Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 517.54

КЛАСС ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ УДЕЛЬНЫМ КОЛЕБАНИЕМ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППАХ КАРНО

Д. В. Исангулова

Аннотация: Предлагаемая работа является первой в цикле работ автора, посвященном устойчивости в теореме типа Лиувилля на группе Гейзенберга. Предполагается доказать, что всякое отображение с ограниченным искажением на области Джона группы Гейзенберга приближается конформным отображением с порядком близости $\sqrt{K-1}$ в равномерной норме и с порядком близости $K-1$ в норме Соболева L_p^1 для всех $p < \frac{C}{K-1}$.

В данной работе исследуется интегрируемость отображений с ограниченным удельным колебанием, заданных на пространстве однородного типа. В качестве примера рассматриваются отображения с ограниченным искажением на группе Гейзенберга. Показано, что отображение с K-ограниченным искажением группы Гейзенберга принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, где $p \to \infty$ при $K \to 1$.

Ключевые слова: пространство однородного типа, отображение с ограниченным удельным колебанием, группа Карно, группа Гейзенберга, отображение с ограниченным искажением.

§ 1. Введение

Класс отображений с ограниченным удельным колебанием в смысле L_q, $q > 0$, относительно допустимого класса функций S ($BSO_q(S)$) ввели Л. Г. Гуров и Ю. Г. Решетняк [1]. В частном случае, когда S — класс постоянных функций и $q = 1$, этот класс был введен Л. Г. Гуровым [2] для доказательства устойчивости лоренцевых отображений. В [1] показано, что для отображений класса $BSO_q(S)$ верна теорема об улучшении показателя локальной суммируемости. Ю. Г. Решетняк применил теорию отображений с ограниченным удельным колебанием при решении проблемы М. А. Лаврентьева об устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях в пространстве [3].

Мы обобщаем результаты работы [1] на метрические пространства однородного типа. Отметим, что авторы ряда работ, см., например, [4–6], изучали вопросы об улучшении показателя суммируемости некоторых специальных

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05–01–00482), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–8526.2006.1) и фонда ИНТАС (грант YSF 03–55–905).

классов отображений на метрических пространствах достаточно общей природы.

Функция $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to [0, \infty)$ называется *квазиметрикой* на множестве $\mathbb{X}$, если

1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ для всех $x, y \in \mathbb{X}$;
3) существует постоянная $c \geq 1$ такая, что

$$d(x, y) \leq c(d(x, z) + d(z, y)) \quad \text{для всех } x, y, z \in \mathbb{X}.$$

Пусть $x \in \mathbb{X}$ и $r > 0$. Обозначим шар с центром в точке $x \in \mathbb{X}$ радиуса $r > 0$ через $B(x, r) = \{y \in \mathbb{X} \mid d(x, y) < r\}$. Будем обозначать символом $x(B)$ центр шара B, а $r(B)$ — его радиус.

Пространство однородного типа $(\mathbb{X}, d, \mu)$ — это множество $\mathbb{X}$ с квазиметрикой d и положительной борелевской мерой μ, удовлетворяющей условию удвоения и такой, что $\mu(B(x, r)) < \infty$ для всех $x \in \mathbb{X}$ и $r > 0$. Напомним, что положительная борелевская мера μ удовлетворяет условию *удвоения*, если существует константа C такая, что $0 < \mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)) < \infty$ для всех $x \in \mathbb{X}$ и $r > 0$. Будем предполагать еще, что геометрия тройки $(\mathbb{X}, d, \mu)$ удовлетворяет дополнительному условию: для любых шаров B_1 и B_2 таких, что $x(B_1) \in B_2$, $r(B_1) \leq r(B_2)$, существует шар $\widehat{B}$ такой, что

$$\widehat{B} \subset B_1 \cap B_2, \quad r(\widehat{B}) \geq \frac{r(B_1)}{\varkappa}, \quad x(B_1) \in \widehat{B}. \tag{1}$$

Здесь константа $\varkappa \geq 1$ не зависит от выбора шаров B_1 и B_2.

Условие (1) не является обременительным. Например, оно выполнено на локально-компактном пространстве, на котором любые две точки можно соединить кратчайшей. В этом случае $\varkappa = 2$.

Пусть $U \subset \mathbb{X}$ — измеримое множество и $0 < \mu(U) < \infty$. Для любой измеримой функции $f : U \to \mathbb{R}^d$ обозначим

$$M(f, U) = \frac{1}{\mu(U)} \int\limits_U |f(x)| \, d\mu(x), \quad M_p(f, U) = (M(|f|^p, U))^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Определение 1. Рассмотрим определенный на шарах класс S такой, что $S(B)$ — некоторая совокупность непрерывных функций $\varphi : B \to \mathbb{R}^d$ для любого шара $B \subset \mathbb{X}$. Класс S называется *допустимым*, если выполнены следующие условия.

I. Если $\varphi \in S(B)$, то сужение φ на $\widetilde{B}$ принадлежит $S(\widetilde{B})$ для любого шара $\widetilde{B} \subset B$.

II. Существуют константы α_1, α_2, $0 < \alpha_1 \leq 1 \leq \alpha_2$, такие, что для каждого шара B и произвольной функции $\varphi \in S(B)$ справедливо следующее двойное неравенство: $\alpha_1 M(\varphi, B) \leq |\varphi(x)| \leq \alpha_2 M(\varphi, B)$ для всех $x \in B$.

III. Существует константа $\alpha_3 \geq 1$ такая, что для любого шара B и произвольных $\varphi, \psi \in S(B)$ выполнено $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \alpha_3 M(\varphi - \psi, B)$ для всех $x \in B$.

Функции, удовлетворяющие накладываемым на допустимый класс ограничениям, в некотором смысле похожи на постоянные. Очевидным примером допустимого класса служит класс постоянных функций. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, нетривиальным примером является класс дифференциалов мёбиусовых преобразований (см. [3]).

Пусть S — допустимый класс и U — открытое множество в $\mathbb{X}$.

Определение 2. Отображение $f : U \to \mathbb{R}^d$ называется *отображением с ограниченным удельным колебанием в* L_q *относительно* S ($f \in BSO_q(S)$), $q > 0$, если существует константа $\sigma > 0$ такая, что для любого шара $B \subset U$ можно выбрать функцию $\varphi_B \in S(B)$, удовлетворяющую условию

$$\int\limits_B |f(x) - \varphi_B(x)|^q \, d\mu(x) \le \sigma^q \int\limits_B |\varphi_B(x)|^q \, d\mu(x).$$

Наименьшая константа σ для всех шаров $B \subset U$ называется *удельным колебанием* f *в смысле* L_q *относительно* S и обозначается символом $\operatorname{osc}(f, q, S)$.

Для заданного шара $B = B(a, r)$ определим шар $B' = B\big(a, \frac{10r}{9}\big)$. Основное свойство отображений с ограниченным удельным колебанием сформулировано в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть* U *— открытое множество в* $\mathbb{X}$, S *— допустимый класс и* $f : U \to \mathbb{R}^d$. *Пусть* $f \in BSO_q(S)$, $\sigma = \operatorname{osc}(f, q, S)$. *Для* $t > 0$ *и шара* $B' \subset U$ *положим* $E_B(t) = \{x \in B : |f(x) - \varphi_{B'}(x)| \ge t|\varphi_{B'}(x)|\}$. *Тогда существует число* $\sigma_0 > 0$, *зависящее только от* q *и* $\alpha_1 - \alpha_3$, *такое, что если* $\sigma < \sigma_0$, *то для всех* $t \ge \frac{\sigma}{\sigma_0}$ *выполнено*

$$\mu(E_B(t)) \le e^3 \left(\frac{\alpha_1 \sigma_0}{\alpha_2 \sigma M_q(\varphi_{B'}, B)} \right)^q \frac{1}{(t+1)^{2\sigma_0/\sigma}} \int\limits_B |f(x) - \varphi_{B'}(x)|^q \, d\mu(x).$$

Теорема 1 обобщает соответствующий результат работы [1] в евклидовых пространствах (см. также [3, 7]).

Из теоремы 1 нетрудно установить улучшение показателя суммируемости отображений с ограниченным удельным колебанием.

Следствие. *Пусть* $f : U \to \mathbb{R}^d$ *принадлежит классу* $BSO_q(S)$ *и* $\sigma = \operatorname{osc}(f, q, S)$. *Если* $\sigma < \sigma_0$, *то* $f \in L_{p,\mathrm{loc}}(U)$ *для всех* $p \in \big[q, \frac{2\sigma_0}{\sigma}\big)$. *Более того,*

1) *если* $q < p < \frac{2\sigma_0}{\sigma}$, *то*

$$\int\limits_B |f(x) - \varphi_{B'}(x)|^p \, d\mu(x) \le \frac{\alpha_2^{q+p}}{\alpha_1^q} \left(\frac{p}{q} \sigma_0^{q-p} + \frac{p\, e^3 \sigma_0^q}{\sigma^p} \mathrm{B}\left(p, \frac{2\sigma_0}{\sigma} - p\right) \right)$$
$$\times \sigma^{p-q} M_q(\varphi_{B'}, B)^{p-q} \int\limits_B |f(x) - \varphi_{B'}(x)|^q \, d\mu(x);$$

2) *если* $q < p < \frac{(2-\delta)\sigma_0}{\sigma}$, $\delta > 0$, *то*

$$\int\limits_B |f(x) - \varphi_{B'}(x)|^p \, d\mu(x) \le C(p)\, \sigma^{p-q} M_q(\varphi_{B'}, B)^{p-q} \int\limits_B |f(x) - \varphi_{B'}(x)|^q \, d\mu(x).$$

Константа $C(p)$ *зависит только от* q, δ *и* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Замечания. 1. $f \in BSO_p(S)$ для всех $p \in \big(q, \frac{(2-\delta)\sigma_0}{\sigma}\big)$.

2. Вместо $B' = B\big(a, \frac{10r}{9}\big)$ можно использовать $B' = B(a, sr)$ для всех $s > 1$.

3. Полученный результат слабее евклидова аналога: если отображение f близко к φ на шаре B, то улучшение показателя интегрируемости можно гарантировать только на меньшем шаре.

Ю. Г. Решетняк применил евклидов вариант теоремы 1 к исследованию устойчивости в теореме Лиувилля в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$ [3]. Он показал, что дифференциалы мёбиусовых преобразований образуют допустимый класс SM, а дифференциал отображения с ограниченным искажением принадлежит классу

$BSO_n(SM)$ при $n \geq 3$. В частности, отображение с K-ограниченным искажением принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, где $p \to \infty$ при $K \to 1$. В нашей работе мы применяем теорему 1 к отображениям с ограниченным искажением групп Гейзенберга, являющихся частным случаем групп Карно.

Квазиконформный анализ на группах Карно, связных односвязных нильпотентных группах Ли с градуированной алгеброй Ли, стал предметом интенсивного исследования после того, как были установлены связь квазиконформных отображений и функциональных классов на однородных группах [8], а также жесткость типа Мостова гиперболических пространственных форм [9]. Исследования Мостова были продолжены Пансю [10], который предложил концепцию дифференцируемости на группах Карно. В настоящее время теория квазиконформных отображений на группах Карно — активно развиваемая область математики (см., например, [11–16]). Заметим, что группы Карно являются метрическими пространствами однородного типа, удовлетворяющими условию (1).

Группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ — это единственные неабелевы группы Карно, где удалось доказать аналог теоремы Лиувилля и известна группа мёбиусовых преобразований M_n. Теорию квазиконформных отображений на группах Гейзенберга развили Кораньи и Райманн [17, 18] (см. также [19, 20]).

