Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 514.763.22+517.518.15+514.752.8

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ В ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ КАРНО

С. К. Водопьянов

Аннотация: Исследована дифференцируемость отображений в геометрии пространств Карно — Каратеодори в условиях минимальной гладкости векторных полей. Введено новое понятие hc-дифференцируемости и доказаны hc-дифференцируемость липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори (обобщение теоремы Радемахера) и обобщение теоремы Степанова. Для их доказательства установлена hc-дифференцируемость спрямляемых кривых. Кроме того, дано новое доказательство функториального характера соответствия «локальный базис $\mapsto$ нильпотентный касательный конус». В качестве следствия получена hc-дифференцируемость почти всюду квазиконформных отображений пространств Карно — Каратеодори.

Ключевые слова: Пространство Карно — Каратеодори, субриманова геометрия, нильпотентный касательный конус, дифференцируемость кривых и липшицевых отображений.

Работа посвящена проблеме дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори (далее просто многообразий Карно). *Многообразие Карно* $\mathbf{M}$ (см., например, [1–6]) определяется как связное риманово многообразие, в касательном расслоении $T\mathbf{M}$ которого выделено горизонтальное подрасслоение $H\mathbf{M} \subset T\mathbf{M}$, удовлетворяющее некоторым алгебраическим условиям на коммутаторы векторных полей $\{X_1, \dots, X_n\}$, образующих локальный базис в $H\mathbf{M}$, $n = \dim H_g\mathbf{M}$ для всех $g \in \mathbf{M}$. *Расстояние* d_c (внутренняя метрика Карно — Каратеодори) между точками $x, y \in \mathbf{M}$ определяется как точная нижняя грань длин *горизонтальных* кривых, соединяющих точки x, y, и является неримановым, если $H\mathbf{M}$ — собственное подрасслоение (кусочно-гладкая кривая γ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbf{M}$).

Известно (см. [1–6]), что локальная геометрия многообразия Карно в точке $g \in \mathbf{M}$ моделируется градуированной нильпотентной группой Ли $\mathbb{G}_g\mathbf{M}$: касательное пространство $T_g\mathbf{M}$ имеет дополнительную структуру градуированной нильпотентной группы Ли. Нам удобно рассматривать в некоторой окрестности точки $g \in \mathbf{M}$ две метрические структуры: одна наследуется из данного метрического пространства $(\mathbf{M}, d_c)$, а другая — из окрестности единицы локального нильпотентного касательного конуса $(\mathscr{G}^g, d_c^g)$ (см. определение 1.2). Ниже объясняется, что $\exp^{-1} : \mathscr{G}^g \to \mathbb{G}_g\mathbf{M}$ будет изометрическим изоморфизмом локальных лиевых структур. В новых терминах определение

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05–01–00482), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–8526.2006.1).

hc-дифференцируемости принимает следующий вид. Пусть даны два многообразия Карно $(\mathbf{M}, d_c)$, $(\mathbf{N}, \tilde{d}_c)$ и множество $E \subset \mathbf{M}$. Отображение $f : E \to \mathbf{N}$ называется *hc-дифференцируемым* в точке $g \in E$, если существует горизонтальный гомоморфизм $L : (\mathscr{G}^g, d_c^g) \to \big(\mathscr{G}_c^{f(g)}, d_c^{f(g)}\big)$ локальных нильпотентных касательных конусов такой, что

$$\tilde{d}_c(f(w), L(w)) = o(d_c(g, w)) \quad \text{при } E \cap \mathscr{G}^g \ni w \to g. \tag{0.1}$$

Очевидно, что если многообразия Карно являются группами Карно, то данное определение hc-дифференцируемости эквивалентно определению $\mathscr{P}$-дифференцируемости из работы [7] в случае, когда E — открытое множество группы $\mathbb{G}$, и из работ [8, 9], когда $E \subset \mathbb{G}$ — произвольное множество (см. также [10]).

Отображение $f : E \to (\mathbf{N}, \tilde{d}_c)$, $E \subset (\mathbf{M}, d_c)$, многообразий Карно называется *липшицевым*, если $\tilde{d}_c(f(x), f(y)) \leq C d_c(x, y)$ для всех точек $x, y \in E$. Наименьшая постоянная C в этом неравенстве называется *постоянной Липшица* и обозначается символом $\operatorname{Lip} f$.

В § 4 формулируются обобщения классических теорем Радемахера [11] и Степанова [12]: *всякое отображение $f : E \to (\mathbf{N}, \tilde{d}_c)$, $E \subset (\mathbf{M}, d_c)$, заданное на произвольном множестве одного многообразия Карно со значениями в другом многообразии Карно и удовлетворяющее либо условию Липшица, либо условию $\varlimsup\limits_{y \to x} \frac{\tilde{d}_c(f(x), f(y))}{d_c(x, y)} < \infty$ для почти всех $x \in E$, hc-дифференцируемо почти всюду в смысле* (0.1).

Главная особенность нашего подхода состоит в том, что все основные результаты работы справедливы в геометрии векторных полей, имеющих гладкость, обеспечивающую доказательство теоремы 1.1 о сходимости масштабированных векторных полей.

В § 1 мы приводим в нужном нам виде основные понятия и структуры на многообразиях Карно из [4, 6, 13], а также теоремы из [14–16]. В § 2 вводится основное для данной работы понятие hc-дифференцируемости, адекватное геометрии многообразия Карно, и исследуются его свойства. Основной результат работы о hc-дифференцируемости абсолютно непрерывных кривых доказывается в § 3, из него выведены многочисленные следствия. В § 4 мы получаем следующее обобщение одного классического результата: *непрерывность горизонтальных производных заданного на открытом множестве контактного отображения влечет его поточечную hc-дифференцируемость* (теорема 4.2). В качестве важного следствия этого утверждения получаем, что касательный конус определяется горизонтальным подрасслоением многообразия Карно: *касательные конусы, найденные по различным наборам базисных векторных полей, изоморфны как локальные группы Карно* (следствие 4.1).

Предварительные результаты автора по дифференцируемости липшицевых отображений сформулированы в [17–20] в предположении излишней гладкости векторных полей и в [21].

§ 1. Локальная геометрия многообразий Карно

1.1. Определение многообразий Карно. Фиксируем связное риманово многообразие $\mathbf{M}$ размерности N класса C^∞. Оно называется *многообразием Карно*, если в касательном расслоении $T\mathbf{M}$ фиксировано касательное подрасслоение $H\mathbf{M}$, обладающее следующим свойством. Существует конечный набор натуральных чисел $\dim H_1 < \dots < \dim H_i < \dots < \dim H_M = N$, $1 \leq i \leq M$, и каждая точка $g \in \mathbf{M}$ имеет окрестность $U \subset \mathbf{M}$, на которой найдутся гладкие векторные поля $X_1, \dots, X_N$, удовлетворяющие условию Хёрмандера [22, 2, 4, 6] в следующей форме:

1) $X_1(x), \dots, X_N(x)$ образуют базис в $T_x\mathbf{M}$ для любого $x \in U$;

2) $H_i(x) = \operatorname{span}\{X_1(x), \dots, X_{\dim H_i}(x)\}$ образует подпространство в $T_x\mathbf{M}$ размерности $\dim H_i$, не зависящей от x (здесь $H_1(x) = H_x\mathbf{M}$, $H_M(x) = T_x\mathbf{M}$);

3) если степень поля $\deg X_k$ — это число $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$, то

$$[X_i, X_j](x) = \sum_k c_{ijk}(x) X_k(x), \tag{1.1}$$

где $c_{ijk}(x) \equiv 0$ для $\deg X_k > \deg X_i + \deg X_j$;

4) фактор-отображение $[\,\cdot,\cdot\,]_0 : H_1 \times H_i/H_{i-1} \mapsto H_{i+1}/H_i$, $H_0 = \{0\}$, индуцированное скобкой Ли, является эпиморфизмом для всех $1 \le i < M$ в каждой точке $x \in U$.

5)[1)] $X_j \in C^{2M-\deg X_j}(U)$, $j = 1, \dots, N$.

Примеры векторных полей с вышеуказанными условиями см. в [16].

1.2. Нормальные координаты. Пусть $g \in \mathbf{M}$, $B_g(r) = \Big\{X = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i(g) : \|X\|_g < r\Big\}$ — открытый евклидов шар с центром в точке $0 \in T_g\mathbf{M}$ радиуса r (евклидова норма $\|\cdot\|_g$ в $T_g\mathbf{M}$ определяется римановым тензором). Известно (см., например, [23]), что отображение

$$\theta_g : (x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^{N} x_i X_i\right)(g), \quad \theta_g(0) = \theta_g(0, \dots, 0) = g \in \mathbf{M},$$

является C^M-гладким диффеоморфизмом некоторого шара $B_g(r_g)$ на некоторую окрестность точки g, непрерывно зависящим от точки g. Здесь r_g — положительное число, его можно считать не зависящим от g из некоторой компактной части $\mathbf{M}$. Отметим, что $\left(\theta_g^{-1}\right)_* X_i(g) = X_i(g)$.

Определение 1.1. Набор чисел $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, N$, где $(x_1, \dots, x_N) = \theta_g^{-1} u \in B(0, r_g)$, называется *нормальными координатами* точки $u = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i\right)(g)$.

Замечание 1.1. Понятно, что каждая точка $p \in \mathbf{M}$ принадлежит некоторой компактно вложенной области $U \Subset \mathbf{M}$ (т. е. $\overline{U} \subset \mathbf{M}$ — компактное множество) такой, что для каждой точки $g \in U$ выполняется $\overline{U} \subset \theta_g(B(0, r_g))$.

1.3. Квазиметрика. Фиксируем точку $p \in \mathbf{M}$. Из определения области U (см. замечание 1.1) вытекает, что для любых точек $u, v \in \overline{U}$ найдется единственный набор чисел $(u_1, \dots, u_N)$ такой, что $u = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} u_i X_i\right)(v)$. Квазиметрика $d_\infty(u, v)$ между точками $v, u \in U$ определяется как неотрицательная величина

$$d_\infty(u, v) = \max\{|u_i|^{1/\deg X_i} \mid i = 1, \dots, N\}.$$

В дальнейшем шар радиуса r в квазиметрике d_∞ обозначается символом $\operatorname{Box}(g, r) = \{x \in U \mid d_\infty(g, x) < r\}$.

---

1) Это условие следует добавить при определении многообразий Карно в работах [14, 17, 18, 20]. Оно необходимо для доказательства теоремы 1.1 в [14–16]. Если теорема 1.1 будет доказана при более слабых условиях, то и все основные результаты настоящей работы и [14, 17, 18, 20] справедливы при тех же предположениях о гладкости векторных полей.

Свойство 1.1 [20, 21]. *Квазиметрика d_∞ обладает следующими свойствами:*

1) $d_\infty(u,v) \geq 0$, $d_\infty(u,v) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $u = v$;

2) $d_\infty(u,v) = d_\infty(v,u)$;

3) *квазиметрика* $d_\infty(u,v)$ *непрерывна по каждой из переменных;*

4) *существует постоянная* $Q = Q(U)$ *такая, что для каждой тройки точек* $u, w, v \in U$ *выполняется неравенство* $d_\infty(u,v) \leq Q(d_\infty(u,w) + d_\infty(w,v))$.

