–833.

Статья поступила 27 декабря 2004 г.

Лейнартас Евгений Константинович
Красноярский гос. университет, математический факультет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
lein@au.ru