В качестве основного применения теории отображений с ограниченным удельным колебанием установлена следующая

Теорема 2. *Существуют $\varepsilon_0 > 0$ и неубывающая функция $\mu_0 : (0, \varepsilon_0) \to (0, \infty)$, $\mu_0(t) \to 0$ при $t \to 0$, такие, что любое отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$, $U \subset \mathbb{H}^n$, с ограниченным искажением $K_O = K_O(f) < 1 + \varepsilon_0$ принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{H}^n)$ для всех $p \in \big[\nu, \frac{2\sigma_0}{\mu_0(K_O-1)}\big)$. Более того, для каждого шара $B = B(a, r) \subset U$ существует отображение $\theta \in M_n$ такое, что $\theta \neq \infty$ на шаре $B\big(a, \frac{5r}{12}\big)$,*

$$\sup_{x \in B(a, \frac{r}{9})} \rho\big(\theta^{-1} \circ f(x), x\big) \leq C_1 r \sqrt{\mu_0(K_O - 1)},$$

$$\|D_h(\theta^{-1} \circ f) - I\|_{p, B(a, \frac{r}{9})} \leq C_2\, r^{\nu/p} \mu_0(K_O - 1),$$

$$\sup_{x \in B(a, \frac{r}{9})} \rho(f(x), \theta(x)) \leq C_3 \sqrt{\mu_0(K_O - 1)} \|D_h \theta\|_{\nu, B(a, \frac{r}{9})},$$

$$\|D_h f - D_h \theta\|_{p, B(a, \frac{r}{9})} \leq C_4 \|D_h \theta\|_{p, B(a, \frac{r}{9})} \mu_0(K_O - 1)$$

для любого $p \in \big[\frac{\nu}{2}, \frac{\sigma_0(2-\delta)}{\mu_0(K_O-1)}\big)$, $\delta > 0$. Константы C_1 и C_3 зависят только от n и δ. Константы C_2 и C_4 зависят от n, p и δ. Число σ_0 из теоремы 1.

Кратко опишем структуру работы. В § 2 рассматривается теория отображений с ограниченным удельным колебанием. В нем приводится доказательство теоремы 1 и ее следствия. В § 3 доказывается локальная теорема устойчивости конформных отображений в норме Соболева на общих группах Карно. Как и в евклидовом случае, доказательство этой теоремы основано на замкнутости класса отображений с ограниченным искажением, полунепрерывности снизу интеграла энергии и слабой сходимости якобианов. Все эти факты установлены на общих группах Карно [13]. Поэтому мы можем доказать локальную теорему устойчивости в норме Соболева не только на группах Гейзенберга, но и на общих группах Карно. В § 4 показано, что на группах Гейзенберга дифференциалы мёбиусовых отображений образуют допустимый класс. В § 5 доказывается теорема 2.

Основные результаты работы сформулированы в [21, 22].

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. С. К. Водопьянову за постоянное внимание и помощь в работе.

§ 2. Отображения с ограниченным удельным колебанием

Пусть C — наименьшая константа в условии удвоения. Число $\nu = \log C$ называется *порядком удвоения* μ. Итерируя условие удвоения, получаем

$$\frac{\mu(B)}{\mu(\widetilde{B})} \leq C_\mu \left(\frac{r(B)}{r(\widetilde{B})}\right)^\nu \quad \text{для любого шара } \widetilde{B} \subset B. \tag{2}$$

Пусть S — допустимый класс. Рассмотрим $\varphi \in S(B)$ и $p \geq 1$. Тогда условие II определения 1 влечет

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} M_p(\varphi, B) \leq |\varphi(x)| \leq \alpha_2 M(\varphi, B) \leq \alpha_2 M_p(\varphi, B) \quad \text{для всех } x \in B. \tag{3}$$

Нам понадобится следующая лемма о покрытии (см., например, [23]).

Лемма 1. *Пусть $(\mathbb{X}, d, \mu)$ — пространство однородного типа. Тогда из всякого семейства шаров $\mathfrak{G}$, радиусы которых равномерно ограничены, можно выделить не более чем счетное дизъюнктное подсемейство $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$ такое, что $\bigcup\limits_{B \in \mathfrak{G}} B \subset \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{G}'} \eta B$. Здесь $\eta = 3c^2 + 2c$, где c — константа из неравенства треугольника для квазиметрики d.*

Доказательство теоремы 1, как и доказательство классической теоремы Джона — Ниренберга [24], основывается на адекватном разложении Зигмунда — Кальдерона.

Лемма 2. *Пусть*

$$\int\limits_{B_0'} u(x)\, d\mu(x) < \frac{L}{C_\mu 10^\nu} \mu(B_0'),$$

где $u : B_0' \to \mathbb{R}$ — неотрицательная измеримая функция, C_μ и ν из соотношения (2). *Тогда существует не более чем счетное семейство шаров $\{B_i\}$ с центрами в B_0 с радиусами, меньшими $\frac{1}{9} r_0$, $r_0 = r(B_0)$, такое, что*

(i) $\left\{\frac{1}{\eta} B_i\right\}$ *— дизъюнктное семейство;*

(ii) $\int\limits_{B_i} u(x)\, d\mu(x) \leq L\mu(B_i)$ *для всех i;*

(iii) *для каждого B_i существует шар $\widehat{B}_i \subset \frac{1}{\eta} B_i \cap B_0$ такой, что $x(B_i) \in \widehat{B}_i$, $r(\widehat{B}_i) \geq \frac{r(B_i)}{\eta \varkappa}$ и $\int\limits_{\widehat{B}_i} u(x)\, d\mu(x) > L\mu(\widehat{B}_i)$;*

(iv) *$u \leq L$ μ-почти всюду в $B_0 \setminus H$, где $H = (\bigcup B_i) \cap B_0$.*

Доказательство. Рассмотрим шар $B \subset B_0'$, $x(B) \in B_0$ и $r(B) = \frac{1}{9} r_0$. Тогда

$$\int\limits_{B} u(x)\, d\mu(x) \leq \int\limits_{B_0'} u(x)\, d\mu(x) \leq \frac{L}{C_\mu 10^\nu} \mu(B_0') \leq L\mu(B).$$

Обозначим $E = \{x \in B_0 \mid u(x) > L\}$. Тогда для μ-почти всех $x \in E$ существует шар B_x радиуса $r(B_x) \leq \frac{1}{9} r_0$ такой, что

$$\int\limits_{B_x} u(x)\, d\mu(x) \leq L\mu(B_x) \quad \text{и} \quad \int\limits_{\widehat{B}_x} u(x)\, d\mu(x) > L\mu(\widehat{B}_x),$$

где $\widehat{B}_x$ — шар из условия (1), т. е. $\widehat{B}_x \subset \frac{1}{\eta}B_x \cap B_0$, $r(\widehat{B}_x) \geq \frac{1}{\eta\varkappa}r(B_x)$ и $x \in \widehat{B}_x$.

Действительно, пусть A — множество таких точек $x \in E$, что неравенство

$$\int\limits_B u(x)\,d\mu(x) \leq L\mu(B)$$

выполнено для шаров B, $x \in B \subset B_0$ и $r(B) \to 0$. По теореме Лебега $u \leq L$ μ-почти всюду в A и, следовательно, $\mu(A) = 0$.

По лемме 1 из семейства $\{B_x\}_{x\in E\setminus A}$ можно выбрать не более чем счетное подсемейство, которое будет удовлетворять всем условиям леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1 выполняется в несколько шагов.

(i) Обозначим через $F(t)$ инфимум таких чисел K, что

$$\mu(E_B(t)) \leq K\int\limits_B \frac{|f(x)-\varphi_{B'}(x)|^q}{|\varphi_{B'}(x)|^q}\,d\mu(x) \quad \text{для всех шаров } B' \subset U.$$

Очевидно, что $F(t) \leq \frac{1}{t^q}$ для всех $t > 0$.

Из условия I определения 1 и (3) получаем

$$\mu(E_B(t)) \leq F(t)\biggl(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 M_q(\varphi_{B'}, B)}\biggr)^q \int\limits_B |f(x)-\varphi_{B'}(x)|^q d\mu(x).$$

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно оценить $F(t)$.

Легко видеть, что

$$\mu(E_B(t)) \leq \biggl(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sigma\biggr)^q F(t)\mu(B') \leq \biggl(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sigma\biggr)^q C_\mu\biggl(\frac{10}{9}\biggr)^\nu F(t)\mu(B). \tag{4}$$

(ii) Фиксируем шар B_0, $B_0' \subset U$. Положим $\varphi_{B_0'} = \varphi_0$ и $u(x) = \frac{|f(x)-\varphi_0(x)|^q}{|\varphi_0(x)|^q}$. Тогда из определения 2 и (3) вытекает, что

$$\int\limits_{B_0'} u(x)\,d\mu(x) = \int\limits_{B_0'} \frac{|f(x)-\varphi_0(x)|^q}{|\varphi_0(x)|^q}\,d\mu(x) \leq \biggl(\frac{\alpha_2\sigma}{\alpha_1}\biggr)^q \mu(B_0').$$

Применим лемму 2 к B_0, $u(x)$ и $L = \bigl(\frac{\alpha_2 k\sigma}{\alpha_1}\bigr)^q C_\mu 10^\nu$, где число $k \geq 1$ выберем позже. Тогда существует не более чем счетное семейство шаров $\{B_i\}$ такое, что

$$\int\limits_{B_i} \frac{|f(x)-\varphi_0(x)|^q}{|\varphi_0(x)|^q}\,d\mu(x) \leq L\mu(B_i), \tag{5}$$

$$\int\limits_{\widehat{B}_i} \frac{|f(x)-\varphi_0(x)|^q}{|\varphi_0(x)|^q}\,d\mu(x) > L\mu(\widehat{B}_i) \tag{6}$$

и $|f(x)-\varphi_0(x)| \leq L^{1/q}|\varphi_0(x)|$ для μ-почти всех $x \in B_0 \setminus H$, $H = (\bigcup B_i) \cap B_0$. Следовательно, для всех $t > L^{1/q}$ имеем $\mu(E_{B_0}(t) \setminus H) = 0$.

В силу (3) и (5)

$$\int\limits_{B_i} |f(x)-\varphi_0(x)|^q\,d\mu(x) \leq \biggl(\frac{M_q(\varphi_0, B_i)}{\alpha_2}\biggr)^q \int\limits_{B_i} \frac{|f(x)-\varphi_0(x)|^q}{|\varphi_0(x)|^q}\,d\mu(x)$$
$$\leq L\biggl(\frac{M_q(\varphi_0, B_i)}{\alpha_2}\biggr)^q \mu(B_i). \tag{7}$$

(iii) Обозначим через φ_i отображение $\varphi_{B_i'} \in S(B_i')$. Оценим $|\varphi_i(x)-\varphi_0(x)|$ в терминах $|\varphi_i(x)|$. Из определения класса $BSO_q(S)$ и условия II определения 1 вытекает, что

$$M_q(f-\varphi_i,B_i)\le C_\mu^{1/q}\left(\frac{10}{9}\right)^{\nu/q}\sigma M_q(\varphi_i,B_i')\le C_\mu^{1/q}\left(\frac{10}{9}\right)^{\nu/q}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sigma M_q(\varphi_i,B_i).$$

Из явного вида L и (7) получаем

$$\begin{aligned}|\varphi_i(x)-\varphi_0(x)|&\le \alpha_3 M_1(\varphi_i-\varphi_0,B_i)\le \alpha_3 M_q(f-\varphi_0,B_i)+\alpha_3 M_q(f-\varphi_i,B_i)\\ &\le \frac{C_\mu^{1/q}10^{\nu/q}\alpha_3}{\alpha_1}\sigma\left(kM_q(\varphi_0,B_i)+\frac{\alpha_2}{9^{\nu/q}}M_q(\varphi_i,B_i)\right)\\ &\le \frac{C_\mu^{1/q}10^{\nu/q}\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2}\sigma\left(k|\varphi_0(x)|+\frac{\alpha_2}{9^{\nu/q}}|\varphi_i(x)|\right)\end{aligned}$$

для всех $x\in B_i$. Так как $|\varphi_0(x)|\le|\varphi_i(x)|+|\varphi_i(x)-\varphi_0(x)|$, то

$$|\varphi_i(x)-\varphi_0(x)|\left(1-\frac{C_\mu^{1/q}10^{\nu/q}\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2}k\sigma\right)\le \frac{C_\mu^{1/q}10^{\nu/q}\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2}\sigma\left(k+\frac{\alpha_2}{9^{\nu/q}}\right)|\varphi_i(x)|.$$

Пусть σ_1 таково, что $1-\frac{C_\mu^{1/q}10^{\nu/q}\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2}k\sigma_1=\frac12$. Тогда для любого $\sigma<\sigma_1$ получаем

$$|\varphi_i(x)-\varphi_0(x)|\le A_1\sigma|\varphi_i(x)| \tag{8}$$

при всех $x\in B_i$, где $A_1=2\frac{C_\mu^{1/q}10^{\nu/q}\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2}\left(k+\frac{\alpha_2}{9^{\nu/q}}\right)$.