С помощью нормальных координат θ_g^{-1} определим в окрестности точки $g \in \mathbf{M}$ действие *группы растяжений* Δ_ε^g: элементу $x = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^N x_i X_i\Bigr)(g)$ сопоставим

$$\Delta_\varepsilon^g x = \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \varepsilon^{\deg X_i} X_i\right)(g)$$

в тех случаях, когда правая часть имеет смысл. Из определения квазиметрики получаем $\Delta_\varepsilon^g : \mathrm{Box}(g,r) \to \mathrm{Box}(g,\varepsilon r)$, $r \in (0, r_g]$.

1.4. Нильпотентный касательный конус. Следующее утверждение служит основой исследования локальной геометрии многообразий Карно [1–4, 6, 14–16, 24, 25].

Теорема 1.1 [14–16]. *Фиксируем точку g многообразия Карно $\mathbf{M}$. Тогда выполняется следующее.*

1. *Соотношения* (1.1) *при* $\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j$ *определяют в* $T_g\mathbf{M}$ *структуру нильпотентной градуированной алгебры Ли.*

2. *Существуют векторные поля* $\{\widehat{X}_i^g\}$, $\widehat{X}_i^g(g) = X_i(g)$, $i = 1, \dots, N$, *определенные на* $\mathrm{Box}(g, r_g)$, *которые образуют базис нильпотентной градуированной алгебры Ли со следующей таблицей коммутаторов:*
$$\bigl[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g\bigr] = \sum_{\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} \widehat{X}_k^g, \tag{1.2}$$
где постоянные c_{ijk} *совпадают со значениями* $c_{ijk}(g)$ *из* (1.1).

3. *Для* $u \in \mathrm{Box}(g, r_g)$ *выполняется* $\bigl(\Delta_\tau^g\bigr)_* \widehat{X}_i^g(u) = \tau^{\deg X_i} \widehat{X}_i^g\bigl(\Delta_\tau^g u\bigr)$, где $\tau > 0$, $i = 1, \dots, N$.

4. *На* $\mathrm{Box}(g, \varepsilon r_g)$ *рассмотрим векторные поля* $\{{}^\varepsilon X_i\} = \{\varepsilon^{\deg X_i} X_i\}$, $i = 1, \dots, N$. *Тогда имеет место равномерная сходимость*
$$X_i^\varepsilon = \bigl(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g\bigr)_* {}^\varepsilon X_i \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \widehat{X}_i^g, \quad i = 1, \dots, N,$$
во всех точках бокса $\mathrm{Box}(g, r_g)$ *и эта сходимость равномерна по* g, *принадлежащим некоторому компактному множеству.*

Для каждого N-мерного мультииндекса α полагаем $|\alpha|_h = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i \deg X_i$, символ e_i обозначает мультииндекс $(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$. Из [13] получаем

Свойство 1.2. *Векторные поля* $\widehat{X}_i'^g = (\theta_g^{-1})_* \widehat{X}_i^g$, $i = 1, \dots, N$, *продолжаются на пространство* $T_g\mathbf{M}$, *и их продолжения образуют на* $T_g\mathbf{M}$ *нильпотентную градуированную алгебру Ли* V'. *Разложение векторного поля* $\widehat{X}_i'^g$ *в евклидовом базисе* $\bigl\{\frac{\partial}{\partial x_j} = X_j(g)\bigr\}$ *в точке* $x \in T_g\mathbf{M}$ *имеет вид*

$$\widehat{X}_i'^g(x) = \sum_{j=i}^N \hat{z}_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{где} \quad \hat{z}_i^j(x) = \delta_{ji} + \sum_{|\alpha + e_i|_h = \deg X_j,\, \alpha > 0} F_{\alpha, e_i}^j(g) x^\alpha, \tag{1.3}$$

а коэффициенты $F^j_{\alpha,e_i}(g)$ *выражаются через* c_{lnk} *из разложения* (1.2) *по формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа и непрерывны по* g (*здесь* δ_{ji} — *символ Кронекера*).

Следовательно, векторные поля $\widehat{X}_i^g$, $i = 1, \dots, N$, *непрерывно зависят от* g.

Лемма 1.1 [20, 21]. *Справедливо соотношение:*

$$\sum_{i=1}^{j} \sum_{\substack{|\alpha+e_i|_h=\deg X_j,\\ |\alpha+e_i|=l,\, \alpha>0}} x_i F^j_{\alpha,e_i}(g) x^\alpha = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N,$$

для всех $\deg X_j \geq 2$, $l = 2, \dots, \deg X_j$.

Доказательство состоит в том, чтобы левую часть равенства $\exp rsX \circ \exp rtX(g) = \exp r(s+t)X(g)$, где $X = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \widehat{X}_i'^g$, выразить по формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа и приравнять соответствующие координаты в левой и правой частях полученного соотношения.

Свойство 1.3 [20, 21]. *Пусть* $\max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|\}$ *достаточно мало. Тогда*

$$a = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \widehat{X}_i^g\right)(g).$$

Доказательство. Из леммы 1.1 и определения групповой операции получаем, что $\mathbb{R}^N \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \widehat{X}_i'^g = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \widehat{X}_i'^g\right)$, т. е. экспоненциальным отображением является тождественное. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$a = \theta_g(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \theta_g\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \widehat{X}_i'^g\right) = \theta_g\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \widehat{X}_i'^g\right)\right)$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i (\theta_g)_* \widehat{X}_i'^g\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \widehat{X}_i^g\right).$$

Определение 1.2 [6, 19]. Связная односвязная группа Ли (группа Карно) $\mathbb{G}_g\mathbf{M}$ с нильпотентной градуированной алгеброй Ли V' (см. свойство 1.2) и каноническим римановым тензором, определяемым евклидовой структурой $\|\cdot\|_g$ в $T_g\mathbf{M}$, называется *нильпотентным касательным конусом* многообразия Карно $\mathbf{M}$ в точке $g \in \mathbf{M}$.

Группе Карно $\mathbb{G}_g\mathbf{M}$ соответствует *локальная группа Карно* $\mathscr{G}^g$ [26] с нильпотентной градуированной алгеброй Ли V, порожденной векторными полями $\{\widehat{X}_i^g\}$. Групповая операция для элементов $x = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \widehat{X}_i^g\right)(g) \in \mathscr{G}^g$ и $y = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} y_i \widehat{X}_i^g\right)(g) \in \mathscr{G}^g$ определяется по формуле $x \cdot y = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} y_i \widehat{X}_i^g\right) \circ \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$.

Замечание 1.2. Отображение $\hat{\theta}_g : (x_1, \dots, x_N) \to \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$ является гладким диффеоморфизмом евклидова шара $B_g(\hat{r}_g)$ в локальную группу Карно $\mathscr{G}^g$ и задает нормальную систему координат в окрестности единицы группы $\mathscr{G}^g$. Мы можем полагать, что для каждой точки $g \in U$ выполняется

$U \subset \hat{\theta}_p(B_g(\hat{r}_g))$, где область U из замечания 1.1. (По теореме 1.1 и свойству 1.3 число $\hat{r}_g$ можно считать совпадающим с числом r_g из замечания 1.1.) Отображение $\hat{\theta}_g^{-1}$ — изометрический изоморфизм между локальной группой Карно $\mathscr{G}^g$ и некоторой окрестностью единицы группы $\mathbb{G}_g\mathbf{M}$.

Так как локальная группа Карно $\mathscr{G}^g$ является многообразием Карно с набором векторных полей $\{\widehat{X}_i^g\}$, то на $\mathscr{G}^g$ определены квазиметрика Карно — Каратеодори $d_\infty^g(x,y)$, см. п. 1.3, и метрика Карно — Каратеодори d_c^g. Из эквивалентности двух непрерывных однородных норм на группе Карно [13] выводим, что метрика d_c^g и квазиметрика d_∞^g на локальной группе Карно $\mathscr{G}^g$ эквивалентны.

Для каждой точки $x \in \mathscr{G}^g$ определим $\mathrm{Box}^g(x,r) = \{y \in \mathscr{G}^g \mid d_\infty^g(x,y) < r\}$. Зададим на $\mathscr{G}^g$ локальную однопараметрическую группу растяжений δ_t^g: элементу $x = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^N x_i\widehat{X}_i^g\Bigr)(g) \in \mathscr{G}^g$ соответствует

$$\delta_t^g x = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^N x_i t^{\deg X_i}\widehat{X}_i^g\Biggr)(g) \in \mathscr{G}^g, \quad t \in (0, t(x)). \tag{1.4}$$

Соотношение $\delta_t^g x \cdot \delta_\tau^g x = \delta_{t\tau}^g x$ определено лишь для тех t и τ, для которых оно имеет смысл: $t, \tau, t\tau \in (0, t(x))$.

Из свойства 1.3 и определений δ_ε^g и Δ_ε^g (см. (1.4) и п. 1.4) выводим

Свойство 1.4. 1. *Для любого* $r \in (0, r_g)$ *имеет место равенство* $\mathrm{Box}^g(g,r) = \mathrm{Box}(g,r)$.

2. *Однопараметрическая группа растяжений* δ_ε^g *на* $\mathscr{G}^g$ *совпадает с группой растяжений* Δ_ε^g: $\Delta_\varepsilon^g x = \delta_\varepsilon^g x$ *для любого* $x \in \mathscr{G}^g$, *для которого определены левая и правая части равенства. В частности,* $\delta_\varepsilon^g(\mathrm{Box}^g(g,r)) = \mathrm{Box}^g(g,\varepsilon r)$.

1.5. Локальная геометрия многообразия Карно. Далее будем использовать следующее соответствие: любым элементу $a = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^N a_i\widehat{X}_i^g\Bigr)(g) \in \mathscr{G}^g$ и точке $w \in \mathscr{G}^g$ сопоставим элемент

$$\Delta_\varepsilon^w a = \exp\Biggl(\sum_{j=1}^N a_j \varepsilon^{\deg X_j} X_j\Biggr)(w) \tag{1.5}$$

для тех ε, для которых существует правая часть (1.5).

Теорема 1.2 [14–16]. *Рассмотрим в* $\mathscr{G}^g$, $g \in \mathbf{M}$, *точки* $x_i \in \mathscr{G}^g$, $d_\infty^g(x_i) \le D$, $1 \le i \le S$. *Точке* $\hat{v}_S(\varepsilon) = \delta_\varepsilon^g x_1 \cdot \ldots \cdot \delta_\varepsilon^g x_S \in \mathscr{G}^g$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *сопоставим определяемый по индукции элемент* $v_i(\varepsilon) = \Delta_\varepsilon^{v_{i-1}(\varepsilon)} x_i \in \mathbf{M}$, $1 \le i \le S$, *где* $v_0(\varepsilon) = g$ *для всех* ε. *Тогда*

$$\max\bigl\{d_\infty^g(v_S(\varepsilon), \hat{v}_S(\varepsilon)),\, d_\infty(v_S(\varepsilon), \hat{v}_S(\varepsilon))\bigr\} = O(\varepsilon^{1+\frac{1}{M}}) \quad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

где O *равномерное относительно выбора* x_i, $1 \le i \le S$, $D \in (0, D_0)$ *и* g *из компактного множества в* $\mathbf{M}$ *при условии ограниченности* S *и* D_0 *по* g.

Теорема 1.3 [14–16]. *Рассмотрим точки* $g \in \mathbf{M}$ *и* $u, v \in B(g,\varepsilon)$, *где* $\varepsilon \in (0, r_g)$. *Тогда*

$$|d_\infty(u,v) - d_\infty^g(u,v)| = O(\varepsilon^{1+\frac{1}{M}}) \quad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

где O *равномерное по* $u, v \in B(g,\varepsilon)$ *и* g *из компактного множества в* $\mathbf{M}$.

В этой работе нам потребуется лишь $o(\varepsilon)$ в правой части вместо $O(\varepsilon^{1+\frac{1}{M}})$. Мы докажем здесь вторую теорему, доказательство первой основано на сходных рассуждениях.

Доказательство. Чтобы доказать соотношение $|d_\infty(u,v) - d^g_\infty(u,v)| = o(\varepsilon)$, предположим противное. Тогда мы имеем некоторое число $\delta > 0$, а также последовательности чисел $\varepsilon_n \to 0$ и точек $u_n, v_n \in \mathrm{Box}(g, \varepsilon_n)$ таких, что
$$\left|\varepsilon_n^{-1} d_\infty(u_n, v_n) - d^g_\infty\big(\delta^g_{\varepsilon_n^{-1}} u_n, \delta^g_{\varepsilon_n^{-1}} v_n\big)\right| \geq \delta.$$
При этом можно предполагать, что последовательности $\Delta^g_{\varepsilon_n^{-1}}(u_n)$ и $\Delta^g_{\varepsilon_n^{-1}}(v_n)$ сходятся. По свойству 1.1 имеем $d_\infty(u_n, v_n) = O(\varepsilon_n)$. Тогда можно записать
$$u_n = \exp\left(\sum_{i=1}^N u_{n,i} \varepsilon_n^{\deg X_i} X_i\right)(v_n),$$
где $v_n = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N v_{n,i} \varepsilon_n^{\deg X_i} X_i\right)(g) = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N v_{n,i} \varepsilon_n^{\deg X_i} \widehat{X}_i\right)(g)$ по свойству 1.3. Отсюда $\Delta^g_{\varepsilon_n^{-1}}(u_n) = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N u_{n,i} X_i^{\varepsilon_n}\right) \circ \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N v_{n,i} \widehat{X}_i\right)(g)$. Следовательно, $\varepsilon_n^{-1} d_\infty(u_n, v_n)$ равно $d_{n,\infty}$-расстоянию между точками $\Delta^g_{\varepsilon_n^{-1}}(u_n)$ и $\Delta^g_{\varepsilon_n^{-1}}(v_n)$ относительно базиса $\{X_i^{\varepsilon_n}\}$. С другой стороны, по теореме 1.1 и непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра имеем $\varepsilon_n^{-1} d_\infty(u_n, v_n) \to d^g_\infty\big(\delta^g_{\varepsilon_n^{-1}} u_n, \delta^g_{\varepsilon_n^{-1}} v_n\big)$ при $n \to \infty$.

1.6. Выбор метрики. В настоящей работе мы фиксируем на многообразии Карно псевдометрику $d_{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to [0, \infty)$, удовлетворяющую следующим свойствам:

1) $d_{\mathbf{M}}(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;

2) для каждого $x \in \mathbf{M}$ множество $B(x, r) = \{y \in \mathbf{M} \mid d_{\mathbf{M}}(x, y) < r\}$ открыто, $r > 0$;

3) существует постоянная C такая, что для каждой тройки точек $u, w, v \in \mathbf{M}$ выполняется неравенство
$$d_{\mathbf{M}}(u, v) \leq C(d_{\mathbf{M}}(u, w) + d_{\mathbf{M}}(w, v)); \tag{1.6}$$

4) для метрики $d_{\mathbf{M}}$ справедлива Ball-Box теорема: для любого компакта $K \subset \mathbf{M}$ существуют постоянные $r_0 > 0$, C_1 и C_2 такие, что для любой точки $x \in K$ и любого $r \in (0, r_0)$ справедливы соотношения
$$\mathrm{Box}(x, C_1 r) \subset B(x, r) \subset \mathrm{Box}(x, C_2 r); \tag{1.7}$$

5) риманова мера m на $\mathbf{M}$ удовлетворяет условию удвоения: $m(B(x, 2r)) \leq C_K m(B(x, r))$ для точек $x \in K$ компакта $K \subset \mathbf{M}$, C_K не зависит от выбора x.

На основании соотношения
$$c^{-1} \rho(u, v) \leq d_\infty(u, v) \leq c \rho(u, v)^{\frac{1}{M}}, \tag{1.8}$$
справедливого для точек $x, y \in U$ некоторой компактной окрестности [4], и (1.7) получаем, что топологии, задаваемые римановой метрикой $\rho(u, v)$, квазиметрикой $d_\infty(u, v)$ и псевдометрикой $d_{\mathbf{M}}(u, v)$, совпадают.

Предложение 1.1 [14–16]. *В качестве псевдометрики $d_{\mathbf{M}}$ можно взять метрику Карно — Каратеодори d_c.*

Доказательство. Соотношение $C_0 d_c(g, v) \leq d_\infty(g, v)$ доказано в [16]. Для доказательства неравенства $d_\infty(g, v) \leq C_1 d_c(g, v)$ фиксируем компактное подмножество $K \Subset \mathbf{M}$ и предположим противное: для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие точки $x_n, y_n \in K$, что $d_\infty(x_n, y_n) \geq n d_c(x_n, y_n)$. В этом случае имеем $d_\infty(x_n, y_n) \to 0$ при $n \to \infty$, так как иначе одновременно получим $d_c(x_n, y_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $d_\infty(x_n, y_n) \geq \alpha > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, что невозможно. Мы также можем предположить, что $x_n \to x \in K$ при $n \to \infty$ и $x_n \neq y_n$. Полагая $d_\infty(x_n, y_n) = \varepsilon_n$, имеем $d_\infty\big(x_n, \Delta^{x_n}_{\varepsilon_n^{-1}} y_n\big) = 1$ и $d^n_c\big(x_n, \Delta^{x_n}_{\varepsilon_n^{-1}} y_n\big) \leq n^{-1}$, где d_c^n — метрика Карно — Каратеодори относительно базиса $\{X_i^{\varepsilon_n}\}$. Так как по теореме 1.1 длины векторов $X_i^{\varepsilon_n}$, $i = 1, \dots, \dim H_1$, ограничены сверху, то $\rho\big(x_n, \Delta^{x_n}_{\varepsilon_n^{-1}} y_n\big) \to 0$ при $n \to \infty$. Это противоречит тому, что $d_\infty\big(x_n, \Delta^{x_n}_{\varepsilon_n^{-1}} y_n\big) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. (1.8)).

§ 2. Понятие дифференцируемости на многообразиях Карно

Далее мы расширяем действие растяжений δ_t^g на отрицательные t, полагая $\delta_t^g x = \delta_{|t|}^g(-x)$ в случае $t < 0$. Удобство этого расширения проявится ниже при сравнении различных типов дифференцируемости.

2.1. Пусть $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ — два многообразия Карно. Векторные поля на пространстве $\mathbf{N}$ будем обозначать символом Y_i. Все оставшиеся объекты на многообразии Карно $\mathbf{N}$ (расстояние, касательный конус и т. д.) будем помечать сверху знаком «$\tilde{}$», кроме тех случаев, когда и без этого ясно, о каком пространстве идет речь: например, для данного отображения $f : E \to \mathbf{N}$ очевидно, что $\mathscr{G}^g$ — касательный конус в точке $g \in \mathbf{M}$, а $\mathscr{G}^{f(g)}$ — касательный конус в точке $f(g) \in \mathbf{N}$; d_c^g — метрика в конусе $\mathscr{G}^g$, а $d_c^{f(g)}$ — метрика в конусе $\mathscr{G}^{f(g)}$, и т. д.

Напомним, что *горизонтальным гомоморфизмом* групп Карно называется непрерывный гомоморфизм $L : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ групп Карно такой, что

1) $DL(0)(H\mathbb{G}) \subset H\widetilde{\mathbb{G}}$.

Горизонтальный гомоморфизм $L : \big(\mathscr{G}^g, d_c^g\big) \to \big(\widetilde{\mathscr{G}}^q, \tilde{d}_c^q\big)$, $g \in \mathbf{M}$, $q \in \mathbf{N}$, локальных групп Карно отличается от приведенного тем, что включение $L(\mathscr{G}^g \cap \exp H\mathscr{G}) \subset \widetilde{\mathscr{G}}^q \cap \exp H\widetilde{\mathscr{G}}^q$ выполняется лишь для таких $v \in \mathscr{G}^g \cap \exp H\mathscr{G}$, что $L(v) \in \widetilde{\mathscr{G}}^q$.

Можно доказать, что горизонтальный гомоморфизм $L : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ обладает также свойством

2) $L(\delta_t v) = \tilde{\delta}_t L(v)$ для всех $v \in \mathbb{G}$ и $t > 0$ (в случае горизонтального гомоморфизма $L : \big(\mathscr{G}^g, d_c^g\big) \to \big(\widetilde{\mathscr{G}}^q, \tilde{d}_c^q\big)$ локальных групп Карно равенство $L(\delta_t v) = \tilde{\delta}_t L(v)$ выполняется лишь для таких $v \in \mathscr{G}^g$ и $t > 0$, что $\delta_t v \in \mathscr{G}^g$, а $\tilde{\delta}_t L(v) \in \widetilde{\mathscr{G}}^q$).

Определение 2.1 [19, 20]. Пусть даны многообразия Карно $(\mathbf{M}, d_\mathbf{M})$, $(\mathbf{N}, d_\mathbf{N})$ и множество $E \subset \mathbf{M}$. Отображение $f : E \to \mathbf{N}$ называется *hc-дифференцируемым* в точке $g \in E$, если существует горизонтальный гомоморфизм $L : \big(\mathscr{G}^g, d_c^g\big) \to \big(\mathscr{G}^{f(g)}, d_c^{f(g)}\big)$ локальных групп такой, что

$$d_c^{f(g)}(f(v), L(v)) = o(d_c^g(g, v)) \quad \text{при } E \cap \mathscr{G}^g \ni v \to g. \tag{2.1}$$

Горизонтальный гомоморфизм $L : (\mathscr{G}^g, d_c^g) \to \big(\mathscr{G}^{f(g)}, d_c^{f(g)}\big)$, удовлетворяющий условию (2.1), называется *hc-дифференциалом* отображения $f : E \to \mathbf{N}$ в точке $g \in E$ на множестве E и обозначается символом $Df(g)$. Можно проверить [20, 21], что если g — точка плотности, то hc-дифференциал единствен.

Более того, легко показать, что в этом случае hc-дифференциал коммутирует с локальной однопараметрической группой растяжений: $\delta_t^{f(g)} \circ Df(g) = Df(g) \circ \delta_t^g$.