(iv) Покажем, что $E_{B_0}(t)\cap B_i\subset E_{B_i}(t_1)$ для некоторого $t_1>0$. Имеем

$$\begin{aligned}&|f(x)-\varphi_i(x)|\ge|f(x)-\varphi_0(x)|-|\varphi_i(x)-\varphi_0(x)|\\ &\quad\ge t|\varphi_0(x)|-|\varphi_i(x)-\varphi_0(x)|\ge t(|\varphi_i(x)|-|\varphi_i(x)-\varphi_0(x)|)-|\varphi_i(x)-\varphi_0(x)|\end{aligned}$$

для всех $x\in E_{B_0}(t)\cap B_i$.

Таким образом, из (8) следует, что $|f(x)-\varphi_i(x)|\ge(t(1-A_1\sigma)-A_1\sigma)|\varphi_i(x)|$ для всех $x\in E_{B_0}(t)\cap B_i$. Это означает, что $E_{B_0}(t)\cap B_i\subset E_{B_i}(t_1)$, где $t_1=t(1-A_1\sigma)-A_1\sigma$.

(v) Пусть $\sigma<\sigma_0=\frac{1}{2A_1}$ и $t>2A_1\sigma$, т. е. $t_1>0$. Легко видеть, что $\sigma_0<\sigma_1/2<\sigma_1$. Из (4) следует, что

$$\mu(E_{B_0(t)}\cap B_i)\le\mu(E_{B_i}(t_1))\le\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sigma\right)^q C_\mu\left(\frac{10}{9}\right)^\nu F(t_1)\mu(B_i).$$

Поскольку $\sum\mu(B_i)\le C_\mu(\eta\varkappa)^\nu\sum\mu(\widehat{B}_i)\le C_\mu(\eta\varkappa)^\nu\mu(H)$, то

$$\mu(E_{B_0(t)})\le\sum\mu(E_{B_0(t)}\cap B_i)\le\sum\mu(E_{B_i}(t_1))\le\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sigma\right)^q C_\mu^2\left(\frac{10\eta\varkappa}{9}\right)^\nu F(t_1)\mu(H).$$

В силу (6) имеем

$$\int\limits_{B_0}\frac{|f(x)-\varphi_0(x)|^q}{|\varphi_0(x)|^q}\,d\mu(x)\ge\sum\int\limits_{\widehat{B}_i}\frac{|f(x)-\varphi_0(x)|^q}{|\varphi_0(x)|^q}\,d\mu(x)>\frac{L}{C_\mu(\eta\varkappa)^\nu}\mu(H).$$

Вспомним, что $L=C_\mu 10^\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}k\sigma\right)^q$. Тогда

$$F(t_1)\int\limits_{B_0}\frac{|f(x)-\varphi_0(x)|^q}{|\varphi_0(x)|^q}\,d\mu(x)\ge\frac{L}{C_\mu(\eta\varkappa)^\nu}F(t_1)\mu(H)\ge C_\mu^{-2}\left(\frac{3}{\eta\varkappa}\right)^{2\nu}k^q\mu(E_{B_0}(t))$$

и

$$\mu(E_{B_0}(t))\le C_\mu^2\left(\frac{\eta\varkappa}{3}\right)^{2\nu}\frac{1}{k^q}F(t_1)\int\limits_{B_0}\frac{|f(x)-\varphi_0(x)|^q}{|\varphi_0(x)|^q}\,d\mu(x).$$

Следовательно,

$$F(t) \le \frac{C_\mu^2(\eta\varkappa)^{2\nu}}{9^\nu k^q} F(t_1) = \frac{1}{4} F((1-\zeta)t - \zeta).$$

Здесь мы положили k таким, что $\frac{C_\mu^2(\eta\varkappa)^{2\nu}}{9^\nu k^q} = \frac{1}{4}$, и $\zeta = A_1\sigma$. Как и в [3, гл. 3, соотношение (5.36)], это означает, что

$$F(t) \le \frac{M}{(1+t)^{\frac{1}{\zeta}}} \quad \text{для всех } t > 2\zeta, \quad M = \frac{e^3}{(2\zeta)^q} < \infty.$$

Поскольку $\sigma_0 = \frac{1}{2A_1}$, то $F(t) \le \frac{e^3\sigma_0^q}{\sigma^q}\frac{1}{(1+t)^{2\sigma_0/\sigma}}$ для всех $t > \sigma/\sigma_0$. $\square$

Доказательство следствия. В силу (3) достаточно показать, что

$$\int\limits_B \left(\frac{|f(x) - \varphi_{B'}(x)|}{|\varphi_{B'}(x)|}\right)^p d\mu(x) \le \left(\frac{p}{q}\sigma_0^{q-p} + \frac{p\, e^3\sigma_0^q}{\sigma^p}\,\mathrm{B}\biggl(p, \frac{C_0}{\sigma} - p\biggr)\right)\sigma^{p-q}\int\limits_B \left(\frac{|f(x) - \varphi_{B'}(x)|}{|\varphi_{B'}(x)|}\right)^q d\mu(x),$$

если $M_q(\varphi_{B'}, B) \ne 0$ (случай $M_q(\varphi_{B'}, B) = 0$ тривиален). Имеем

$$\int\limits_B \left(\frac{|f(x) - \varphi_{B'}(x)|}{|\varphi_{B'}(x)|}\right)^p d\mu(x) = p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\mu(E_B(t))\,dt = p\int\limits_0^{\frac{\sigma}{\sigma_0}} t^{p-1}\mu(E_B(t))\,dt + p\int\limits_{\frac{\sigma}{\sigma_0}}^\infty t^{p-1}\mu(E_B(t))\,dt = I_1 + I_2.$$

Оценим первый интеграл. Имеем $t^{p-1} \le t^{q-1}\bigl(\frac{\sigma}{\sigma_0}\bigr)^{p-q}$ при условии, что $0 < t < \frac{\sigma}{\sigma_0}$, и

$$I_1 \le p\biggl(\frac{\sigma}{\sigma_0}\biggr)^{p-q}\int\limits_0^\infty t^{q-1}\mu(E_B(t))\,dt \le \frac{p}{q}\biggl(\frac{\sigma}{\sigma_0}\biggr)^{p-q}\int\limits_B \left(\frac{|f(x) - \varphi_{B'}(x)|}{|\varphi_{B'}(x)|}\right)^q d\mu(x).$$

Оценим второй интеграл. По теореме 1

$$I_2 \le p\frac{e^3\sigma_0^q}{\sigma^q}\left(\int\limits_{\frac{\sigma}{\sigma_0}}^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{2\sigma_0/\sigma}}\,dt\right)\int\limits_B \left(\frac{|f(x) - \varphi_{B'}(x)|}{|\varphi_{B'}(x)|}\right)^q d\mu(x),$$

где

$$\int\limits_{\frac{\sigma}{\sigma_0}}^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{2\sigma_0/\sigma}}\,dt \le \int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{2\sigma_0/\sigma}}\,dt = \mathrm{B}\biggl(p, \frac{2\sigma_0}{\sigma} - p\biggr).$$

Второе утверждение следствия выполняется, ибо $\mathrm{B}(p, x-p) = \frac{\Gamma(p)}{x^p}\bigl(1 + O\bigl(\frac{1}{x}\bigr)\bigr)$ при $x \to \infty$. $\square$

§ 3. Локальная теорема устойчивости в норме Соболева на группах Карно

Стратифицированной однородной группой или, в другой терминологии, *группой Карно* называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой раскладывается в прямую сумму $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ векторных пространств таких, что $\dim V_1 \geq 2$, $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Пусть векторные поля $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$ образуют базис пространства V_1. Поскольку они порождают V, для каждого $1 < i \leq m$ можно выбрать базис X_{ij} в V_i, $1 \leq j \leq n_i = \dim V_i$, образованный коммутаторами полей $X_{1k} \subset V_1$ порядка $i-1$. Отождествим элементы $g \in \mathbb{G}$ с элементами $x \in \mathbb{R}^N$, $N = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$, $x = (x^1; \dots; x^m)$, $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leq i \leq m$, посредством экспоненциального отображения $\exp\bigl(\sum x^i_j X_{ij}\bigr) = g$. *Растяжения* δ_t, определяемые как $\delta_t x = (tx^1; t^2x^2; \dots; t^m x^m)$, суть автоморфизмы $\mathbb{G}$ для любого $t > 0$.

Непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \to [0, \infty)$ класса C^∞ на $\mathbb{G} \setminus \{0\}$ называется *однородной нормой*, если

1) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\rho(x) = \rho(x^{-1})$;

3) $\rho(\delta_t x) = t\rho(x)$;

4) существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $x, y \in \mathbb{G}$ имеет место неравенство $\rho(x \cdot y) \leq c(\rho(x) + \rho(y))$.

Однородная норма определяет левоинвариантную однородную метрику ρ по следующему правилу: $\rho(x, y) = \rho(x^{-1} \cdot y)$ для любых двух точек $x, y \in \mathbb{G}$. Все однородные нормы на группе Карно эквивалентны.

Далее мы фиксируем на группе Карно однородную метрику ρ, задаваемую равенством

$$\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} \|x^i\|^{\frac{2\,m!}{i}} \right)^{\frac{1}{2\,m!}}, \tag{9}$$

и биинвариантную меру Хаара (она совпадает с мерой Лебега на $\mathbb{R}^N$). Для шара $B(x, r) = \{y \in \mathbb{G} : \rho(x, y) < r\}$ имеем $|B(x, r)| = r^\nu |B(0, 1)|$, где $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i \dim V_i$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{G}$.

Пусть Ω — область в $\mathbb{G}$. Пространство Соболева $W^1_q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, состоит из функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенную производную $X_{1i} f$ вдоль векторного поля X_{1i}, $i = 1, \dots, n_1$, и конечную норму

$$\|f\|_{W^1_q(\Omega)} = \|f\|_{q,\Omega} + \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{q,\Omega},$$

где $\nabla_{\mathscr{L}} f = (X_{11} f, \dots, X_{1n_1} f)$ — *субградиент* функции f. Напомним, что локально суммируемая функция $g_i : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной функции* f *вдоль векторного поля* X_{1i}, $i = 1, \dots, n_1$, если имеет место равенство $\int\limits_\Omega g_i \psi \, dx = -\int\limits_\Omega f X_{1i} \psi \, dx$ для любой тестовой функции $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Если $f \in W^1_q(U)$ для каждого открытого множества U, $\overline{U} \subset \Omega$, то говорят, что f *принадлежит классу* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Определение 3. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$ *принадлежит классу Соболева* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{G})$, если выполнены следующие условия.