Предложение 2.1 [20, 21]. *Определение* 2.1 *эквивалентно одному из следующих утверждений:*

1) $d_c^{f(g)}\big(\Delta^{f(g)}_{t^{-1}} f\big(\delta_t^g(v)\big), L(v)\big) = o(1)$ *при* $t \to 0$, *где* $o(\cdot)$ *равномерное по* v *из любой компактной части в* $\mathscr{G}^g$;

2) $d_{\mathbf{N}}(f(v),L(v))=o\big(d_c^g(g,v)\big)$ *при* $E\cap\mathscr{G}^g\ni v\to g$;

3) $d_{\mathbf{N}}(f(v),L(v))=o\big(d_{\mathbf{M}}(g,v)\big)$ *при* $E\cap\mathscr{G}^g\ni v\to g$;

4) $d_{\mathbf{N}}\big(\Delta_{t^{-1}}^{f(g)}f\big(\delta_t^g(v)\big),L(v)\big)=o(1)$ *при* $t\to 0$, *где* $o(\cdot)$ *равномерное по* v *из любой компактной части в* $\mathscr{G}^g$.

§ 3. *hc*-дифференцируемость кривых в категории многообразий Карно

3.1. Напомним, что отображение $\gamma:E\to\mathbf{M}$, где $E\subset\mathbb{R}$ — произвольное множество, называется *липшицевым*, если существует постоянная L такая, что для всех точек $x,y\in E$ справедливо неравенство $d_{\mathbf{M}}(\gamma(y),\gamma(x))\le L|y-x|$.

Определение 3.1. Отображение $\gamma:E\to\mathbf{M}$, где $E\subset\mathbb{R}$ — произвольное множество, называется *hc-дифференцируемым в предельной точке* $s\in E$ к множеству E, если существует горизонтальный вектор $a=\sum\limits_{i=1}^{\dim H_1}\alpha_i\widehat{X}_i^{\gamma(s)}(\gamma(s))\in H_{\gamma(s)}\mathbf{M}$ такой, что локальный гомоморфизм $\tau\mapsto\exp\Bigl(\tau\sum\limits_{i=1}^{\dim H_1}\alpha_i\widehat{X}_i^{\gamma(s)}\Bigr)(\gamma(s))\in\mathscr{G}^{\gamma(s)}$ является *hc*-дифференциалом отображения $\gamma:E\to\mathbf{M}$: $d_c^{\gamma(s)}\big(\gamma(s+\tau),\delta_\tau^{\gamma(s)}a\big)=o(\tau)$ при $\tau\to 0$, $s+\tau\in E$. Элемент $\exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{\dim H_1}\alpha_i\widehat{X}_i^{\gamma(s)}\Bigr)(\gamma(s))\in\mathscr{G}^{\gamma(s)}$ называется *hc-производной*.

Некоторые свойства введенного понятия *hc*-дифференцируемости можно получить из предложения 2.1. Например, коэффициенты α_i определяются однозначно: если в нормальных координатах $\gamma(s+\tau)=\exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N}\gamma_i(\tau)\widehat{X}_i^{\gamma(s)}\Bigr)(\gamma(s))$, $s+\tau\in E$, для достаточно малых τ, то из предложения 2.1 вытекает

Свойство 3.1 (координатный критерий *hc*-дифференцируемости) [20, 21]. *Отображение* $\gamma:[a,b]\to\mathbf{M}$ *hc-дифференцируемо в точке* $s\in(a,b)$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) $\gamma_i(\tau)=\alpha_i\tau+o(\tau)$, $i=1,\dots,\dim H_1$, *и* $\gamma_i(\tau)=o(\tau^{\deg X_i})$, $i>\dim H_1$, *при* $\tau\to 0$, $s+\tau\in E$;

2) *вектор* $\sum\limits_{i=1}^{\dim H_1}\alpha_i\widehat{X}_i^{\gamma(s)}(\gamma(s))\in H_{\gamma(s)}\mathbf{M}$ *является римановой производной отображения* $\gamma:[a,b]\to\mathbf{M}$ *в точке* $s\in(a,b)$, *и* $\gamma_i(\tau)=o(\tau^{\deg X_i})$, $i>\dim H_1$, *при* $\tau\to 0$, $s+\tau\in E$.

3.2. Если кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbf{M}$ абсолютно непрерывна в римановом смысле, то все координатные функции $\gamma_i(t)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[a,b]$ (очевидно, это свойство не зависит от выбора системы координат). В этом случае почти всюду на отрезке $[a,b]$ определен касательный вектор $\dot\gamma(t)$. Если при этом $\dot\gamma(t)\in H_{\gamma(t)}\mathbf{M}$ в точках $t\in[a,b]$ римановой дифференцируемости, то кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbf{M}$ называется *горизонтальной*.

Известно, что почти все точки t отрезка $E=[a,b]$ суть точки Лебега производных горизонтальных компонент, т. е. если в нормальных координатах $\gamma(t+\tau)=\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N}\gamma_j(\tau)X_j\Bigr)(\gamma(t))$, то *горизонтальные* компоненты $\gamma_j(\sigma)$, $j=1,\dots,\dim H_1$ (зависимость компонент $\gamma_j(\tau)$ от t здесь и далее явно не указывается), обладают свойством

$$\int\limits_{\{\sigma\in(\alpha,\beta)\,|\,t+\sigma\in E\}} |\dot\gamma_j(\sigma)-\dot\gamma_j(0)|\,d\sigma = o(\beta-\alpha) \quad \text{при } \beta-\alpha\to 0 \tag{3.1}$$

на промежутках $(\alpha,\beta)\ni 0$. Заметим, что свойство (3.1) не зависит от выбора системы координат в окрестности точки $\gamma(t)$.

Теорема 3.1 [17]. *Пусть кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbf{M}$ на многообразии Карно абсолютно непрерывна в римановом смысле и горизонтальна. Тогда кривая $\gamma:[a,b]\to\mathbf{M}$ hc-дифференцируема почти всюду: всякая точка $t\in[a,b]$, которая является точкой Лебега производных ее горизонтальных компонент, будет также и точкой ее hc-дифференцируемости. Если $\gamma(t+\tau)=\exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{N}\gamma_j(\tau)X_j\Big)(\gamma(t))$, то hc-производная $\dot\gamma(t)$ равна*

$$\exp\Bigg(\sum_{j=1}^{\dim H_1}\dot\gamma_j(0)\widehat{X}_j^{\gamma(t)}\Bigg)(\gamma(t)) = \exp\Bigg(\sum_{j=1}^{\dim H_1}\dot\gamma_j(0)X_j\Bigg)(\gamma(t)).$$

Доказательство. Фиксируем точку Лебега $t_0\in(a,b)$ производных горизонтальных компонент отображения $\gamma(t_0+\tau)=\exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{N}\gamma_j(\tau)X_j\Big)(g)$, $g=\gamma(t_0)$. В этом доказательстве мы фиксируем нормальную систему координат θ_g в точке g, а векторные поля $\widetilde{X}_i=(\theta_g^{-1})_*X_i$ и $\widehat{X}_i'^{g}=(\theta_g^{-1})_*\widehat{X}_i^{g}$, определенные в окрестности $0\in\mathbb{R}^N$, для упрощения записи будем обозначать без верхнего символа g справа от X.

Для доказательства hc-дифференцируемости отображения γ в точке t_0 требуется установить оценку $\gamma_j(\tau)=o(\tau^{\deg X_j})$ при $\tau\to 0$ для всех $j>\dim H_1$, $t_0+\tau\in[a,b]$ (см. свойство 3.1). Доказательство требуемой оценки разобьем на несколько шагов.

шаг 1. Здесь мы покажем, что из условий теоремы вытекает риманова дифференцируемость отображения γ в точке t_0 и $\dot\gamma(t_0)\in H_g\mathbf{M}$. Положим $\Gamma(\tau)=\theta_g^{-1}(\gamma(t_0+\tau))=(\gamma_1(\tau),\dots,\gamma_N(\tau))$. Кривая $\Gamma(\tau)$ абсолютно непрерывна, и ее касательный вектор $\dot\Gamma(\tau)$ горизонтален в окрестности $0\in T_g\mathbf{M}$ относительно системы векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}$: $\dot\Gamma(\tau)\in(\theta_g^{-1})_*H_{\gamma(t_0+\tau)}\mathbf{M}$ для почти всех τ. Отсюда для почти всех τ, достаточно близких к 0, выводим

$$\dot\Gamma(\tau)=\sum_{j=1}^{N}\dot\gamma_j(\tau)\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{\dim H_1}a_i(\tau)\widetilde{X}_i(\Gamma(\tau)). \tag{3.2}$$

Риманов тензор, перенесенный с многообразия $\mathbf{M}$ в окрестность $0\in T_g\mathbf{M}$, непрерывен в нуле. Поэтому, используя его непрерывность, для любой точки τ, $t_0+\tau\in[a,b]$, из (3.1) имеем

$$d_c(\gamma(t_0),\gamma(t_0+\tau)) \le c_1\int\limits_{(0,\tau)}|\dot\Gamma(\sigma)|_r\,d\sigma \le c_2\sum_{j=1}^{\dim H_1}\int\limits_{(0,\tau)}(|\dot\gamma_j(\sigma)-\dot\gamma_j(0)|+|\dot\gamma_j(0)|)\,d\sigma = O(\tau)$$

при $\tau\to 0$, где символ $|\dot\Gamma(\sigma)|_r$ обозначает длину касательного вектора в перенесенной римановой метрике. Поскольку $d_\infty(\gamma(t_0),\gamma(t_0+\tau))=O(d_c(\gamma(t_0),\gamma(t_0+\tau)))$ при $\tau\to 0$ в силу предложения 1.1, то для компонент $\gamma_j(\tau)$ отображения γ имеем

$$\gamma_j(\tau)=O(\tau^{\deg X_j}) \quad \text{при } \tau\to 0 \text{ для всех } j\ge 1. \tag{3.3}$$

Значит, кривая $\Gamma(\tau)$ дифференцируема в 0 и $\dot\Gamma(0) = (\dot\gamma_1(0), ..., \dot\gamma_{\dim H_1}(0), 0, ..., 0)$. Следовательно, кривая γ имеет риманову производную в точке t_0, и $\dot\gamma(t_0) \in H_g\mathbf{M}$. Из (3.3) следует также, что $\gamma(\tau) \in B(g, O(\tau))$.

ШАГ 2. Из теоремы 1.1 и $\gamma(\tau) \in B(g, O(\tau))$ вытекает, что в окрестности точки 0 векторные поля $\widetilde{X}_i$ можно выразить через векторные поля $\widehat{X}'_k$ так, что

$$\widetilde{X}_i(\Gamma(\tau)) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik}(\tau)\widehat{X}'_k(\Gamma(\tau)), \text{ где } \alpha_{ik}(\tau) = \begin{cases} o(\tau^{\deg X_k - \deg X_i}), & \text{если} \\ \qquad \deg X_k > \deg X_i, \\ \delta_{ik} + o(1) & \text{в других случаях} \end{cases}$$

при $\tau \to 0$. Далее, используя разложение (1.3) векторных полей $\widehat{X}'_i$ в стандартном евклидовом базисе, из (3.2) для точек τ, достаточно близких к 0, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \dot\gamma_j(\tau)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{\dim H_1} a_i(\tau)\widetilde{X}_i(\Gamma(\tau)) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\dim H_1} a_i(\tau)\alpha_{ik}(\tau)\widehat{X}'_k(\Gamma(\tau))$$
$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{\dim H_1} a_i(\tau)\alpha_{ik}(\tau)\hat z_k^j(\Gamma(\tau))\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{3.4}$$

ШАГ 3. Для $1 \le j \le \dim H_1$ имеем $\deg X_j = 1$. Тогда из (3.3) и (1.3) получим $\hat z_k^j(\Gamma(\tau)) = \delta_{jk} + O(\tau)$. Поэтому из (3.4) выводим $\dot\gamma_j(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{\dim H_1} a_i(\tau)\tilde\alpha_{ij}(\tau)$, где по-прежнему $\tilde\alpha_{ij}(\tau) = \delta_{ij} + o(1)$. Отсюда $a_i(\tau) = \sum\limits_{n=1}^{\dim H_1} \dot\gamma_n(\tau)\beta_{ni}(\tau)$, где матрица $\{\beta_{ni}(\tau)\}$, $n, i = 1, \ldots, \dim H_1$, обратная к $\{\tilde\alpha_{ij}(\tau)\}$, имеет элементы $\beta_{ni}(\tau) = \delta_{ni} + o(1)$. Следовательно,

$$a_i(\tau) = \sum_{n=1}^{\dim H_1} \dot r_n(\tau)\beta_{ni}(\tau) + \sum_{n=1}^{\dim H_1} \dot\gamma_n(0)\beta_{ni}(\tau), \quad \text{где } r_n(\tau) = \int\limits_0^\tau (\dot\gamma_n(\sigma) - \dot\gamma_n(0))\, d\sigma. \tag{3.5}$$

Представление $a_i(\tau)$ в виде двух сумм определяет разбиение (3.4) на две части:

$$(3.4) = I + II. \tag{3.6}$$

В первую часть входят все слагаемые, содержащие множитель $\dot r_n(\tau)$, а во вторую — слагаемые, содержащие множитель $\dot\gamma_n(0)$.

Фиксируем $\dim H_{l-1} < j \le \dim H_l$, $1 < l \le M$, и оценим на последующих шагах $\dot\gamma_j(\tau) = I_j(\tau) + II_j(\tau)$, где

$$I_j(\tau) = \sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{\dim H_1} \dot r_i(\tau)\alpha_{ik}(\tau)\hat z_k^j(\Gamma(\tau)) + \sum_{k=1}^{j}\sum_{n,i=1}^{\dim H_1} o(1)\dot r_n(\tau)\alpha_{ik}(\tau)\hat z_k^j(\Gamma(\tau)),$$

$$II_j(\tau) = \sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{\dim H_1} \dot\gamma_i(0)\alpha_{ik}(\tau)\hat z_k^j(\Gamma(\tau)) + \sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{\dim H_1} o(1)\alpha_{ik}(\tau)\hat z_k^j(\Gamma(\tau))$$

— коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial x_j}$ в суммах I и II соответственно.

ШАГ 4 (оценки I_j и II_j). Здесь мы рассмотрим два случая.

1. $\dim H_1 < k \le j$. Для любых $1 \le i \le \dim H_1$ справедливо $\alpha_{ik}(\tau) = o(\tau^{\deg X_k - 1})$ в силу шага 2 и $\hat z_k^j(\Gamma(\tau)) = O(\tau^{\deg X_j - \deg X_k})$ ввиду (3.3). Поэтому при указанных значениях параметров все слагаемые в (3.4) имеют множитель порядка $o(\tau^{l-1})$ при $\tau \to 0$. С учетом (3.6) при рассматриваемых значениях параметра суммирования k все слагаемые имеют порядок

(i) $o(\tau^{l-1})\sum\limits_{i=1}^{\dim H_1}\dot r_i(\tau)$ при $\tau\to 0$ в сумме I_j;

(ii) $o(\tau^{l-1})$ при $\tau\to 0$ в сумме II_j.

2. $1\le k\le\dim H_1$. Имеем $|\alpha|_h=\deg X_j-|e_k|_h=l-1$, откуда $\hat z_k^j=O(\tau^{l-1})$ в силу (3.3). Поэтому при этих значениях параметра k все слагаемые имеют порядок

(iii) $O(\tau^{l-1})\sum\limits_{i=1}^{\dim H_1}\dot r_i(\tau)$ при $\tau\to 0$ в сумме I_j;

(iv) $o(\tau^{l-1})$ при $\tau\to 0$ в сумме II_j, кроме слагаемого, содержащего множитель $\dot\gamma_k(0)$ (он получается в II_j при $i=k$, так как $\alpha_{ik}(\tau)=\delta_{ik}+o(1)$).

Резюмируя вышесказанное, выражение для $\dot\gamma_j(\tau)$ из (3.4) можно записать в следующем виде:

$$\dot\gamma_j(\tau)=\sum_{i=1}^{\dim H_1}\dot\gamma_i(0)\sum_{|\alpha+e_i|_h=\deg X_j,\,\alpha>0}F^j_{\alpha,e_i}(g)\Gamma(\tau)^\alpha + o(\tau^{l-1})+\sum_{i=1}^{\dim H_1}\dot r_i(\tau)O(\tau^{l-1}). \tag{3.7}$$

Два последних слагаемых в (3.7) можно исключить из последующих рассмотрений, так как при оценке приращения $\gamma_j(\tau)$ на промежутке $[0,\tau]$ по формуле Ньютона — Лейбница они будут иметь порядок $o(\tau^l)$. Действительно, для всех $1\le i\le\dim H_1$ и $s>0$ из (3.1) и (3.5) имеем $|r_i(\tau)|\le\int\limits_0^\tau|\dot\gamma_i(\sigma)-\dot\gamma_i(0)|\,d\sigma=o(\tau)$ и

$$\left|\int_0^\tau \dot r_i(\sigma)O(\sigma^s)\,d\sigma\right|\le|O(\tau^s)|\int_0^\tau|\dot\gamma_i(\sigma)-\dot\gamma_i(0)|\,d\sigma=o(\tau^{s+1}).$$

шаг 5. В оставшейся в (3.7) двойной сумме слагаемые с индексом α, для которых $|\alpha+e_i|_h<\deg X_j$, содержат множитель $\Gamma(\tau)^\alpha=o(\tau^{l-1})$, так как в этом случае в произведение $\Gamma(\tau)^\alpha$ обязательно входит множитель $\gamma_j(\tau)=\dot\gamma_j(0)\tau+o(\tau)=o(\tau)$, $j>\dim H_1$. Поэтому выражение (3.7) для $\dot\gamma_j(\tau)$ сводится к следующему:

$$\dot\gamma_j(\tau)=\sum_{i=1}^{\dim H_1}\dot\gamma_i(0)\sum_{\substack{|\alpha+e_i|_h=\deg X_j,\\ |\alpha+e_i|=\deg X_j}}F^j_{\alpha,e_i}(g)\Gamma(\tau)^\alpha+o(\tau^{l-1}). \tag{3.8}$$

С учетом $\Gamma(\tau)=\dot\Gamma(0)\tau+o(\tau)$ замечаем, что каждое слагаемое в сумме (3.8) равно $\dot\gamma_i(0)F^j_{\alpha,e_i}(g)\Gamma(\tau)^\alpha=\tau^{l-1}\dot\gamma_i(0)F^j_{\alpha,e_i}(g)\dot\Gamma(0)^\alpha+o(\tau^{l-1})$. Следовательно, оставляя в сумме (3.8) лишь слагаемые порядка, сравнимого с τ^{l-1}, получаем

$$\dot\gamma_j(\tau)=\sum_{i=1}^{\dim H_1}\tau^{l-1}\sum_{|\alpha|=|\alpha|_h=l-1}\dot\gamma_i(0)F^j_{\alpha,e_i}(g)\dot\Gamma(0)^\alpha+o(\tau^{l-1}). \tag{3.9}$$

Аналогично вышесказанному второе слагаемое при оценке приращения $\gamma_j(\tau)$ равно $o(\tau^l)$. Следовательно, для справедливости доказываемой теоремы необходимо и достаточно, чтобы двойная сумма в (3.9) равнялась нулю. Это свойство установлено в лемме 1.1.

Таким образом, доказано $\gamma_j(\tau)=o(\tau^{\deg X_j})$ при всех $j>\dim H_1$. Поскольку горизонтальные компоненты отображения γ дифференцируемы в точке t_0, то по свойству 3.1 из оценки $\gamma_j(\tau)=o(\tau^{\deg X_j})$ при всех $j>\dim H_1$ получаем hc-дифференцируемость γ в точке t_0.

Метод доказательства теоремы 3.1 применим к более широкому классу отображений и позволяет также сделать дополнительные выводы о характере hc-дифференцируемости.

Следствие 3.1. *Пусть кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbf{M}$ на многообразии Карно дифференцируема почти всюду в римановом смысле и горизонтальна, т. е. $\dot\gamma(s) \in H_{\gamma(s)}\mathbf{M}$ для почти всех $s \in [a,b]$. Если горизонтальные компоненты кривой γ абсолютно непрерывны, то и все остальные также абсолютно непрерывны. Кроме того, кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbf{M}$ hc-дифференцируема почти всюду: всякая точка $t \in [a,b]$, которая является точкой Лебега производных ее горизонтальных компонент, будет также и точкой ее hc-дифференцируемости.*

Доказательство. Абсолютная непрерывность компонент доказывается индукцией по степеням полей с помощью соотношений (3.4) и (3.5), а дифференцируемость вытекает из теоремы 3.1.

Следствие 3.2. *Пусть на многообразии Карно $\mathbf{M}$ задано ограниченное и непрерывное по совокупности переменных семейство кривых $\gamma : [a,b] \times F \to \mathbf{M}$, где F — метрическое пространство. Предположим, что при каждом фиксированном $u \in F$ кривая $\gamma(\cdot, u)$ дифференцируема в римановом смысле во всех точках отрезка $[a,b]$ и горизонтальна, т. е. $\frac{d}{ds}\gamma(s,u) \in H_{\gamma(s,u)}\mathbf{M}$ для всех $s \in [a,b]$. Если риманова производная $\frac{d}{ds}\gamma(s,u)$ ограничена и равномерно непрерывна по совокупности переменных s и u, то и ее hc-производная также ограничена и равномерно непрерывна на $[a,b] \times F$. Кроме того, сходимость $\Delta^{\gamma(s)}_{\tau^{-1}}\gamma(s+\tau,u)$ к $\dot\gamma(s,u) \in \mathscr{G}^{\gamma(s,u)}$ будет равномерной по $s \in [a,b]$ и $u \in F$.*

Доказательство. Достаточно во всех пунктах доказательства теоремы 3.1 проверить, что малость всех величин, сходящихся к нулю, будет равномерной на $[a,b] \times F$ (соотношение $C_0 d_\infty(g,v) \le d_c(g,v)$ доказано в предложении 1.1).