(A) Для всякого $z \in \mathbb{G}$ функция $[f]_z : x \in \Omega \mapsto \rho(f(x), z)$ принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

(B) Семейство функций $\{\nabla_{\mathscr{L}} [f]_z\}_{z \in \mathbb{G}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, т. е. существует функция $g \in L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla_{\mathscr{L}} [f]_z(x)| \leq g(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

Известно (см., например, [13]), что для отображения f класса Соболева $X_{1j}f(x) \in V_1(f(x))$ для всех $j = 1,\dots,n_1$, поэтому матрица $D_hf(x) = (X_{1i}f_j(x))_{i,j=1,\dots,n_1}$ определяет линейное отображение горизонтального пространства $V_1(x)$ в $V_1(f(x))$ для почти всех $x \in \Omega$, называемое *формальным горизонтальным дифференциалом.* Обозначим символом $|D_hf(x)|$ норму этого дифференциала: $|D_hf(x)| = \sup\limits_{\xi\in V_1,\,\rho(\xi)=1} \rho(D_hf(x)(\xi))$. В качестве функции $g \in L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$ из определения 3 можно взять $C|D_hf|$ [13]. Гладкие отображения, дифференциалы которых сохраняют горизонтальную структуру, называются *контактными.* По этой причине отображения класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{G})$ естественно называть (*слабо*) *контактными.*

В [25] доказано, что $D_hf : V_1 \to V_1$ порождает сохраняющий градуировку гомоморфизм алгебр Ли $Df : V \to V$. Определитель матрицы $Df(x)$ называется (*формальным*) *якобианом* отображения f и обозначается символом $J(x,f)$.

Напомним, что непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, называется *открытым*, если образ открытого множества открыт, и *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in f(\Omega)$ состоит из изолированных точек.

Определение 4 [13]. Пусть $f : U \to \mathbb{G}$ — отображение, определенное на открытом множестве U в $\mathbb{G}$. Мы называем f *отображением с ограниченным искажением*, если

(a) f непрерывно, открыто и дискретно,

(b) $f \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{G})$,

(c) существует постоянная $K \geq 1$ такая, что $|D_hf(x)|^\nu \leq KJ(x,f)$ почти всюду в U. Наименьшая постоянная K в этом неравенстве называется (*внешним*) *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается символом $K_O(f)$.

Гомеоморфное отображение с ограниченным искажением называется *квазиконформным.* Примерами отображений с 1-ограниченным искажением являются левые сдвиги $\pi_a : x \mapsto a\cdot x$, $a \in \mathbb{G}$, и растяжения δ_t.

В евклидовом случае и на группах Гейзенберга требование открытости и дискретности избыточно: непостоянное отображение, удовлетворяющее пп. (b) и (c) определения 4, непрерывно, открыто и дискретно (см. [26, 20, 12, 14]). На двухступенчатых группах Карно $\mathbb{G}$ требование открытости и дискретности избыточно, если на группе $\mathbb{G}$ существует сингулярное в точке 0 решение $w \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{G}\setminus 0)$ уравнения $\operatorname{div}\big[|\nabla_{\mathscr{L}}w|^{\nu-2}\nabla_{\mathscr{L}}w\big] = 0$ [14]. Такие решения существуют, например, на двухступенчатых группах Карно H-типа [11].

Основным результатом данного параграфа является

Теорема 3. *Для любых фиксированных $q, s \in (0,1)$ существуют неубывающие функции $\mu_1(\cdot,q) : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\mu_1(t,q) \to 0$ при $t \to 0$, $\mu_2(\cdot,q,s) : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\mu_2(t,q,s) \to 0$ при $t \to 0$, такие, что для любого отображения с ограниченным искажением $f : B(a,r) \to \mathbb{G}$, $B(a,r) \subset \mathbb{G}$, $\rho(f(x)) \leq 1$ для всех $x \in B(a,r)$, существует отображение θ с 1-ограниченным искажением, для которого*

$$\rho(f(x),\theta(x)) \leq \mu_1[K_O(f)-1,q] \quad \text{для всех } x \in B(a,qr), \tag{10}$$

$$\int\limits_{B(a,qsr)} |D_hf(x) - D_h\theta(x)|^\nu\,dx \leq \mu_2[K_O(f)-1,q,s]. \tag{11}$$

Доказательство. Соотношение (10) — это устойчивость отображений с ограниченным искажением в равномерной норме, которая доказана в [27, теорема 5]. Там она сформулирована немного в другом виде, но легко переносится на наш случай.

Пусть $B(a,r) = B(0,1)$. Доказательство устойчивости в норме Соболева (соотношение (11)) основывается на лемме 3, приведенной ниже. Покажем, как из леммы 3 получить (11).

Пусть верно противное. Тогда существуют числа $\varepsilon > 0$, $s, q \in (0,1)$, последовательность отображений $f_j : B(0,1) \to \mathbb{G}$ с ограниченным искажением, $K_O(f_j) < 1 + \frac{1}{j}$, $\rho(f_j(x)) \leq 1$ для всех $x \in B(0,1)$, и последовательность отображений θ_j, $K_O(\theta_j) = 1$, такие, что

$$\sup_{x \in B(0,q)} \rho(f_j(x), \theta_j(x)) \leq \mu_1(K_O(f_j), q) \quad \text{и} \quad \int\limits_{B(0,sq)} |D_h f_j(x) - D_h \theta_j(x)|^\nu \, dx \geq \varepsilon.$$

В силу [27, с. 282] последовательность $\{f_j\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена на любой области, компактно вложенной в шар $B(0,1)$, например, на шаре $B(0,q)$. По теореме Асколи — Арцела существуют отображение f_0 и равномерно сходящаяся к нему подпоследовательность, которую мы будем для краткости также обозначать через $\{f_j\}$. По теореме 1 работы [13] отображение f_0 будет отображением с 1-ограниченным искажением. Очевидно, что и отображения θ_j будут равномерно сходиться к f_0 на шаре $B(0,q)$ при $j \to \infty$. В силу леммы 3 имеем

$$\int\limits_{B(0,sq)} |D_h f_j - D_h f_0|^\nu \, dx \to 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{B(0,sq)} |D_h \theta_j - D_h f_0|^\nu \, dx \to 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \int\limits_{B(0,sq)} |D_h f_j - D_h \theta_j|^\nu \, dx \\ &\leq 2^{\nu-1} \int\limits_{B(0,sq)} |D_h f_j - D_h f_0|^\nu \, dx + 2^{\nu-1} \int\limits_{B(0,sq)} |D_h \theta_j - D_h f_0|^\nu \, dx. \end{aligned}$$

Получаем противоречие, так как правая часть в неравенстве стремится к нулю.

Пусть теперь отображение f с ограниченным искажением определено на произвольном шаре $B(a,r)$. Тогда отображение $g = f \circ \pi_a \circ \delta_r$ определено на шаре $B(0,1)$, причем $K_O(g) = K_O(f)$ и $\rho(g(x)) = \rho(f(a \cdot \delta_r(x))) \leq 1$ для всех $x \in B(0,1)$. Следовательно, отображение g близко к некоторому отображению ψ с 1-ограниченным искажением. Легко видеть, что отображение $\theta = \psi \circ \delta_{r^{-1}} \circ \pi_{a^{-1}}$ с 1-ограниченным искажением является искомым для f. $\square$

Лемма 3. *Пусть задана такая последовательность $g_k : B(0,q) \to \mathbb{G}$ отображений с ограниченным искажением, что $K_O(g_k) \to 1$ при $k \to \infty$ и отображения g_k равномерно сходятся на шаре $B(0,q)$ к отображению g_0 при $k \to \infty$. Тогда*

$$\int\limits_{B(0,sq)} |D_h g_k(x) - D_h g_0(x)|^\nu \, dx \to 0 \tag{12}$$

при $k \to \infty$ для любого числа $s < 1$.

Доказательство. По теореме 1 работы [13] отображение g_0 будет отображением с 1-ограниченным искажением. Обозначим $B = B(0,q)$. Возьмем неотрицательную функцию $\xi \in C_0^\infty(B)$ такую, что $\xi = 1$ на $sB = B(0, sq)$. С одной стороны,

$$\int\limits_B |D_h g_k(x)|^\nu \xi(x)\, dx \le K_O(g_k) \int\limits_B J(x, g_k)\xi(x)\, dx \to \int\limits_B J(x, g_0)\xi(x)\, dx$$
$$= \int\limits_B |D_h g_0(x)|^\nu \xi(x)\, dx$$

при $k \to \infty$ в силу слабой непрерывности якобианов [13, лемма 9]. С другой стороны, полунепрерывность снизу интеграла энергии [13, лемма 10] влечет

$$\int\limits_B |D_h g_0(x)|^\nu \xi(x)\, dx \le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_B |D_h g_k(x)|^\nu \xi(x)\, dx.$$

Ввиду произвольности выбора функции ξ имеем $\|D_h g_k\|_{\nu,sB} \to \|D_h g_0\|_{\nu,sB}$ при $k \to \infty$. Так как пространство W_ν^1 равномерно выпукло при $1 < \nu < \infty$, сходимость норм вместе с равномерной сходимостью $g_k \to g_0$ влечет сходимость (12). Свойства равномерно выпуклых пространств можно найти в [28]. $\square$

Группа отображений с 1-ограниченным искажением известна в явном виде только на группах Гейзенберга и в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$. На общих группах Карно структура отображений с 1-ограниченным искажением неизвестна.

Всюду далее в этом параграфе будем предполагать, что верна следующая

Гипотеза. *Если $K_O(f) = 1$, то отображение f с ограниченным искажением является гомеоморфизмом.*

В евклидовом случае и на группе Гейзенберга данная гипотеза выполняется, так как любое отображение с ограниченным искажением при $K_O = 1$ есть сужение действия мёбиусова преобразования. В частности, оно является гомеоморфизмом.

Применяя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Для всех фиксированных чисел $q, s \in (0,1)$ существуют неубывающие функции $\mu_3(\cdot, q) : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\mu_3(t,q) \to 0$ при $t \to 0$, $\mu_4(\cdot, q, s) : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\mu_4(t,q,s) \to 0$ при $t \to 0$, такие, что для любого отображения с ограниченным искажением $f : B(a,r) \to \mathbb{G}$, $B(a,r) \subset \mathbb{G}$, существует отображение θ с 1-ограниченным искажением, для которого*

$$\rho(\theta^{-1} \circ f(x), x) \le r\mu_3[K_O(f) - 1, q] \quad \text{для всех } x \in B(a, qr);$$
$$\Bigg(\int\limits_{B(a,qsr)} |D_h(\theta^{-1} \circ f)(x) - I|^\nu\, dx\Bigg)^{1/\nu} \le r\mu_4\big[K_O(f) - 1, q, s\big].$$

Поскольку мы предположили, что отображение с 1-ограниченным искажением — гомеоморфизм, из близости отображения f с ограниченным искажением к отображению с 1-ограниченным искажением в равномерной норме вытекает локальная инъективность f.

Лемма 4. *Пусть заданы непрерывное отображение $f : B(a,r) \to \mathbb{G}$ и отображение θ с 1-ограниченным искажением такие, что $\theta^{-1}(f(x))$ определено всюду* *на шаре $B(a,r)$ и $\rho(\theta^{-1}\circ f(x),x)<\frac{r}{2c^2}(1-c\sigma)$, $\sigma<\frac{1}{c}$, для всех $x\in B(a,r)$. Тогда f инъективно на шаре $B(a,\sigma r)$ и $\theta(x)\neq\infty$ для любого $x\in B(a,\sigma r)$.*

В евклидовом случае лемма 4 доказана в [3, гл. 4, лемма 2.6] и в [29].