Следствие 3.3. *Пусть кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbf{M}$ на многообразии Карно принадлежит классу C^1 и ее риманов касательный вектор $\dot\gamma_i(t)$ горизонтален во всех точках $t \in [a,b]$. Тогда кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbf{M}$ hc-дифференцируема во всех точках $t \in [a,b]$. Кроме того, сходимость $\Delta^{\gamma(s)}_{\tau^{-1}}\gamma(s+\tau)$ к $\dot\gamma(s) \in \mathscr{G}^{\gamma(s)}$ будет равномерной по $s \in [a,b]$.*

Доказательство. Для любых $x, y \in [a,b]$ определена длина $L(\gamma|_{[x,y]})$ кривой $\gamma : [x,y] \to \mathbf{M}$, при этом $d_\infty(\gamma(y),\gamma(x)) \le c_1 L(\gamma|_{[x,y]}) \le c_1 C|y-x|$, где $C = \max\limits_{t\in[a,b]} |\dot\gamma(t)|$. Таким образом, кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbf{M}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1 во всех точках отрезка $[a,b]$ и поэтому равномерно hc-дифференцируема по следствию 3.2. Последнее утверждение следствия 3.3 доказано.

Лемма 3.1. *Всякое липшицево отображение $\gamma : E \to \mathbf{M}$ дифференцируемо почти всюду в римановом смысле, и в точках римановой дифференцируемости γ имеет место включение $\dot\gamma(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbf{M}$.*

Доказательство. В нормальных координатах в точке $g = \gamma(t)$ имеем $\gamma(t+\tau) = \exp\biggl(\sum\limits_{j=1}^{N} \gamma_j(\tau)\, X_j\biggr)(g)$, $t+\tau \in E$. Из липшицевости отображения $\gamma : E \to \mathbf{M}$ и свойств метрики $d_{\mathbf{M}}$ (см. п. 1.6) вытекает оценка $\gamma_j(\tau) = O(\tau^{\deg X_j})$ для всех $j \ge 1$, $t+\tau \in E$. Поскольку $\deg X_j \ge 2$ в случае $j > \dim H_1$, то производная $\dot\gamma_j(0)$ существует и равна 0 для всех $j > \dim H_1$. Следовательно, риманова дифференцируемость отображения γ в точке t эквивалентна дифференцируемости в 0 только горизонтальных компонент γ_j, $j = 1, \ldots, n$, функции γ.

Далее, липшицево отображение $\gamma : E \to \mathbf{M}$ будет также липшицевым относительно римановой метрики (см. (1.8)). Таким образом, в силу классической теоремы Радемахера риманова производная $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbf{M}$ существует для почти всех $t \in [a,b]$. Из вышесказанного вытекает, что в каждой такой точке $\dot\gamma(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbf{M}$.

Поскольку липшицево отображение $\gamma : [a,b] \to \mathbf{M}$ абсолютно непрерывно в римановом смысле (см. сравнение метрик в п. 1.6), из леммы 3.1 и теоремы 3.1 выводим

Следствие 3.4. *Всякое липшицево отображение $\gamma : [a,b] \to \mathbf{M}$ hc-дифференцируемо почти всюду на $[a,b]$: если $t \in [a,b]$ — точка Лебега производных ее горизонтальных компонент, то она будет также и точкой ее hc-дифференцируемости.*

3.3. В этом пункте мы установим hc-дифференцируемость липшицевых отображений $\gamma : E \to \mathbf{M}$, $E \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество.

Напомним, что точка $x \in A$, $A \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество, имеет плотность 1 относительно A (или просто $x \in A$ — точка плотности множества A), если $|A \cap (\alpha,\beta)|_1 = \beta - \alpha + o(\beta - \alpha)$ при $\beta - \alpha \to 0$, $x \in (\alpha,\beta)$ (здесь символ $|\cdot|_1$ обозначает одномерную меру Лебега). Известно, что почти все точки измеримого множества A суть его точки плотности (см., например, [27]).

Из приведенного доказательства леммы 3.1 явным образом видно, что вопрос о hc-дифференцируемости липшицева отображения зависит от дифференцируемости его горизонтальных компонент. Если липшицево отображение $\gamma : E \to \mathbf{M}$, $E \subset \mathbb{R}$ можно предполагать замкнутым, записано в нормальных координатах: $\gamma(t+\tau) = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} \gamma_j(\tau)\, X_j\Bigr)(\gamma(t))$, $t \in E$ — фиксированное число, $t+\tau \in E$, то по лемме 3.1 его компоненты $\gamma_j(\tau)$, $j = 1,\dots,N$, дифференцируемы почти всюду на E. Известно, что почти все точки плотности множества E суть точки Лебега производных горизонтальных компонент, т. е. для промежутков $(\alpha,\beta) \ni \tau$, $t+\tau \in E$, имеем

$$\int\limits_{\{\sigma\in(\alpha,\beta)\,|\,t+\sigma\in E\}} |\dot\gamma_j(\sigma) - \dot\gamma_j(\tau)|\, d\sigma = o(\beta-\alpha) \quad \text{при } \beta - \alpha \to 0 \tag{3.10}$$

для всех $j = 1,\dots,\dim H_1$. Заметим, что свойство (3.10) не зависит от выбора системы координат в окрестности точки $g = \gamma(t)$.

Теорема 3.2. *Всякое липшицево отображение $\gamma : E \to \mathbf{M}$ hc-дифференцируемо почти всюду на замкнутом множестве E: отображение $\gamma : E \to \mathbf{M}$ hc-дифференцируемо во всякой точке $t \in E$, в которой*

1) плотность t относительно E равна единице;

2) существуют производные $\dot\gamma_j(0)$, $j = 1,\dots,\dim H_1$, горизонтальных компонент отображения γ, где $\gamma(t+\tau) = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} \gamma_j(\tau)\, X_j\Bigr)(\gamma(t))$, $t+\tau \in E$;

3) в точке $\tau = 0$ выполняется условие (3.10).

hc-Производная $\dot\gamma(t)$ равна

$$\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{\dim H_1} \dot\gamma_j(0)\widehat{X}_j^{\gamma(t)}\Biggr)(\gamma(t)) = \exp\Biggl(\sum_{j=1}^{\dim H_1} \dot\gamma_j(0) X_j\Biggr)(\gamma(t)).$$

Доказательство. шаг 1. Пусть $t \in E$ — точка, в которой выполняются перечисленные в теореме условия 1–3, и $g = \gamma(t)$. Так как результат локальный, можно считать также, что E содержится в некотором отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $t\in[a,b]$, где $a,b\in E$, таком, что его образ содержится в $\mathscr{G}^g$ (уменьшая, если необходимо, отрезок $[a,b]$, можно предполагать, что $\gamma([a,b]\cap E)\subset\mathscr{G}^{\gamma(\eta)}$ для любого $\eta\in[a,b]\cap E$).

Открытое ограниченное множество $Z=(a,b)\setminus E$ представимо в виде объединения не более чем счетного набора дизъюнктных интервалов: $Z=\bigcup\limits_j(\alpha_j,\beta_j)$, где для удобства дальнейших оценок полагаем $\alpha_j<\beta_j$, если $t\le\alpha_j$, и $\beta_j<\alpha_j$, если $\alpha_j<t$. Известно (см., например, [28]), что в $\mathscr{G}^{\gamma(\alpha_j)}$ существует горизонтальная кривая $\tilde\sigma_j:[0,b_j]\to\mathscr{G}^{\gamma(\alpha_j)}$, соединяющая точки $\tilde\sigma_j(0)=\gamma(\alpha_j)$ и $\tilde\sigma_j(b_j)=\gamma(\beta_j)$, параметризованная длиной дуги, при этом $b_j=d_c^{\gamma(\alpha_j)}(\gamma(\alpha_j),\gamma(\beta_j))\le cd_\infty^{\gamma(\alpha_j)}(\gamma(\alpha_j),\gamma(\beta_j))=cd_\infty(\gamma(\alpha_j),\gamma(\beta_j))\le c_1d_{\mathbf{M}}(\gamma(\alpha_j),\gamma(\beta_j))\le c_1L|\beta_j-\alpha_j|$, где c и c_1 не зависят от j (см. соотношение между метриками в п. 1.6). Следовательно, отображение $\sigma_j:[\alpha_j,\beta_j]\to\mathbf{M}$, определенное по правилу

$$[\alpha_j,\beta_j]\ni\eta\mapsto\sigma_j(\eta)=\tilde\sigma_j\left(\frac{b_j}{|\beta_j-\alpha_j|}|\eta-\alpha_j|\right)\in\mathscr{G}^{\gamma(\alpha_j)},$$

является липшицевым в метрике $d_c^{\gamma(\alpha_j)}$ с постоянной липшицевости cL для всех $j\in\mathbb{N}$. Теперь определим продолжение $f:[a,b]\to\mathbf{M}$ следующим образом:

$$f(\eta)=\begin{cases}\gamma(\eta), & \text{если } \eta\in E,\\ \sigma_j(\eta), & \text{если } \eta\in(\alpha_j,\beta_j).\end{cases}$$

ШАГ 2. Отображение $f:[a,b]\to\mathbf{M}$ обладает следующими свойствами:

1) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbf{M}$ — липшицево относительно римановой метрики;

2) риманова производная отображения f существует для почти всех $\eta\in[a,b]$ и ограничена;

3) для почти всех $\eta\in E$ вектор $\dot f(\eta)$ принадлежит горизонтальному пространству $H_{\gamma(\eta)}\mathbf{M}$;

4) $f:[a,b]\to\mathbf{M}$ имеет риманову производную в точке t, равную $\dot\gamma(t)$;

если $f(t+\tau)=\exp\biggl(\sum\limits_{j=1}^N f_j(\tau)\,X_j\biggr)(g)$, $t+\tau\in[a,b]$, то

5) $f_j(\tau)=O(\tau^{\deg X_j})$ при $\tau\to0$ для всех $j\ge1$;

6) 0 — точка Лебега производных $\dot f_j(\tau)$, $j=1,\dots,\dim H_1$.

Действительно, если $t\le\alpha_j<\eta_1<\beta_j<\alpha_k<\eta_2<\beta_k\le b$, то, учитывая соотношения между метриками (см. п. 1.6), имеем оценки $\rho(f(\eta_1),f(\eta_2))\le\rho(f(\eta_1),\gamma(\beta_j))+\rho(\gamma(\beta_j),\gamma(\alpha_k))+\rho(\gamma(\alpha_k),f(\eta_2))\le C((\beta_j-\eta_1)+(\alpha_k-\beta_j)+(\eta_2-\alpha_k))=C|\eta_2-\eta_1|$. Аналогично рассматриваются и остальные случаи возможного расположения точек η_1 и η_2 относительно t. Отсюда получаем первое и второе свойства.

Далее, если $t\le\alpha_j<t+\tau<\beta_j$, то $d_\infty(f(t+\tau),f(t))\le C(d_{\mathbf{M}}(f(t+\tau),\gamma(\alpha_j))+d_{\mathbf{M}}(\gamma(\alpha_j),\gamma(t)))\le C_1\bigl(d_\infty^{\gamma(\alpha_j)}(f(t+\tau),\gamma(\alpha_j))+(\alpha_j-t)\bigr)=C_2((t+\tau-\alpha_j)+(\alpha_j-t))=C_2\tau$ в силу (1.6), построения отображения f и соотношений между метриками. Отсюда получаем пятое свойство, а следовательно, и дифференцируемость в 0 всех компонент f_j, $j>\dim H_1$: $\dot f_j(0)=0$, $j>\dim H_1$.

Поскольку производные липшицевой функции ограничены и t — точка плотности множества E, то для промежутков $(r,s)\ni 0$ имеем

$$\int\limits_{(r,s)}|\dot f_j(\sigma)-\dot\gamma_j(0)|\,d\sigma=\int\limits_{\{\sigma\in(r,s)\mid t+\sigma\in E\cap[a,b]\}}|\dot\gamma_j(\sigma)-\dot\gamma_j(0)|\,d\sigma + \int\limits_{\{\sigma\in(r,s)\mid t+\sigma\notin E\cap[a,b]\}}|\dot f_j(\sigma)-\dot\gamma_j(0)|\,d\sigma=o(|s-r|)\quad(3.11)$$

при $s-r\to 0$ для всех $j=1,\dots,\dim H_1$. Отсюда $\int\limits_0^\tau(\dot f_j(\sigma)-\dot\gamma_j(0))\,d\sigma=f_j(\tau)-\dot\gamma_j(0)\tau=o(\tau)$ и $\frac{df_j}{d\tau}(0)=\dot\gamma_j(0)$ для всех $j=1,\dots,\dim H_1$. Таким образом, доказаны свойства 4 и 6.

Заметим, что предыдущие рассуждения не зависят от системы координат. Они основаны на следующем принципе: если в точке $\eta\in E$ отображение $f|_E$ имеет риманову производную, $\eta\in E$ — точка плотности множества E и точка Лебега горизонтальных координатных функций отображения $f|_E$, то с учетом леммы 3.1 и уже доказанного выше отображение f имеет риманову производную в точке η, при этом риманов касательный вектор принадлежит горизонтальному пространству $H_{\gamma(\eta)}\mathbf{M}$. Это доказывает свойство 3.

шаг 3. Поскольку риманова производная $\dot f(\eta)$ отображения $f:[a,b]\to\mathbf{M}$ принадлежит горизонтальному пространству $H_{f(\eta)}\mathbf{M}$ только в почти всех точках $\eta\in E$, то прямое применение теоремы 3.1 невозможно. Однако с учетом того, что дополнение $[a,b]\setminus E$ имеет нулевую плотность в точке t, можно адаптировать метод ее доказательства и в этом случае. Укажем изменения, которые необходимо произвести в доказательстве теоремы 3.1, чтобы получить hc-дифференцируемость отображения f в фиксированной выше точке t.

Введем обозначение

$$\Gamma(\tau)=\begin{cases}(\gamma_1(\tau),\dots,\gamma_N(\tau)), & \text{если } t+\tau\in E,\\ (f_1(\tau),\dots,f_N(\tau)), & \text{если } t+\tau\notin E.\end{cases}$$

Выше доказано, что $\dot\Gamma(0)=(\dot\gamma_1(0),\dots,\dot\gamma_{\dim H_1}(0),0,\dots,0)$. Для точек τ, достаточно близких к 0 и таких, что $t+\tau\in E$, выводим (3.2). В точках $t+\tau\in(\alpha_j,\beta_j)$ имеем

$$\dot\Gamma(\tau)=\sum_{j=1}^N\dot f_j(\tau)\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{\dim H_1}a_i(\tau)\widehat X_i'^{f(\alpha_j)}(\Gamma(\tau)).\qquad(3.12)$$

На втором шаге доказательства теоремы 3.1 в точках $t+\tau\in(\alpha_j,\beta_j)$ из $f(\tau)\in B(g,O(\tau))$ вытекает, что в окрестности точки 0 векторные поля $\widehat X_i'^{f(\alpha_j)}$ выражаются через векторные поля $\widehat X_k'$ (здесь мы пишем $\widehat X_k'$ вместо $\widehat X_k'^g$) в виде

$$\widehat X_i'^{f(\alpha_j)}(\Gamma(\tau))=\sum_{k=1}^N\alpha_{ik}(\tau)\widehat X_k'(\Gamma(\tau)),\ \text{где } \alpha_{ik}(\tau)=\begin{cases}O(\tau^{\deg X_k-\deg X_i}),\ \text{если}\\ \qquad\deg X_k>\deg X_i,\\ \delta_{ik}+o(1)\ \text{в других случаях}\end{cases}$$

при $\tau\to 0$ (см. (1.3)). Следовательно, используя разложение (1.3) векторных полей $\widehat X_i'$ в стандартном евклидовом базисе, из (3.2) и (3.12) для точек τ, достаточно близких к 0, получаем разложение типа (3.4), в котором поведение множителей $\alpha_{ik}(\tau)$ при $\deg X_k>\deg X_i$ зависит от положения точки $t+\tau$ относительно E:

$$\alpha_{ik}(\tau)=\begin{cases}o(\tau^{\deg X_k-\deg X_i}), & \text{если } t+\tau\in E,\\ O(\tau^{\deg X_k-\deg X_i}), & \text{если } t+\tau\notin E.\end{cases}\qquad(3.13)$$

Выводы третьего шага доказательства теоремы 3.1 остаются без изменений.

Основные изменения возникают на четвертом шаге доказательства теоремы 3.1. Действительно, поведение $I_j(\tau)$ и $II_j(\tau)$ в случае $\dim H_1 < k \leq j$, $\dim H_{l-1} < j \leq \dim H_l$, $1 < l \leq M$, остается прежним в точках $t+\tau \in E$. Однако в точках $t+\tau \notin E$ с учетом (3.13) имеем следующее: все слагаемые имеют порядок

(v) $O(\tau^{l-1}) \sum\limits_{i=1}^{\dim H_1} \dot{r}_i(\tau)$ при $\tau \to 0$, $t+\tau \notin E$, в сумме $I_j(\tau)$, где $r_i(\tau) = \int\limits_0^\tau (\dot{f}_i(\sigma) - \dot{\gamma}_i(0))\, d\sigma$, $1 \leq i \leq \dim H_1$;

(vi) $O(\tau^{l-1})$ при $\tau \to 0$, $t+\tau \notin E$, в сумме $II_j(\tau)$.

Обозначим сумму слагаемых в $I_j(\tau)$ $(II_j(\tau))$ с индексами $\dim H_1 < k \leq j$, $\dim H_{l-1} < j \leq \dim H_l$, $1 < l \leq M$, символом $R_{I_j}(\tau)$ $(R_{II_j}(\tau))$. Оценим интегральное поведение этих величин при $\tau \to 0$. По формуле Ньютона — Лейбница они будут иметь порядок $o(\tau^l)$. Действительно, для всех $1 \leq n \leq \dim H_1$ и $s > 0$ имеем

$$\left|\int\limits_0^\tau R_{II_j}(\sigma)\, d\sigma\right| = |o(\tau^{l-1})||\{\sigma \in (0,\tau) \mid t+\sigma \in E\}|_1 \\ + |O(\tau^{l-1})||\{\sigma \in (0,\tau) \mid t+\sigma \notin E\}|_1 = o(\tau^l)),$$

так как t — точка нулевой плотности дополнения к множеству E. Для оценки величины $\int\limits_0^\tau R_{I_j}(\sigma)\, d\sigma$ следует применить (3.11).

Дальнейшее доказательство дословно повторяет последующие шаги в доказательстве теоремы 3.1.

3.4. Рассмотрим кривую (непрерывное отображение) $\gamma : [a,b] \to (\mathbf{M}, d_c)$ (см. п. 1.6 для определения $(\mathbf{M}, d_c)$). Спрямляемость кривой γ определяется стандартным образом (см., например, [28]).

Предложение 3.1 [17, 20, 21]**.** *Любая спрямляемая кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbf{M}$ hc-дифференцируема почти всюду.*

Доказательство. Пусть $L(\gamma)$ — длина данной кривой, а $s : [0, L(\gamma)] \to \mathbf{M}$ — ее натуральная параметризация. Существует непрерывная монотонная функция $\psi : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$, удовлетворяющая условию $\gamma(t) = s(\psi(t))$. Так как кривая с натуральной параметризацией удовлетворяет условию Липшица, то кривая s hc-дифференцируема почти всюду. Тогда вопрос о hc-дифференцируемости функции γ сводится к вопросу о hc-дифференцируемости композиции $s \circ \psi$ на отрезке $[a,b]$. Для проверки последнего надо лишь заметить, что если Σ — совокупность точек, в которых отображение s не hc-дифференцируемо, то на прообразе $\psi^{-1}(\Sigma)$ функция ψ имеет производную равную нулю почти всюду.

§ 4. Применения

4.1. Теоремы типа Радемахера и Степанова о дифференцируемости отображений многообразий Карно. Пусть $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ — два многообразия Карно и $E \subset \mathbf{M}$ — произвольное множество. Здесь мы сформулируем дифференциальные свойства липшицевых отображений $f : (E, d_{\mathbf{M}}) \to (N, d_{\mathbf{N}})$, где E — некоторое подмножество в $\mathbf{M}$.

Теорема 4.1 [20, 21]. *Пусть E — множество в $\mathbf{M}$, и пусть $f : E \to \mathbf{N}$ либо липшицево отображение, либо отображение, удовлетворяющее соотношению*

$$\overline{\lim_{x\to a, x\in E}} \frac{d_{\mathbf{N}}(f(a), f(x))}{d_{\mathbf{M}}(a,x)} < \infty \tag{4.1}$$

для почти всех $a \in E$. Тогда f hc-дифференцируемо почти всюду на E.

Соответствующий hc-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли однозначно определяется отображением

$$H_g\mathbf{M} \ni X_i(g) \mapsto X_i f(g) = \frac{d}{dt} f(\exp tX_i(g))|_{t=0} = \sum_{j=1}^{\dim \widetilde{H}_1} a_{ij} Y_j(f(g)) \in H_{f(g)}\mathbf{N} \tag{4.2}$$

Доказательство этого результата следует рассуждениям работ [20, 21] и существенно основано на теореме 3.2 и методах работ [8, 9]. Главная часть его доказательства сводится к следующей лемме, представляющей независимый интерес.

Лемма 4.1 [20, 21]. *Пусть $E \subset \mathbf{M}$ — измеримое ограниченное множество конечной меры, а $f : E \to \mathbf{N}$ — липшицево отображение на E. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $F \subset E$ такое, что $m(E \setminus F) < \varepsilon$, на котором выполняются следующие свойства:*

(a) *«разностное отношение» $\Delta^{f(g)}_{t^{-1}} f(\exp tX_i(g))$ сходится к $\exp(X_i f(g))(f(g))$ равномерно по $g \in F$, $i = 1, \dots, n$;*

(b) *отображение $g \mapsto \exp(X_i f(g))(f(g))$ непрерывно на F, $i = 1, \dots, n$;*

(c) *отображение $f : F \to \mathbf{N}$ hc-дифференцируемо во всех точках множества F;*

(d) *отображение $(g, v) \mapsto Df(g)\langle v\rangle$ непрерывно по совокупности переменных $g \in F$ и $v \in \mathscr{G}^g$;*

(e) *если $\psi : E' \to \mathbf{N}$ — другое липшицево отображение измеримого множества $E' \supset F$, совпадающее с f на F, $f|_F = \psi|_F$, то отображение ψ hc-дифференцируемо во всех точках множества F и hc-дифференциалы отображений f и ψ совпадают на F.*

4.2. Дифференциальные свойства квазиконформных отображений многообразий Карно. Для гомеоморфизма $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ двух многообразий Карно $(\mathbf{M}, d_{\mathbf{M}})$, $(\mathbf{N}, d_{\mathbf{N}})$ введем величины $L_f(x,r) = \max\limits_{d_{\mathbf{M}}(x,y)=r} d_{\mathbf{N}}(f(x), f(y))$, $l_f(x,r) = \min\limits_{d_{\mathbf{M}}(x,y)=r} d_{\mathbf{N}}(f(x), f(y))$, $H_f(x,r) = \frac{L_f(x,r)}{l_f(x,r)}$, и пусть $H_f(x) = \overline{\lim\limits_{r\to+0}} H_f(x,r)$. Отображение f называется *квазиконформным*, если величина $H_f(x)$ ограничена в $\mathbf{M}$.