Доказательство. Положим $g=\theta^{-1}\circ f$, $g_s(x)=g(x)\cdot(\delta_s g(x))^{-1}\cdot\delta_s x$, где $s\in[0,1]$. Тогда g_s — гомотопия отображения g в тождественное. Зададим произвольную точку $\xi\in\sigma B$ и положим $B_0=B\bigl(a,\bigl(1-c\frac{\sigma-h}{2}\bigr)r\bigr)$, где $h=\rho(\xi,a)$. Очевидно, $\sigma B\subset B_0\subset B$, $\rho(x,\xi)\geq\frac{1}{c}\bigl(1-c\frac{\sigma-h}{2}\bigr)r-hr>\bigl(\frac{1}{c}-\sigma\bigr)r$ для всех $x\in\partial B_0$ и

$$\begin{aligned}\rho(g_s(x),x)&=\rho((\delta_s g(x))^{-1}\cdot\delta_s x,(g(x))^{-1}\cdot x)\\&\leq c\rho(\delta_s g(x),\delta_s x)+c\rho(g(x),x)\leq(1/c-\sigma)r\quad\text{для всех } s\in[0,1],\ x\in B.\end{aligned}$$

Отсюда $\xi\notin g_s(\partial B_0)$. Следовательно, топологический индекс отображения g_s относительно точки ξ не зависит от s: $\mu(\xi,g,\overline{B}_0)=\mu(\xi,g_0,\overline{B}_0)=\mu(\xi,g_1,\overline{B}_0)=1$, так как $g_1=\mathrm{id}$. Поэтому $g_0=\theta^{-1}\circ f$ инъективно на σB и, следовательно, отображение f инъективно на σB, так как θ — гомеоморфизм. Получаем $\xi\in g(\overline{B}_0)\subset g(B)$. В силу произвольности выбора $\xi\in\sigma B$ будет $\sigma B\subset g(B)$. Следовательно, для любой точки $x\in\sigma B$ существует точка $y\in B$ такая, что $x=g(y)=\theta^{-1}(f(y))$ и $\theta(x)=f(y)\neq\infty$. $\square$

Следствие. *Существует такое число $\varepsilon_1>0$, что всякое отображение с ограниченным искажением, $K_O<1+\varepsilon_1$, определенное на области U группы $\mathbb{G}$, инъективно в шаре $B\bigl(a,\frac{5r}{12c}\bigr)$ при условии, что $B(a,r)\subset U$.*

В частности, отображение с ограниченным искажением, $K_O<1+\varepsilon_1$, является локальным гомеоморфизмом.

§ 4. Применение теории *BSO* на группах Гейзенберга

Группа Гейзенберга. Точки группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n\geq1$, отождествляются с точками пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$, $\dim V_1=2n$, $\dim V_2=1$, однородная размерность ν равна $2n+2$. Левоинвариантные векторные поля

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}+2x_{i+n}\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}},\quad X_{i+n}=\frac{\partial}{\partial x_{i+n}}-2x_i\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}},\quad i=1,\dots,n,$$

образуют базис V_1. Вместе с векторным полем $X_{2n+1}=\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}$ они образуют стандартный базис алгебры Ли V. Для них имеют место только следующие нетривиальные коммутационные соотношения:

$$[X_j,X_{j+n}]=-4X_{2n+1},\quad j=1,\dots,n.$$

В комплексной форме записи точку $x\in\mathbb{H}^n$ можно рассматривать как (z,t), где $z=(x_1+ix_{n+1},\dots,x_n+ix_{2n})\in\mathbb{C}^n$, $t=x_{2n+1}\in\mathbb{R}$. Тогда

$$(z,t)\cdot(w,p)=(z+w,t+p+2\operatorname{Im}(z,w))\quad\text{— групповая операция},$$

$$\rho(z,t)=(|z|^4+t^2)^{1/4}\quad\text{— однородная норма (9)},$$

$$\delta_s(z,t)=(sz,s^2t),\ s>0,\quad\text{— однопараметрическая группа растяжений.}$$

Лемма 5. *Имеет место неравенство $\rho(y\cdot x)\leq\rho(y)+\rho(x)$ для всех точек $y,x\in\mathbb{H}^n$ (т. е. $c=1$).*

Доказательство. Положим $x=(z,t)$, $y=(w,p)$, где $z,w\in\mathbb{C}^n$, $t,p\in\mathbb{R}$. Покажем, что $\rho(y\cdot x)^4\leq\bigl(\rho(x)+\rho(y)\bigr)^4$, т. е.

$$\begin{aligned}\rho(x)^4+\rho(y)^4+4|(w,z)|^2+4\operatorname{Re}(w,z)(|w|^2+|z|^2)+4\operatorname{Im}(w,z)(p+t)+2|z|^2|w|^2+2tp\\\leq\rho(x)^4+\rho(y)^4+4\rho(x)\rho(y)\bigl(\rho(x)^2+\rho(y)^2\bigr)+6\rho(x)^2\rho(y)^2.\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения: $\rho(y) = a$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, $|w| = a\sqrt{\cos\varphi}$, $|p| = a^2\sin\varphi$, $\rho(x) = b$, $\psi \in [0, \pi/2]$, $|z| = b\sqrt{\cos\psi}$, $|t| = b^2\sin\psi$, $\theta \in [0, \pi/2]$, $|\operatorname{Re}(w,z)| = \cos\theta|(w,z)|$, $|\operatorname{Im}(w,z)| = \sin\theta|(w,z)|$. Тогда

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Re}(w,z)(|w|^2+|z|^2) + \operatorname{Im}(w,z)(p+t)| \\ &\quad\le ab\sqrt{\cos\varphi\cos\psi}(a^2\cos\varphi\cos\theta + a^2\sin\varphi\sin\theta + b^2\cos\psi\cos\theta + b^2\sin\psi\sin\theta) \\ &\qquad\qquad = ab\sqrt{\cos\varphi\cos\psi}(a^2\sin(\varphi-\theta) + b^2\sin(\psi-\theta)) \le ab(a^2+b^2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |2|(w,z)|^2 + |z|^2|w|^2 + tp| &\le 3a^2b^2\cos\varphi\cos\psi + a^2b^2\sin\varphi\sin\psi \\ &\le 3a^2b^2\cos(\varphi-\psi) \le 3a^2b^2, \end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

В комплексной форме записи векторные поля

$$Z_j = \frac{1}{2}(X_j - i\,X_{j+n}) = \frac{\partial}{\partial z_j} + i\bar{z}_j\frac{\partial}{\partial t}, \quad \overline{Z}_j = \frac{1}{2}(X_j + i\,X_{j+n}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - i\,z_j\frac{\partial}{\partial t},$$

$$T = X_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial t},$$

$j = 1, \dots, n$, образуют левоинвариантный базис алгебры Ли V.

Группа мёбиусовых преобразований. Группа $SU(1, n+1)$ конформным образом действует на одноточечной компактификации $\widehat{\mathbb{H}}^n = \mathbb{H}^n \cup \{\infty\}$ группы Гейзенберга (см., например, [17, 18, 20]). Вместе с «отражением» $\iota : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$, $\iota(z,t) = (\bar{z}, -t)$, группа $SU(1, n+1)$ порождает группу M_n, конформно действующую на $\widehat{\mathbb{H}}^n$. Поскольку мы рассматриваем только сохраняющие ориентацию отображения, то $M_n = M_n^+ \cup M_n^-$, где $M_n^+ = SU(1, n+1)$ и

$$M_n^- = \begin{cases} SU(1, n+1)\iota & \text{при нечетных } n, \\ \varnothing & \text{при четных } n. \end{cases}$$

Всякий элемент M_n^+ является композицией следующих отображений [18, с. 35]:

1) левый сдвиг $\pi_a(x) = a \cdot x$, $a \in \mathbb{H}^n$;
2) растяжение $\delta_s x = (sz, s^2 t)$, $s > 0$;
3) поворот $\varphi_A(x) = (Az, t)$, $A \in U(n)$;
4) инверсия $j(x) = \left(\frac{z}{|z|^2 - it}, \frac{-t}{\rho(x)^4}\right)$.

Имеет место следующий аналог теоремы Лиувилля.

Теорема 5 (теорема типа Лиувилля [12, теорема 12], см. также [20]). *Если φ — отображение с ограниченным искажением связной области $U \subset \mathbb{H}^n$ и $K_O(\varphi) = 1$, то φ равно сужению на U действия элемента группы M_n.*

Обычно в группу конформных отображений включают постоянные отображения. Мы рассматриваем только непостоянные отображения. По аналогии с евклидовым случаем будем называть M_n *группой мёбиусовых преобразований*. Очевидным следствием теоремы типа Лиувилля является выполнение гипотезы из § 3 о гомеоморфности отображений с 1-ограниченным искажением.

Для C^4-гладких квазиконформных отображений теорема типа Лиувилля доказана в [17], а для произвольных квазиконформных отображений — в [19].

Предложение 1. *Пусть $\varphi \in M_n$. Тогда $\varphi = \pi_c \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ j \circ \pi_b \circ j$, если $\varphi \in M_n^+$, и $\varphi = \iota \circ \pi_c \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ j \circ \pi_b \circ j$, если $\varphi \in M_n^-$,* где $b, c \in \mathbb{H}^n$, $A \in U(n)$, $\tau \in (0, \infty)$.

В частности, если $\varphi(\infty)=\infty$, *то* $b=0$ *и* $\varphi=(\iota\circ)\,\pi_c\circ\varphi_A\circ\delta_\tau$.

Доказательство. Можно считать, что $\varphi\in M_n^+$, иначе рассмотрим $\iota\circ\varphi$. Нетрудно проверить, что $\iota\circ\iota=\mathrm{id}$, $\iota\circ\pi_a=\pi_{\iota(a)}\circ\iota$, $\iota\circ\delta_s=\delta_s\circ\iota$, $\iota\circ\varphi_A=\varphi_{\overline{A}}\circ\iota$, $\pi_a\circ\pi_b=\pi_{ab}$, $\pi_a\circ\delta_s=\delta_s\circ\pi_{\delta_{\frac{1}{s}}a}$, $\pi_a\circ\varphi_A=\varphi_A\circ\pi_{\varphi_{A^*}(a)}$, $\delta_{s_1}\circ\delta_{s_2}=\delta_{s_1s_2}$, $\delta_s\circ\varphi_A=\varphi_A\circ\delta_s$, $\delta_s\circ j=j\circ\delta_{\frac{1}{s}}$, $\varphi_A\circ\varphi_B=\varphi_{AB}$, $\varphi_A\circ j=j\circ\varphi_A$, $j\circ j=\mathrm{id}$, $\iota\circ j=j\circ\iota$, где $a,b\in\mathbb{H}^n$, $s,s_1,s_2>0$, $A,B\in U(n)$. Только инверсия и сдвиг не перестановочны. Однако для всякой точки $\mathbf{b}=(b,\beta)\in\mathbb{H}^n$, $b\in\mathbb{C}^n$, $\beta\in\mathbb{R}$, выполнено

$$j\circ\pi_{\mathbf{b}}\circ j=\varphi_A\circ\delta_\tau\circ\pi_{\mathbf{d}}\circ j\circ\pi_{\mathbf{c}},\quad \text{где}\quad \mathbf{c}=\left(\frac{b}{|b|^2+i\beta},\frac{-\beta}{|a|^4}\right),$$

$$\mathbf{d}=\left(\frac{-b(|b|^2-i\beta)}{|b|^2+i\beta},-\beta\right),\quad \tau=\frac{1}{|\mathbf{b}|^2},\quad A=\frac{|\mathbf{b}|^2I}{|b|^2-i\beta}-\frac{2(|b|^2+i\beta)}{|\mathbf{b}|^2(|b|^2-i\beta)}b\cdot b^t.$$

Следовательно, φ имеет нужный вид. $\square$

Алгебра Ли группы M_n^+. Обозначим через Σ_n^+ алгебру Ли группы M_n^+. По определению алгебры Ли векторному полю $v\in\Sigma_n^+$ соответствует однопараметрическая группа отображений $h_s=\exp sv$ из M_n^+, $h_0=\mathrm{id}$, $h_s\circ h_t=h_{s+t}$ для всех $s,t>0$.

В базисе $Z_1,\dots,Z_n,\overline{Z}_1,\dots,\overline{Z}_n,T$ векторное поле v записывается в виде $v=(u,p)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_kZ_k+\bar{u}_k\overline{Z}_k+pT$, где $u:\mathbb{H}^n\to\mathbb{C}^n$, $p:\mathbb{H}^n\to\mathbb{R}$.

Лемма 6. *Линейное пространство* Σ_n^+ *натянуто на следующие подпространства:*

1) $(a,b+4\operatorname{Im}(a,z))$, $a\in\mathbb{C}^n$, $b\in\mathbb{R}$, $h_s=\pi_{(sa,sb)}$;

2) $(\alpha z,2\alpha t)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $h_s=\delta_{e^{\alpha s}}$;

3) $(Bz,2\operatorname{Im}(Bz,z))$, $B+B^*=0$ — *косоэрмитова* $(n\times n)$-*матрица*, $h_s=\varphi_{e^{sB}}$;

4) $((|z|^2-it)(i\gamma z+c)-2(z,c)z,\gamma\rho(x)^4-4|z|^2\operatorname{Im}(z,c)-4t\operatorname{Re}(z,c))$, $c\in\mathbb{C}^n$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $h_s=j\circ\pi_{(sc,s\gamma)}\circ j$.

Доказательство. В силу [18, предложения 24, 25] векторное поле $v=(u,p)$ принадлежит Σ_n^+, если $p\in C^\infty$, $Z_jZ_kp\equiv0$ для всех $j,k=1,\dots,n$ и $u=\frac{i\overline{Z}p}{2}$. Нетрудно проверить, что во всех случаях эти условия выполнены.

Осталось показать, что в Σ_n^+ ничего больше нет. Из теоремы 5 мы знаем, что $\dim\Sigma_n^+=\dim M_n^+=\dim SU(1,n+1)=n^2+4n+3$. Таким образом, мы нашли размерность Σ_n^+: $2n+1$ (сдвиги) $+1$ (растяжение) $+n^2$ (повороты) $+2n+1$ (инверсия со сдвигом). $\square$

Производные мёбиусовых преобразований и допустимый класс. Фиксируем число $h_2>1$. Для шара $B=B(a,r)$ обозначим через B'' шар $B(a,h_2r)$.

Покажем, что аналогично евклидову случаю (см. [3, гл. 4, леммы 2.4, 2.5]) производные мёбиусовых преобразований групп Гейзенберга образуют допустимый класс.

Теорема 6. *Класс* $SM=\{SM(B)\}_{B\subset\mathbb{H}^n}$, *где* $SM(B)=\{D_h\varphi\mid\varphi\in M_n,\ \infty\notin\varphi(B'')\}$, *удовлетворяет условиям* I–III *определения* 1 *для допустимого класса.*

Лемма 7. *Пусть* $j(x) = \left(\frac{z}{|z|^2-it}, \frac{-t}{\rho(x)^4}\right)$, $x = (z,t)$, *— инверсия. Тогда* $|D_h j(x)| = \rho(x)^{-2}$ *для всех* $x \neq 0$.

Доказательство. Для всех $k, m = 1, \dots, n$ имеем

$$\overline{Z}_m j_k = \frac{-z_k(z_m - i(-iz_m))}{(|z|^2-it)^2} = 0, \quad Z_m j_k = \frac{\delta_{km}}{|z|^2-it} - \frac{2z_k\bar{z}_m}{(|z|^2-it)^2}.$$

Отсюда $Zj = \frac{1}{|z|^2-it}I - \frac{2z\cdot\bar{z}^t}{(|z|^2-it)^2}$, где $z\cdot\bar{z}^t = \begin{pmatrix} z_1\bar{z}_1 & \dots & z_1\bar{z}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n\bar{z}_1 & \dots & z_n\bar{z}_n \end{pmatrix}$ — (n,n)-матрица. Поскольку

$$(Zj)^*Zj = \left(\frac{1}{|z|^2+it}I - \frac{2z\cdot\bar{z}^t}{(|z|^2+it)^2}\right)\left(\frac{1}{|z|^2-it}I - \frac{2z\cdot\bar{z}^t}{(|z|^2-it)^2}\right) = \frac{1}{\rho(x)^4}I,$$

то $|D_h j| = \left|\begin{pmatrix} \operatorname{Re} Zj + \operatorname{Re}\overline{Z}j & -\operatorname{Im} Zj + \operatorname{Im}\overline{Z}j \\ \operatorname{Im} Zj + \operatorname{Im}\overline{Z}j & \operatorname{Re} Zj - \operatorname{Re}\overline{Z}j \end{pmatrix}\right| = |Zj| = \rho(x)^{-2}$. $\square$

Лемма 8. *Пусть заданы две точки* $x, y \in \mathbb{H}^n$ *такие, что* $\rho(x,y) < 1$ *и* $\min\{\rho(x), \rho(y)\} \geq \delta > 0$. *Тогда*

$$|D_h j(x) - D_h j(y)| \leq C \max\{\rho(x)^{-2}, \rho(y)^{-2}\} \, \|x^{-1}\cdot y\|_{\mathbb{R}^{2n+1}}.$$

Константа C *зависит только от* δ.

Доказательство. Положим $x = (z,t)$, $y = (w,p)$, где $z, w \in \mathbb{C}^n$, $t, p \in \mathbb{R}$, и $\gamma = \|x^{-1}\cdot y\|_{\mathbb{R}^{2n+1}} = (|w-z|^2 + |p-t-2\operatorname{Im}(z,w)|^2)^{1/2}$. Очевидно, что $\gamma < 1$ при условии, что $\rho(x^{-1}\cdot y) < 1$.

Без ограничения общности можно считать, что $\delta \leq \rho(x) \leq \rho(y)$. Так как $\overline{Z}j \equiv 0$, то $|D_h j(x) - D_h j(y)| = |Zj(x) - Zj(y)|$. Следовательно,

$$|D_h j(x) - D_h j(y)| = \left|\frac{1}{|z|^2-it}I - \frac{2z\bar{z}^t}{(|z|^2-it)^2} - \frac{1}{|w|^2-ip}I + \frac{2w\overline{w}^t}{(|w|^2-ip)^2}\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{|z|^2-it} - \frac{1}{|w|^2-ip}\right| + \left|\frac{2\,z\,\bar{z}^t}{(|z|^2-it)^2} - \frac{2\,w\,\overline{w}^t}{(|w|^2-ip)^2}\right| = I_1 + I_2.$$

Оценим I_1:

$$I_1 = \frac{1}{\rho(x)^2}\frac{\big||w|^2 - |z|^2 - i(p-t)\big|}{\rho(y)^2}$$
$$\leq \frac{\big||w|-|z|\big|(|w|+|z|) + |p-t-2\operatorname{Im}(z,w)| + 2|\operatorname{Im}(z,w-z)|}{\rho(x)^2\rho(y)^2}$$
$$\leq \frac{\gamma}{\rho(x)^2}\frac{3\rho(x)+\rho(y)+1}{\rho(y)^2} \leq \frac{\gamma}{\rho(x)^2}\left(\frac{4}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right).$$

Обозначим $v = z - w$. Имеем $|v| \leq \gamma$ и $z\bar{z}^t = (w+v)(\overline{w}+\bar{v})^t$. Следовательно, I_2 оценивается как

$$I_2 = \left|2\frac{w\overline{w}^t + w\bar{v}^t + v\overline{w}^t + v\bar{v}^t}{(|z|^2-it)^2} - \frac{2w\overline{w}^t}{(|w|^2-ip)^2}\right|$$
$$\leq 2|w|^2 I_1 \left|\frac{1}{|z|^2-it} + \frac{1}{|w|^2-ip}\right| + 2\left|\frac{w\,\bar{v}^t + v\,\overline{w}^t + v\,\bar{v}^t}{(|z|^2-it)^2}\right|$$
$$\leq 2\rho(y)^2\frac{\gamma}{\rho(x)^2}\frac{3\rho(x)+\rho(y)+1}{\rho(y)^2}\left(\frac{1}{\rho(x)^2} + \frac{1}{\rho(y)^2}\right) + 2\frac{2\gamma\rho(y)+\gamma^2}{\rho(x)^4}$$
$$\leq \frac{2\gamma}{\rho(x)^2}\left(\frac{10}{\delta} + \frac{7}{\delta^2}\right). \quad \square$$

Фиксируем $1 < h_1 < h_2$. Обозначим $B = B(a,r)$, $B' = B(a,h_1r)$, $B'' = B(a,h_2r)$.

Лемма 9. *Пусть $\varphi \in M_n$, $\varphi(x) \neq \infty$ для всех $x \in B''$. Тогда*

$$\alpha_1\|D_h\varphi\|_{C(B)} \leq |D_h\varphi(x)| \leq \alpha_2\|D_h\varphi\|_{C(B)}$$

для всех $x \in B'$. Здесь $\|D_h\varphi\|_{C(B)} = \sup\limits_{x\in\overline{B}}|D_h\varphi(x)|$, константы α_1, α_2 зависят только от h_1 и h_2.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi \in M_n^+$. Если $\varphi(\infty) = \infty$, то по предложению 1 $\varphi = \pi_a \circ \varphi_A \circ \delta_\tau$ и $D_h\varphi(x) = \tau A$. В этом случае лемма, очевидно, верна.

Если $\varphi(\infty) \neq \infty$, то $\varphi = \pi_b \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ (j \circ \pi_{c^{-1}})$, где $b, c \in \mathbb{H}^n$, $\tau \in (0,\infty)$, $A \in U(n)$. Мёбиусово преобразование φ переводит точку c в ∞. По условию леммы отсюда вытекает, что точка c лежит вне шара B''. В силу леммы 7 имеем $|D_h\varphi(x)| = \tau|D_hj(c^{-1}\cdot x)| = \frac{\tau}{\rho(c,x)^2}$.

Введем следующие обозначения: x_1 — ближайшая точка замкнутого шара $\overline{B}'$ к точке c; x_2 — ближайшая точка замкнутого шара $\overline{B}$ к точке c; x_3 — наиболее удаленная точка замкнутого шара $\overline{B}'$ от точки c; $l_i = \rho(c, x_i)$. Очевидно, $l_2 \leq l_1 + (h_1+1)r$, $l_3 \leq l_2 + 2r$ и $\|D_h\varphi\|_{C(B)} = \tau l_2^{-2}$. Так как $c \notin B''$, то $l_1 \geq (h_2-h_1)r$ и $l_2 \geq (h_2-1)r$. Имеем

$$l_3^{-2}l_2^2\|D_h\varphi\|_{C(B)} \leq \tau l_3^{-2} \leq |D_h\varphi(x)| \leq \tau l_1^{-2} \leq l_1^{-2}l_2^2\|D_h\varphi\|_{C(B)}$$

для всех точек $x \in B'$. Оценим коэффициенты:

$$\frac{l_2^2}{l_1^2} \leq \left(1 + \frac{r(h_1+1)}{l_1}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{h_1+1}{h_2-h_1}\right)^2 = \alpha_2,$$

$$\frac{l_3^2}{l_2^2} \leq \left(1 + \frac{2rh_1}{l_2}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{2h_1}{h_2-1}\right)^2 = \frac{1}{\alpha_1}. \qquad \square$$

Следствие. *Пусть $\varphi \in M_n$, $\varphi(x) \neq \infty$ для всех $x \in B''$. Тогда*

$$\alpha_1|B|^{-1/p}\|D_h\varphi\|_{p,B} \leq |D_h\varphi(x)| \leq \alpha_1^{-1}|B|^{-1/p}\|D_h\varphi\|_{p,B} \quad \text{для всех } x \in B'.$$

Лемма 10. *Пусть $\varphi, \psi \in M_n$ и $\varphi, \psi \neq \infty$ на B''. Тогда*

$$|D_h\varphi(x) - D_h\psi(x)| \leq \frac{\alpha_3}{|B|}\int\limits_B |D_h\varphi(y) - D_h\psi(y)|\,dy$$

для всех $x \in B$. Константа α_3 зависит только от h_2.

Доказательство аналогично доказательству в евклидовом случае (см. [3, гл. 4, лемма 2.5]).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $B = B(a,r) = B(0,1)$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\|D_h\psi\|_{C(B)} \leq \|D_h\varphi\|_{C(B)} = 1$. Обозначим

$$\rho_1(\varphi,\psi) = \max_{x\in\overline{B}}|D_h\varphi(x) - D_h\psi(x)|, \quad \rho_2(\varphi,\psi) = \int\limits_B |D_h\varphi(y) - D_h\psi(y)|\,dy.$$

Покажем, что отношение $\rho_1(\varphi,\psi)/\rho_2(\varphi,\psi)$ ограничено сверху для всех мёбиусовых отображений φ и ψ, удовлетворяющих условиям нормировки.

Предположим противное. Тогда существуют последовательности φ_m и ψ_m такие, что $\rho_1(\varphi_m,\psi_m)/\rho_2(\varphi_m,\psi_m) \to \infty$ при $m \to \infty$.

Так как $\|D_h\psi_m\|_{C(B)} \leq \|D_h\varphi_m\|_{C(B)} = 1$ и $\varphi_m(0) = \psi_m(0) = 0$, то последовательности ψ_m и φ_m равномерно равностепенно непрерывны в шаре $\overline{B}$. Следовательно, переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $\psi_m \rightrightarrows \psi_0$ и $\varphi_m \rightrightarrows \varphi_0$ при $m \to \infty$, $\psi_0, \varphi_0 \in M_n$. В общем случае возможно, что $\psi_0 \equiv 0$. Функция φ_0 не является тождественно постоянной, так как $D_h\varphi_m \to D_h\varphi_0$ равномерно на шаре B при $m \to \infty$. Тем самым $\max\limits_{x\in\overline{B}} |D_h\varphi_0(x)| = 1$.

Очевидно, что $\rho_i(\varphi_m, \psi_m) \to \rho_i(\varphi_0, \psi_0)$ при $m \to \infty$, $i = 1, 2$. Так как по предположению $\rho_1(\varphi_m, \psi_m)/\rho_2(\varphi_m, \psi_m) \to \infty$, то $\rho_2(\varphi_0, \psi_0)$ должно быть равно 0. Следовательно, $\varphi_0 = \psi_0$, что невозможно, если $\varphi_0 \in M_n^+$, $\psi_0 \in M_n^-$ или $\psi_0 \in M_n^+$, $\varphi_0 \in M_n^-$.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $\varphi_m, \psi_m \in M_n^+$, $m = 0, 1, \dots$.

Пусть $\alpha : U \to \mathbb{R}^d$, $d = \dim M_n^+ = n^2 + 4n + 3$, — допустимая карта в многообразии M_n^+ в окрестности U точки φ_0. Положим $\alpha(\varphi_0) = 0$, $\alpha(U) = V$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^d$. Для $x \in \mathbb{H}^n$, $t \in V$ положим $\varphi_t(x) = \varphi(x, t) = \alpha^{-1}(t)$. Пусть $\varphi_m(x) = \varphi(x, t_m)$, $\psi_m(x) = \varphi(x, u_m)$. Без ограничения общности можно считать, что $q_m = (t_m - u_m)/|t_m - u_m|$ при $m \to \infty$ стремится к единичному вектору q. Имеем

$$\frac{\varphi_m(x) - \psi_m(x)}{|t_m - u_m|} = \frac{\varphi(x, t_m) - \varphi(x, u_m)}{|t_m - u_m|} \to \sum_{j=1}^{d} q_j \frac{\partial}{\partial t_j}\varphi(x, 0) = \partial_q\varphi(x, 0)$$

при $m \to \infty$. Аналогичным образом получаем

$$\frac{D_h\varphi_m(x) - D_h\psi_m(x)}{|t_m - u_m|} = \frac{D_h\varphi(x, t_m) - D_h\varphi(x, u_m)}{|t_m - u_m|} \\ \to \sum_{j=1}^{d} q_j \frac{\partial}{\partial t_j} D_h\varphi_0(x) = \partial_q D_h\varphi_0(x)$$

при $m \to \infty$. Положим $Y(x) = \partial_q\varphi_0(x) \in \Sigma_n^+$. Тогда $D_hY(x) = \partial_q D_h\varphi_0(x)$. Покажем, что $D_hY(x)$ не обращается тождественно в нуль на шаре $\overline{B}$.

Действительно, в противном случае $Y(x) = Y(0) = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{\varphi_m(0)-\psi_m(0)}{|t_m-u_m|} = 0$. Напомним, что $|q| = 1$. Следовательно, α — вырожденная система координат. Отсюда

$$\frac{\rho_1(\varphi_m, \psi_m)}{\rho_2(\varphi_m, \psi_m)} = \frac{\rho_1(\varphi_m, \psi_m)}{|t_m - u_m|}\left(\frac{\rho_2(\varphi_m, \psi_m)}{|t_m - u_m|}\right)^{-1} \to \frac{\max\limits_{x\in C(\overline{B})} |D_hY(x)|}{\int\limits_B |D_hY(x)|\,dx} \neq \infty. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 6. Теорема 6 является прямым следствием лемм 9 и 10. $\square$

§ 5. Доказательство теоремы 2

Обозначение. 1. Для элемента $x = (x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \mathbb{H}^n$ обозначим $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{2n})$.

2. Положим $(u)_B := \frac{1}{|B|}\int\limits_B u(x)\,dx$ для измеримой функции u на шаре B.

3. Введем следующее обозначение для отображения $\varphi : B \to \mathbb{H}^n$, $B \subset \mathbb{H}^n$:

$$(\varphi)_B = \left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \varphi_1(x)\,dx, \frac{1}{|B|}\int\limits_B \varphi_2(x)\,dx, \dots, \frac{1}{|B|}\int\limits_B \varphi_{2n+1}(x)\,dx\right).$$

Как и в евклидовом случае, интегральная близость производных двух отображений влечет близость самих отображений. Мы доказываем этот факт с помощью теорем вложения, которые для функций класса Соболева на группах Карно можно найти, например, в [30].

Лемма 11. *Пусть для некоторого числа $\omega < 1$ и непрерывных отображений $f, \theta \in W_p^1(B(a,r), \mathbb{H}^n)$ выполняется*

$$\|D_h f - D_h\theta\|_{p,B(a,r)} \le \omega \|D_h\theta\|_{p,B(a,r)}.$$

Положим $\psi(x) := [\theta(x)]^{-1} \cdot f(x)$ для всех $x \in B(a,r)$.

1. *Если $p \ge 2$ и $(\psi)_{B(a,r)} = 0$, то*

$$\|\widetilde{\psi}\|_{p,B(a,r)} \le C_1 r\omega \|D_h\theta\|_{p,B(a,r)} \quad \text{и} \quad \|\psi_{2n+1}\|_{p/2,B(a,r)} \le C_2 r^2 \omega \|D_h\theta\|^2_{p,B(a,r)}.$$

В частности, $\|\rho(f(x), \theta(x))\|_{p,B(a,r)} \le C_3 r\sqrt{\omega}\|D_h\theta\|_{p,B(a,r)}$. Константы C_1, C_2, C_3 зависят от n и p.

2. *Если $p > \nu$ и $\psi(a) = 0$, то для всякого $s \in (0,1)$ выполнено*

$$\rho(f(x), \theta(x)) \le C_4 r^{1-\nu/p}\sqrt{\omega}\|D_h\theta\|_{p,B(a,r)} \quad \text{для всех } x \in B(a, sr).$$

Константа C_4 зависит от n, p и s.

Доказательство. Обозначим $B = B(a,r)$. Оценим $\nabla_{\mathscr{L}}\psi_i(x)$ для всех $i = 1, \dots, 2n+1$. Очевидно, что

$$\|\nabla_{\mathscr{L}}\psi_i\|_{p,B} = \|\nabla_{\mathscr{L}} f_i - \nabla_{\mathscr{L}}\theta_i\|_{p,B} \le \|D_h f - D_h\theta\|_{p,B}, \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Поскольку

$$\psi_{2n+1}(x) = f_{2n+1}(x) - \theta_{2n+1}(x) + 2\sum_{j=1}^{n}\big(\theta_j(x) f_{j+n}(x) - \theta_{j+n}(x) f_j(x)\big),$$

в силу условия контактности ($X_i f(x) \in V_1(f(x))$, $i = 1, \dots, 2n$) для отображений f и θ для всех $i = 1, \dots, 2n$ имеем

$$\begin{aligned} X_i\psi_{2n+1} &= X_i f_{2n+1} - X_i\theta_{2n+1} \\ &\quad + 2\sum_{j=1}^{n}\big(X_i\theta_j f_{j+n} + \theta_j X_i f_{j+n} - X_i\theta_{j+n} f_j - \theta_{j+n} X_i f_j\big) \\ &= 2\sum_{j=1}^{n}(f_{j+n} - \theta_{j+n})(X_i f_j + X_i\theta_j) - (f_j(x) - \theta_j)(X_i f_{j+n} + X_i\theta_{j+n}). \end{aligned}$$

Получаем $|X_i\psi_{2n+1}(x)| \le 2|\widetilde{\psi}(x)|\,|X_i\tilde{f}(x) + X_i\tilde{\theta}(x)|$ для всех $i = 1, \dots, 2n$.

Пусть $p \ge 2$ и $(\psi)_B = 0$. Из неравенства Пуанкаре следуют требуемые соотношения:

$$\|\psi_k\|_{p,B} \le Cr\|\nabla_{\mathscr{L}}\psi_k\|_{p,B} \le Cr\omega\|D_h\theta\|_{p,B}, \quad k = 1, \dots, 2n,$$

$$\begin{aligned} \|\psi_{2n+1}\|_{p/2,B} &\le Cr\|\nabla_{\mathscr{L}}\psi_{2n+1}\|_{p/2,B} \\ &\le 2Cr\|\widetilde{\psi}(x)\|_{p,B}\|D_h f + D_h\theta\|_{p,B} \le Cr^2\omega\|D_h\theta\|^2_{p,B}. \end{aligned}$$

Пусть $p > \nu$ и $\psi(a) = 0$ или, эквивалентно, $f(a) = \theta(a)$. Из теоремы вложения получаем

$$|\psi_k(x)| \le Cr^{1-\nu/p}\|\nabla_{\mathscr{L}}\psi_k\|_{p,B} \le Cr^{1-\nu/p}\omega\|D_h\theta\|_{p,B} \quad \text{для всех } x \in \frac{\sigma+1}{2}B, \quad k = 1, \dots, 2n,$$

$$|\psi_{2n+1}(x)| \le Cr^{1-\nu/p}\|\nabla_{\mathscr{L}}\psi_{2n+1}\|_{p,\frac{\sigma+1}{2}B} \le C_1 r^{1-\nu/p}\|\widetilde{\psi}\|_{C(\frac{\sigma+1}{2}B)}\|D_h f + D_h\theta\|_{p,B}$$
$$\le C_2 r^{2-2\nu/p}\omega\|D_h\theta\|^2_{p,B} \quad \text{для всех } x \in \sigma B.$$

Следовательно, $\rho(f(x),\theta(x)) \le C_3 r^{1-\nu/p}\sqrt{\omega}\|D_h\theta\|_{p,B}$ для всех $x \in B(a,\sigma r)$. $\square$

Обозначим $B = B(a,r)$, $B' = B(a,h_1 r)$, $B'' = B(a,h_2 r)$, $\widehat{B} = B(a,h_3 r)$, где $1 < h_1 < h_2 < h_3$.

Лемма 12. *Пусть $f \in W^1_p(\widehat{B},\mathbb{H}^n)$, $p \ge 2$, $\theta \in M_n$, $g = \theta^{-1}\circ f$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) $\rho(g(x),x) \le \upsilon r$ *для всех* $x \in \widehat{B}$,

2) $(\psi)_B = 0$, *где* $\psi(x) = x^{-1}\cdot g(x)$,

3) $\|D_h g(x) - I\|_{p,B} \le \omega r^{\nu/p}$, $\omega < 1$.

Тогда существует постоянная $\upsilon_0 < 1$ такая, что при $\upsilon < \upsilon_0$ справедливо неравенство

$$\|D_h f(x) - D_h\theta(x)\|_{p/2,B} \le C\omega\|D_h\theta\|_{p/2,B}$$

и $\theta(x) \ne \infty$ для всех $x \in B''$. Константа C зависит от n и p.

Доказательство. В силу леммы 4 $\theta(x) \ne \infty$ для всех $x \in B''$ и $g(B) \subset B'$, если $\upsilon < \frac{h_3-h_2}{4}$ и $\upsilon < h_1 - 1$. Положим $\upsilon_0 = \min\bigl\{\frac{h_3-h_2}{4}, h_1-1, 1\bigr\}$ и рассмотрим $\upsilon < \upsilon_0$.

Фиксируем точку $x \in B$. Имеем

$$D_h f(x) - D_h\theta(x) = D_h(\theta\circ g)(x) - D_h\theta(x) = D_h\theta(g(x))D_h g(x) - D_h\theta(x)$$
$$= D_h\theta(g(x))(D_h g(x) - I) + (D_h\theta(g(x)) - D_h\theta(x)).$$

Следовательно,

$$\|D_h f - D_h\theta\|_{p/2,B} \le \|D_h\theta\|_{C(B')}\|D_h g - I\|_{p/2,B} + \|D_h\theta(g(\cdot)) - D_h\theta(\cdot)\|_{p/2,B}.$$

Оценим второе слагаемое. Без ограничения общности можно считать, что $\theta \in M_n^+$.

(i) Пусть $\theta(\infty) = \infty$. Тогда $D_h\theta \equiv \mathrm{const}$ и, следовательно, $D_h\theta(g(\cdot)) - D_h\theta(\cdot) \equiv 0$.

(ii) Пусть $\theta(\infty) \ne \infty$. Тогда по предложению 1 $\theta = \pi_c\circ\delta_\tau\circ\varphi_A\circ j\circ\pi_{-b}$, где $c,b \in \mathbb{H}^n$, $A \in U(n)$, $\tau > 0$.

Рассмотрим отображение $\delta_r\circ\theta = \pi_{\delta_r c}\circ\delta_\tau\circ\varphi_A\circ j\circ\delta_{1/r}\circ\pi_{-b}$ и точку $x \in B$.

Положим $y_1 = y_1(x) = \delta_{1/r}(-b\cdot g(x))$ и $y_2 = y_2(x) = \delta_{1/r}(-b\cdot x)$. Очевидно, что $D_h\theta(g(x)) = \frac{\tau}{r^2}A\,D_h j(y_1)$ и $D_h\theta(x) = \frac{\tau}{r^2}A\,D_h j(y_2)$. Так как $\theta \ne \infty$ на шаре B'', то $b \notin B''$ и, следовательно, $\rho(y_1) \ge h_2 - h_1$ и $\rho(y_2) \ge h_2 - 1$.

Легко видеть, что $\rho(y_1,y_2) = \frac{1}{r}\rho(\psi(x)) < \upsilon$ и $\bigl\|y_2^{-1}\cdot y_1\bigr\| \le \rho(y_1,y_2) < 1$, если $\upsilon < 1$. Применяя лемму 8 для точек y_1, y_2, получаем

$$|D_h\theta(g(x)) - D_h\theta(x)| = \frac{\tau}{r^2}|D_h j(y_1) - D_h j(y_2)|$$
$$\le C\frac{\tau}{r^2}\bigl\|y_2^{-1}\cdot y_1\bigr\|\max\{\rho(y_1)^{-2},\rho(y_2)^{-2}\} \le C\bigl\|y_2^{-1}\cdot y_1\bigr\|\cdot\|D_h\theta\|_{C(B')}.$$

В силу леммы 11

$$\bigl\|y_2^{-1}\cdot y_1\bigr\|_{p/2,B} \le \frac{1}{r}\|\widetilde{\psi}\|_{p/2,B} + \frac{1}{r^2}\|\psi_{2n+1}\|_{p/2,B} \le Cr^{2\nu/p}\omega.$$

Следовательно, $\|D_h\theta(g(\cdot)) - D_h\theta(\cdot)\|_{p/2,B} \le Cr^{2\nu/p}\omega\|D_h\theta\|_{C(B')}$. По лемме 9 и ее следствию $\|D_h\theta\|_{C(B')} \le \frac{\|D_h\theta\|_{p/2,B}}{\alpha_1|B|^{2/p}}$. Отсюда

$$\|D_hf - D_h\theta\|_{p/2,B} \le \frac{\|D_h\theta\|_{p/2,B}}{\alpha_1|B|^{2/p}}\|D_hg - I\|_{p,B}|B|^{2/p} + \frac{\|D_h\theta\|_{p/2,B}}{\alpha_1|B|^{2/p}}C\omega r^{2\nu/p}$$
$$\le C\omega\|D_h\theta\|_{p/2,B}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 2. Нетрудно проверить, что шары в метрике Гейзенберга удовлетворяют условию (1) с некоторой константой $\varkappa > 1$.

Рассмотрим шар $B(a_0, r_0) \subset U$ и шар $B_0 = B\big(a_0, \frac{5r_0}{18}\big)$. Положим $h_1 = \frac{6}{5}$, $h_2 = \frac{3}{2}$, $h_3 = \frac{9}{5}$. Тогда $\widehat{B}_0 = B\big(a_0, \frac{r_0}{2}\big)$. По теореме 4 существует отображение $\zeta \in M_n$ такое, что

$$\sup_{x\in\widehat{B}_0} \rho(\zeta^{-1}\circ f(x), x) \le r_0\mu_3(K_O - 1, 1/2),$$
$$\|D_h(\zeta^{-1}\circ f) - I\|_{\nu,B_0} \le r_0\mu_4(K_O - 1, 1/2, 5/9).$$

Обозначим $\psi(x) = x^{-1}\cdot(\pi_{-b}\circ\zeta^{-1}\circ f(x))$, где $b \in \mathbb{H}^n$ такое, что $(\psi)_{B_0} = 0$. Положим $g = \pi_{-b}\circ\zeta^{-1}\circ f = \varphi^{-1}\circ f$, где $\varphi = \zeta\circ\pi_b \in M_n$. Отметим, что $g : \widehat{B}_0 \to \mathbb{H}^n$ является отображением с ограниченным искажением, $K_O(g) = K_O(f) = K_O$, $D_hg = D_h(\zeta^{-1}\circ f)$ и

$$\sup_{x\in\widehat{B}_0} \rho(g(x), x) \le r_0(c_1\mu_3(K_O - 1, 1/2) + c_2\sqrt{\mu_3(K_O - 1, 1/2)}) = r_0\mu_5(K_O - 1).$$

Пусть $K_O < 1 + \varepsilon_2$, где ε_2 такое, что $\frac{18}{5}\mu_5(\varepsilon_2) < \upsilon_0$, υ_0 из леммы 12, и $\frac{18}{5}\mu_4(\varepsilon_2, 1/2, 5/9) < 1$. Тогда по лемме 12

$$\|D_hf - D_h\varphi\|_{\frac{\nu}{2},B_0} \le C\mu_4(K_O - 1, 1/2, 5/9)\|D_h\varphi\|_{\frac{\nu}{2},B_0} = \mu_0(K_O - 1)\|D_h\varphi\|_{\frac{\nu}{2},B_0}.$$

Рассмотрим шар $B = B(a, r) \subset \frac{1}{2}B_0$. Отображение с ограниченным искажением g задано на шаре $\widehat{B}_0 \supset 2\widehat{B}$. Поэтому, повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $D_hg \in BSO_{\nu/2}(SM)$ на шаре $\frac{1}{2}B_0$ и $\operatorname{osc}(D_hg, \nu/2, SM) = \mu_0(K_O - 1)$.

По теореме 1 существует константа σ_0 такая, что если $\mu_0(K_O - 1) < \sigma_0$, то для D_hg можно улучшить показатель интегрируемости на шаре $\frac{9}{10}\big(\frac{1}{2}B_0\big) = B\big(a_0, \frac{r_0}{8}\big)$. Если $K_O < \varepsilon_0 + 1$, где $0 < \varepsilon_0 \le \varepsilon_2$, $\mu_0(\varepsilon_0) < \sigma_0$ и $\frac{2\sigma_0}{\mu_0(\varepsilon_0)} > \nu$, то остальные утверждения теоремы вытекают из лемм 11 и 12. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуров Л. Г., Решетняк Ю. Г.* Об одном аналоге понятия функции с ограниченным средним колебанием // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 540–546.
2. *Гуров Л. Г.* Об устойчивости преобразований Лоренца. Оценки для производных // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 2. С. 273–276.
3. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996.
4. *Buckley S. M.* Inequalities of John–Nirenberg type in doubling spaces // J. Anal. Math. 1999. V. 79. P. 215–240.
5. *Franchi B., Pérez C., Wheeden R. L.* Self-improving properties of John–Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type // J. Funct. Anal. 1998. V. 153, N 1. P. 108–146.
6. *MacManus P., Pérez C.* Generalized Poincaré inequalities: Sharp self-improving properties // Internat. Math. Res. Notices. 1998. V. 1998, N 2. P. 101–116.
7. *Wik I.* Note on a theorem by Reshetnyak–Gurov // Studia Math. 1987. V. 86. P. 193–200.
8. *Водопьянов С. К.* Геометрические свойства областей и отображений. Оценки снизу нормы оператора продолжения // Исследования по геометрии и математическому анализу. Новосибирск, 1987. С. 70–101.

9. *Mostow G. D.* Strong rigidity of locally symmetric spaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1973. (Ann. of Math. Studies; N 78).
10. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symmétriques de rang un // Acta Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
11. *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, N 1. P. 109–148.
12. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
13. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением групп Карно // Мат. труды. 2002. Т. 5, № 2. С. 92–137.
14. *Водопьянов С. К.* Основания теории отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 1. С. 7–12.
15. *Dairbekov N. S.* Mappings with bounded distortion of two-step Carnot groups // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. P. 122–155.
16. *Balogh Z., Holopainen I., Tyson J.* Singular solutions, homogeneous norms and quasiconformal mappings on Carnot groups // Math. Ann. 2002. V. 324. P. 159–186.
17. *Korányi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
18. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.
19. *Capogna L.* Regularity of quasilinear equations in the Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 867–889.
20. *Даирбеков Н. С.* Отображения с ограниченным искажением на группах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 567–590.
21. *Исангулова Д. В.* Об интегрируемости отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 3. С. 886–890.
22. *Исангулова Д. В.* Устойчивость в теореме Лиувилля на группах Гейзенберга. Новосибирск, 2005. 84 с. (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 158).
23. *Hajłasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Memoirs Amer. Math. Soc; 688).
24. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.
25. *Водопьянов С. К.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 603–670.
26. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
27. *Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А.* Нормальные семейства отображений на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 273–286.
28. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
29. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. 26. Berlin: Springer-Verl., 1993.
30. *Garofalo N., Nhieu D.-M.* Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 49, N 10. P. 1081–1144.

Статья поступила 11 октября 2005 г.

Исангулова Дарья Васильевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
dasha@math.nsc.ru