Из определения квазиконформности стандартным образом выводится, что отображение f удовлетворяет условию (4.1). Следовательно, получаем

Предложение 4.1. *Всякое квазиконформное отображение $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ двух многообразий Карно hc-дифференцируемо почти всюду.*

Заметим, что несколько более слабая концепция дифференцируемости квазиконформных отображений многообразий Карно впервые предложена в работе Маргулиса и Мостова [29]. Она существенно опирается на работу Митчелла [30]: *квазиконформное отображение $\varphi : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ hc-дифференцируемо в точке x_0 в смысле работы* [29], *если семейство отображений $\varphi_t : (\mathbf{M}, td_c) \to (\mathbf{N}, t\tilde{d_c})$, индуцированное отображением $\varphi : (\mathbf{M}, d_c) \to (\mathbf{N}, \tilde{d}_c)$, сходится равномерно на* *компактных множествах при $t \to \infty$ к горизонтальному гомоморфизму касательных конусов в точках $x_0 \in \mathbf{M}$ и $\varphi(x_0) \in \mathbf{N}$.* К сожалению, это определение не совсем пригодно для исследования дифференциалов. Проблема состоит в том, что предел по Громову — Хаусдорфу определяется только на классах изометричных пространств. В контексте этого понятия не имеет никакого смысла говорить о дифференцируемости изометричных отображений.

Применение теории квазиконформных отображений [20, 21] на многообразиях Карно к теории пространств Соболева см. в [31].

4.3. В этом пункте мы обобщаем классическое свойство о том, что непрерывность частных производных функции, определенной на евклидовом пространстве, гарантирует ее дифференцируемость.

Теорема 4.2. *Пусть $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ — отображение многообразий Карно такое, что в каждой точке $g \in \mathbf{M}$ существуют горизонтальные производные $X_i f(g) \in H_{f(g)}\mathbf{N}$, непрерывные на $\mathbf{M}$, $i = 1, \dots, \dim H_1$. Тогда f hc-дифференцируемо в каждой точке $\mathbf{M}$.*

Соответствующий hc-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли однозначно определяется отображением (4.2) базисных векторов $X_i(g)$, $i = 1, \dots, \dim H_1$, горизонтального пространства $H_g\mathbf{M}$ в горизонтальные векторы пространства $H_{f(g)}\mathbf{N}$ и записывается в виде (4.3).

Отображение $(g, v) \mapsto Df(g)\langle v\rangle$ непрерывно по совокупности переменных $g \in \mathbf{M}$ и $v \in \mathscr{G}^g$.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что отображение f локально липшицево: $d_{\mathbf{N}}(f(x), f(y)) \leq C d_{\mathbf{M}}(x, y)$, x, y принадлежат некоторой компактной окрестности U. Чтобы это проверить, достаточно соединить точки $x, y \in U$ горизонтальной кривой γ из предложения 1.1 (см. детали [14, 16]), длина которой контролируется расстоянием $d_\infty(x, y)$, и заметить, что $f \circ \gamma$ будет горизонтальной кривой, длина которой контролируется длиной исходной кривой. Отсюда получаем $d_{\mathbf{N}}(f(x), f(y)) \leq C_1 d_\infty(f(x), f(y)) \leq C_2 L(f \circ \gamma) \leq C_3 L(\gamma) \leq C_4 d_\infty(x, y) \leq C_5 d_{\mathbf{M}}(x, y)$. Поскольку отображение f липшицево, остается лишь применить либо метод работ [18, 21], либо лемму 4.1. Теорема доказана.

4.4. Определение касательного конуса зависит от локального базиса. Возникает вопрос о связи касательных конусов, найденных относительно различных локальных базисов. Применяя последнюю теорему, мы доказываем здесь, что соответствие «локальный базис $\mapsto$ нильпотентный касательный конус» имеет функториальный характер. Этот результат в случае полей класса C^∞ (C^{2M}) другим способом доказан в [32, 33] ([34]) (в [32, 33] приведено, в частности, «бескоординатное» определение касательного конуса).

Следствие 4.1. *Пусть на многообразии Карно $\mathbf{M}$ фиксированы два локальных базиса $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$, $i = 1, \dots, N$, причем оба набора $X_1, \dots, X_{\dim H_1}$ и $Y_1, \dots, Y_{\dim H_1}$ порождают одно и то же горизонтальное подрасслоение $H\mathbf{M}$. Тогда локальная группа Карно $\mathscr{G}^g$, определяемая векторными полями $\{X_i\}$, изоморфна локальной группе Карно $\widetilde{\mathscr{G}}^g$, определяемой векторными полями $\{Y_i\}$: $\bigl(\tilde{\delta}^g_{t^{-1}} \circ \delta^g_t\bigr)(v)$ сходится к изоморфизму локальных групп Карно $\mathscr{G}^g$ и $\widetilde{\mathscr{G}}^g$ при $t \to 0$ равномерно относительно $v \in \mathscr{G}^g$ (здесь $\tilde{\delta}^g_t$ — однопараметрическая группа растяжений, определяемая векторными полями $\{Y_i\}$).*

Соответствующий этому hc-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли в точ-

ке g однозначно определяется отображением

$$H_g\mathbf{M} \ni X_i(g) \mapsto X_i(g) = \sum_{j=1}^{\dim H_1} b_{ij} Y_j(g) \in H_g\mathbf{M}$$

базисных векторов $X_i(g)$, $i = 1, \dots, \dim H_1$, горизонтального пространства $H_g\mathbf{M}$ в себя: $H\mathscr{G}^g \ni \widehat{X}_i^g \mapsto \sum\limits_{j=1}^{\dim H_1} b_{ij} \widehat{Y}_j^g \in H\widetilde{\mathscr{G}}^g$.

Доказательство. Пусть символ $\mathbf{M}^X$ ($\mathbf{M}^Y$) обозначает многообразие Карно $\mathbf{M}$ с локальным базисом $\{X_i\}$ ($\{Y_i\}$), $i = 1, \dots, N$. Пусть еще символ $i : \mathbf{M}^X \to \mathbf{M}^Y$ обозначает отображение пространств, порожденное тождественным отображением $i : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$. Очевидно, i удовлетворяет условиям теоремы 4.2. Тогда отображение i является hc-дифференцируемым в точке g и по теореме 4.2 «разностные отношения» $\tilde{\delta}^g_{t^{-1}}(\delta^g_t(w))$ сходятся равномерно к гомоморфизму $Di(g) : \mathscr{G}^g \to \widetilde{\mathscr{G}}^g$ при $t \to 0$. Применяя те же самые аргументы к обратному отображению i^{-1} и теорему 2.1 из [20, 21] о hc-дифференцируемости суперпозиции hc-дифференцируемых отображений, приходим к выводу, что $Di(g)$ — изоморфизм локальных групп Карно (нильпотентных касательных конусов в точке g относительно различных локальных базисов).

В заключение я выражаю благодарность В. Берестовскому, М. Булиге, А. Грешнову, П. Пансю и М. Рейману за плодотворные обсуждения предварительных результатов работы, а также искреннюю признательность М. Кармановой за полезные замечания к предыдущему варианту работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goodman R. W.* Nilpotent Lie groups: structure and applications to Analysis. Berlin: Springer-Verl., 1970 (Lecture Notes in Math.; 562).
2. *Rothschild L., Stein E.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.
3. *Metivier G.* Fonction spectrale et valeurs proposes d'une classe d'operateurs // Comm. Partial Differential Equations. 1976. V. 1. P. 479–519.
4. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
5. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 16. С. 7–85. (Итоги науки и техники).
6. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Reimannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
7. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math. 1989. V. 119. P. 1–60.
8. *Vodop'yanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2000. С. 603–670
9. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 70–89.
10. *Magnani V.* Differentiability and area formula on stratified Lie groups // Houston J. Math. 2001. V. 27, N 2. P. 297–323.
11. *Rademakher H.* Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit. I // Math. Ann. 1919. Bd 79. S. 340–359.
12. *Stepanoff W.* Ueber totale Differenzierbarkeit // Math. Ann. 1923. Bd 90. S. 318–320.
13. *Folland G. B., Stein I. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; 28).

14. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Локальная геометрия пространств Карно — Каратеодори в условиях минимальной гладкости // Докл. РАН. 2007. (В печати).

15. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей // Докл. РАН. 2007. (В печати).

16. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot manifolds under minimal smoothness. Novosibirsk, 2006. 50 p. (Preprint / Sobolev Insitute; № 183).

17. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость кривых в категории многообразий Карно // Докл. РАН. 2006. Т. 410, № 4. С. 439–444.

18. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость отображений многообразий Карно и изоморфизм касательных конусов // Докл. РАН. 2006. Т. 411, № 4. С. 439–443.

19. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 5. С. 592–596.

20. *Vodop′yanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 247–302. (Contemp. Math.; V. 424).

21. *Vodopyanov S.* Differentiability of Sobolev mappings of Carnot–Carathéodory spaces. Novosibirsk, 2006. 44 p. (Preprint / Sobolev Institute; № 182).

22. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.

23. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

24. *Belläiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Reimannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.

25. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.

26. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

27. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.

28. *Burago D., Burago Yu., Ivanov S.* A Course in metric geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001.

29. *Margulis G. A., Mostow G. D.* The differential of quasi-conformal mapping of a Carnot–Carathéodory spaces // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5, N 2. P. 402–433.

30. *Mitchell J.* On Carnot–Carathéodory metrics // J. Differential Geometry. 1985. V. 21. P. 35–45.

31. *Vodop'yanov S. K.* Sobolev classes and quasiconformal mappings on Carnot–Carathéodory spaces // Geometry, Topology and Physics: Proc. of the First Brazil–USA Workshop held in Campinas, Brazil, June 30–July 7, 1996. Editors: B. N. Apanasov, S. B. Bradlow, W. A. Rodrigues, Jr., K. K. Uhlenbeck. Berlin; New York: Walter de Gruyter & Co, 1997. P. 301–316.

32. *Margulis G. A., Mostow G. D.* Some remarks on the definition of tangent cones in a Carnot–Carathéodory space // J. Anal. Math. 2000. V. 80. P. 299–317.

33. *Agrachev A., Marigo A.* Nonholonomic tangent spaces: intrinsic construction and rigid dimensions // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 9. P. 111–120.

34. *Грешнов А. В.* Метрики равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.

Статья поступила 28 июня 2004 г., окончательный вариант — 12 февраля 2007 г.

Водопьянов Сергей Константинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru