Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 517.988.8

К ИССЛЕДОВАНИЮ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННО–РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. Е. Железовский

Аннотация: Рассматривается задача Коши для абстрактного квазилинейного гиперболического уравнения в гильбертовом пространстве с переменными операторными коэффициентами и с негладким (только интегрируемым по Бохнеру) свободным членом. Исследуется схема приближенного решения этой задачи, являющаяся комбинацией схемы метода Галёркина по пространству и трехслойной разностной схемы с весами по времени. Устанавливается априорная энергетическая оценка погрешности при отсутствии каких-либо специальных условий на проекционные подпространства. Эта оценка конкретизируется для случаев, когда дискретизация по пространству проводится методом конечных элементов (для уравнения с частными производными) и методом Галёркина в форме Михлина.

Ключевые слова: абстрактное гиперболическое уравнение, проекционно-разностный метод, метод Галёркина, трехслойная разностная схема, оценка погрешности.

Введение

В статье рассматривается задача Коши для абстрактного квазилинейного гиперболического уравнения в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$u''(t) + A(t)u(t) + B(t, u(t)) = f(t), \tag{0.1}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \tag{0.2}$$

где $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$, u и f — искомая и заданная функции соответственно, $A(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ — неограниченные самосопряженные положительно определенные операторы, действующие в H и имеющие общую область определения (следовательно, эти операторы порождают одно и то же, с точностью до эквивалентных скалярных произведений, энергетическое пространство, которое обозначим через V), $B : [0, T] \times V \to H$ — нелинейный оператор. Условия на операторные коэффициенты уравнения (0.1) подробно сформулированы ниже в разд. 1. Свободный член f уравнения (0.1) предполагается негладким (принадлежащим только пространству $L^1(0, T; H)$ функций со значениями в H, интегрируемых по Бохнеру на $[0, T]$), так что задача (0.1), (0.2) имеет, вообще говоря, лишь обобщенное решение.

Для задачи (0.1), (0.2) исследуется сходимость схемы проекционно-разностного метода, являющейся комбинацией схемы метода Галёркина по пространству и трехслойной разностной схемы с весами по времени (по переменной t). Устанавливается априорная энергетическая оценка погрешности при отсутствии каких-либо специальных условий на проекционные подпространства метода Галёркина. Полученная оценка (см. (2.1) ниже) гарантирует сильную сходимость приближенных решений к точному в энергетической норме при любом выборе последовательности проекционных подпространств, предельно плотной в пространстве V. Аналогичная оценка погрешности полудискретного метода Галёркина (без дискретизации по времени) установлена в [1]. По-видимому, не только полученная в настоящей работе оценка погрешности, но и сам факт сходимости в энергетической норме проекционно-разностного метода для гиперболических, в том числе линейных, уравнений второго порядка в такой общей ситуации — произвольные проекционные подпространства, единственное условие $f \in L^1(0,T;H)$ на свободный член и вследствие этого существование лишь обобщенного точного решения — является новым результатом.

Полученная оценка погрешности конкретизируется в разд. 3 для случая дискретизации по пространству уравнения с частными производными методом конечных элементов и для другого варианта построения проекционных подпространств, идея которого восходит к работе [2] (метод Галёркина в форме Михлина).

Ранее энергетические оценки погрешности проекционно-разностного метода для абстрактных гиперболических уравнений устанавливались в [3–6]. В [3], как и в настоящей статье, рассматривался случай негладкого свободного члена, но предполагалось, что дискретизация по пространству проводится методом Галёркина в форме Михлина. Кроме того, в [3] в отличие от настоящей статьи исследование проводилось для линейного уравнения и только для чисто неявной по времени вычислительной схемы. В [4–6] рассматривался общий случай задания проекционных подпространств, не обязанных удовлетворять никаким специальным условиям, но оценки погрешности устанавливались при гладкости точного решения более высокой, чем в настоящей работе.

В литературе неоднократно приводились энергетические оценки погрешности проекционно-разностного метода для гиперболических уравнений с частными производными второго порядка (см., например, [7–10]). Однако все известные нам оценки такого рода в ситуациях, соответствующих рассматриваемой в настоящей работе — свободный член, удовлетворяющий только условию $f \in L^1(0,T;H)$, и существование лишь обобщенного точного решения — либо вообще неприменимы, либо фактически не гарантируют сходимости метода. Кроме того, все известные нам работы по выводу оценок погрешности проекционно-разностного метода для гиперболических уравнений с частными производными ориентированы на метод конечных элементов дискретизации по пространству, и поэтому из результатов этих работ в отличие от настоящей статьи не следует сходимость метода при произвольном выборе последовательности проекционных подпространств, удовлетворяющей только условию предельной плотности в энергетическом пространстве.

В статье используются стандартные обозначения пространств: $\mathscr{L}(X;Y)$, $C^k([0,T];X)$, $L^p(0,T;X)$, где X и Y — линейные нормированные пространства, $k=0$ или $k=1$, $p=1$ или $p=\infty$; $[0,T]$ — отрезок оси $\mathbb{R}$ (см., например, [11, с. 579]), а также следующие обозначения: $\mathscr{L}(X)=\mathscr{L}(X;X)$; $\mathscr{B}(X)$ — пространство симметричных билинейных форм $b(\cdot,\cdot\cdot)$ в X, для которых

$$\|b\|_{\mathscr{B}(X)} = \sup_{\|x_1\|_X=\|x_2\|_X=1} |b(x_1,x_2)| < \infty;$$

$L^1(0,T)=L^1(0,T;\mathbb{R})$; $W^{k,p}(0,T;X)$ ($k=1$ или $k=2$, $p=1$ или $p=\infty$) — пространство функций из $C^{k-1}([0,T];X)$, производные k-го порядка которых, понимаемые в смысле распределений [11, с. 20], принадлежат $L^p(0,T;X)$.

1. Исходные условия, схема проекционно-разностного метода, вспомогательные результаты

В вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H на отрезке $[0,T]\subset\mathbb{R}$ будем рассматривать задачу (0.1), (0.2). В уравнении (0.1) $A(t)$ $(0\le t\le T)$ — неограниченные самосопряженные положительно определенные в H операторы с общей областью определения D, причем оператор $(A(0))^{-1}$, обратный к $A(0)$, компактен в H. В силу теоремы Гайнца [12, с. 177] все операторы $(A(t))^{1/2}$ также имеют общую область определения, которую обозначим через V. Введем на D норму $\|\cdot\|_D=\|A(0)\cdot\|_H$, тем самым превратим D в банахово пространство. Примем, что для всех $x\in D$ и $t\in[0,T]$

$$\|x\|_D\le a_0\|A(t)x\|_H, \tag{1.1}$$

где a_0 — константа, не зависящая от x и t. Обозначим энергетическое скалярное произведение, порожденное оператором $A(t)$, через $a(t,\cdot,\cdot\cdot)$, т. е. $a(t,x_1,x_2)=((A(t))^{1/2}x_1,(A(t))^{1/2}x_2)_H$, $t\in[0,T]$, $x_1,x_2\in V$. Снабдив V скалярным произведением $(\cdot,\cdot\cdot)_V=a(0,\cdot,\cdot\cdot)$ и соответственно нормой $\|\cdot\|_V=(\cdot,\cdot)_V^{1/2}$, превратим это множество в сепарабельное гильбертово пространство. Будем считать, что функция $t\mapsto a(t,\cdot,\cdot\cdot)$ принадлежит $W^{2,1}(0,T;\mathscr{B}(V))$. Оператор B в уравнении (0.1), вообще говоря, нелинейный, действует из $[0,T]\times V$ в H и имеет производную Фреше $DB[t,x]\in\mathscr{L}(\mathbb{R}\oplus V;H)$ в каждой точке $(t,x)\in[0,T]\times V$. Обозначим $\beta_1(t,r)=\sup\limits_{\|x\|_V\le r}\|DB[t,x](1,0)\|_H$, $\beta_2(r)=\sup\limits_{0\le t\le T,\,\|x\|_V\le r}\|DB[t,x](0,\cdot)\|_{\mathscr{L}(V;H)}$. Будем предполагать, что для любого $r\ge 0$ функция $t\mapsto\beta_1(t,r)$ принадлежит $L^1(0,T)$, а $\beta_2(r)<\infty$. На свободный член уравнения (0.1) налагаем условие $f\in L^1(0,T;H)$.

Отметим для дальнейшего два следствия принятых условий на оператор B. Учитывая определение функции β_2, с помощью формулы конечных приращений [13, с. 482] получаем неравенство

$$\|B(t,x_1)-B(t,x_2)\|_H\le\beta_2(\max(\|x_1\|_V,\|x_2\|_V))\|x_1-x_2\|_V, \tag{1.2}$$

где t — любое число из $[0,T]$, x_1 и x_2 — любые элементы V. Следуя доказательству леммы 2 в [14], легко показать, что существует неубывающая функция $\beta:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ такая, что для любых $t\in[0,T]$ и $x\in V$

$$\|B(t,x)\|_H\le\beta(\|x\|_V). \tag{1.3}$$

Зададим произвольную последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ конечномерных подпространств пространства V и зафиксируем числа $\sigma_1,\sigma_2,\delta\in\mathbb{R}$, $\sigma_1\ge\sigma_2$, $\delta>0$. Будем использовать следующие обозначения: P_n — ортопроектор на V_n в пространстве H; $A_n(t)$, $t\in[0,T]$, — действующий в V_n оператор, определенный из тождества $(A_n(t)x_{1n},x_{2n})_H=a(t,x_{1n},x_{2n})$, $x_{1n},x_{2n}\in V_n$; $x_k^{(1)}=(x_{k+1}-x_k)/\tau$ $(k=\overline{0,s-1})$, $x_k^{(2)}=\big(x_k^{(1)}-x_{k-1}^{(1)}\big)/\tau$, $x_{k,\sigma_1,\sigma_2}=\sigma_1x_{k+1}+(1-\sigma_1-\sigma_2)x_k+\sigma_2x_{k-1}$ $(k=\overline{1,s-1})$, где $\{x_k\}_{k=0}^s$ — какой-либо конечный набор элементов пространства V, τ — заданное положительное число.

Исследуемая схема проекционно-разностного метода для задачи (0.1), (0.2) имеет вид

$$y_k^{(2)}+A_n(k\tau)y_{k,\sigma_1,\sigma_2}+P_nB(k\tau,y_k)=P_nf_k\quad(k=\overline{1,s-1}), \tag{1.4}$$

$$y_0 = y_1 = 0, \quad y_k \in V_n \quad (k = \overline{2, s}). \tag{1.5}$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in]0, T/2]$ — заданные числа, $s = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k\tau \le T\}$,

$$f_k = \frac{1}{2\tau} \int\limits_{(k-1)\tau}^{(k+1)\tau} f(t)\, dt.$$

Все рассматриваемые пары значений (n, τ) всюду в этой работе считаем такими, что

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1+\delta}{4}\right) \tau^2 A_n(k\tau) + E_n \ge 0 \quad (k = \overline{1, s-1}), \tag{1.6}$$

где E_n — тождественный оператор в V_n и операторное неравенство понимается в смысле скалярного произведения пространства H. Условия $\sigma_1 \ge \sigma_2$ и (1.6) получаются, если записать для главной линейной части уравнения (1.4) (без члена $P_n B(k\tau, y_k)$) известные в теории линейных операторно-разностных схем условия устойчивости (см. [15, с. 363; 16, с. 235]). Множество всех пар $(n, \tau) \in \mathbb{N} \times]0, T/2]$, удовлетворяющих (1.6), обозначим через U.

При любом выборе $(n, \tau) \in U$ задача (1.4), (1.5) имеет единственное решение $\{y_k\}_{k=0}^s$ в силу того, что операторный коэффициент $\tau^{-2} E_n + \sigma_1 A_n(k\tau)$ при y_{k+1} в (1.4) положителен в смысле скалярного произведения пространства H при любом $k = \overline{1, s-1}$, что является следствием условий $\sigma_1 \ge \sigma_2$ и (1.6). Решение задачи (1.4), (1.5), соответствующей некоторой паре значений $(n, \tau) \in U$, будем трактовать как приближенное решение задачи (0.1), (0.2), построенное проекционно-разностным методом.

Всюду ниже считаем, что функция f продолжена нулем на $]T, +\infty[$ и по нечетности на $]-\infty, 0[$. Для любого $\varepsilon > 0$ определим функцию $f_\varepsilon \in W^{1,1}(0, T; H)$ равенством

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(\theta)\, d\theta$$

(f_ε — функция Стеклова для функции f; см., например, [17, с. 156]). Нужные для дальнейшего свойства функции f_ε отмечены в [1]. Наряду с исходной задачей (0.1), (0.2) и схемой (1.4), (1.5) будем рассматривать задачу

$$v''(t) + A(t)v(t) + B(t, v(t)) = f_\varepsilon(t), \tag{1.7}$$

$$v(0) = v'(0) = 0 \tag{1.8}$$

и соответствующую ей схему проекционно-разностного метода:

$$z_k^{(2)} + A_n(k\tau) z_{k,\sigma_1,\sigma_2} + P_n B(k\tau, z_k) = P_n f_{\varepsilon,k} \quad (k = \overline{1, s-1}), \tag{1.9}$$

$$z_0 = z_1 = 0, \quad z_k \in V_n \quad (k = \overline{2, s}), \tag{1.10}$$

где $(n, \tau) \in U$, $s = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k\tau \le T\}$,

$$f_{\varepsilon,k} = \frac{1}{2\tau} \int\limits_{(k-1)\tau}^{(k+1)\tau} f_\varepsilon(t)\, dt.$$

Из сказанного выше об однозначной разрешимости задачи (1.4), (1.5) следует, что и задача (1.9), (1.10) при любом выборе $\varepsilon > 0$ и $(n, \tau) \in U$ имеет единственное решение $\{z_k\}_{k=0}^s$.

Будем пользоваться определением обобщенного решения задачи (0.1), (0.2), принятым в [1].

Определение. Пусть $T_0 \in]0, T]$, $\varepsilon > 0$. Функцию $v : [0, T_0] \to V$ назовем *сильным решением задачи* (1.7), (1.8) *на отрезке* $[0, T_0]$, если $v \in W^{2,\infty}(0, T_0; H) \cap W^{1,\infty}(0, T_0; V)$, для почти всех $t \in [0, T_0]$ значения $v(t)$ принадлежат D, функция $t \mapsto A(t)v(t)$ принадлежит $L^\infty(0, T_0; H)$ и функция v удовлетворяет уравнению (1.7) при почти всех $t \in [0, T_0]$ и начальным условиям (1.8).

Сформулируем результаты об однозначной разрешимости задач (0.1), (0.2) и (1.7), (1.8) и приведем нужные для дальнейшего оценки решений задачи (1.7), (1.8) и приближенных задач (1.4), (1.5) и (1.9), (1.10).

Теорема 1. *Существует такое число* $T_0 \in]0, T]$, *что верны следующие утверждения:*

1) *обобщенное решение* u *задачи* (0.1), (0.2) *на отрезке* $[0, T_0]$ *существует и единственно;*

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *сильное решение* v *задачи* (1.7), (1.8) *на отрезке* $[0, T_0]$ *существует и единственно и имеют место оценки*

$$\max_{0 \le t \le T_0} \|v(t)\|_V \le c_1, \tag{1.11}$$

$$\sup_{0 \le t \le T_0} \operatorname{ess}(\|v''(t)\|_H + \|v'(t)\|_V) \le c_2(\|f'_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)} + 1), \tag{1.12}$$

$$\sup_{0 \le t \le T_0} \operatorname{ess} \|v(t)\|_D \le c_3(\|f'_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)} + 1), \tag{1.13}$$

где c_1, c_2, c_3 — *константы, не зависящие от* ε;

3) *при любом выборе* $(n, \tau) \in U$, *где* $\tau \le T_0/2$, *и* $\varepsilon > 0$ *для решений задач* (1.4), (1.5) *и* (1.9), (1.10) *имеют место оценки*

$$\max_{0 \le k \le s_0} \|y_k\|_V \le c_4, \quad \max_{0 \le k \le s_0} \|z_k\|_V \le c_4, \tag{1.14}$$

а если τ *достаточно мало* ($\tau \le \tau_0$, *где* $\tau_0 \in]0, T_0/2]$ — *константа, не зависящая от* n *и* ε), *то имеет место также оценка*

$$\max_{1 \le k \le s_0 - 1} \big\|z_k^{(2)}\big\|_H + \max_{0 \le k \le s_0 - 1} \big\|z_k^{(1)}\big\|_V \le c_5(\|f'_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)} + 1); \tag{1.15}$$

в (1.14), (1.15) $s_0 = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k\tau \le T_0\}$, c_4 *и* c_5 — *константы, не зависящие от* n, τ *и* ε.

Доказательство сформулированной теоремы проводится в основном известными методами, поэтому мы здесь только кратко охарактеризуем его основные этапы. Утверждение об однозначной обобщенной разрешимости задачи (0.1), (0.2) является следствием соответствующего результата работы [1] (доказанного при несколько более общих условиях на оператор B, чем принятые в настоящей работе). Доказательство однозначной сильной разрешимости задачи (1.7), (1.8) проводится по схеме, изложенной в [11, гл. 1, пп. 1.4–1.6], с добавлением элементов техники работы [1]. При построении сильного решения задачи (1.7), (1.8) используются полудискретные аппроксимации Галёркина и для них устанавливаются априорные оценки вида (1.11) и (1.12) соответственно с помощью леммы Бихари [18, с. 189, теорема 3] и леммы Гронуолла [19, с. 191]. Сами же оценки (1.11) и (1.12) для точного решения задачи (1.7), (1.8) получаются из соответствующих оценок аппроксимаций Галёркина для этой задачи предельным переходом. Оценку (1.13) устанавливаем, выражая $A(t)v(t)$ из (1.7), оценивая в полученном выражении (в норме $\|\cdot\|_H$) $v''(t)$ с помощью (1.12), $B(t,v(t))$ с помощью (1.3), (1.11) и $f_\varepsilon(t)$ с помощью неравенства (5.8) работы [1] и затем учитывая (1.1). При получении оценок (1.14) и (1.15) используется в основном известная техника вывода сеточных энергетических оценок (см. [15, гл. VI, § 3, пп. 2–5, 9; 16, гл. IV, § 1, пп. 4, 7, § 2, п. 6]), причем при получении оценок (1.14) применяется дискретный аналог леммы Бихари [20].

Отметим, что при выводе оценок (1.13) и (1.15) в полной мере используются принадлежность функции $t \mapsto a(t,\cdot,\cdot\cdot)$ пространству $W^{2,1}(0,T;\mathscr{B}(V))$ и принятые выше условия на оператор B. Что касается ограничений на T_0, то они возникают по причине значительной общности принятых условий на оператор B при использовании в доказательстве теоремы 1 леммы Бихари и ее дискретного аналога. Всюду ниже под T_0 следует понимать любое фиксированное число из $]0,T]$, реализующее все утверждения теоремы 1. Если же уравнение (0.1) — линейное ($B(t,u(t)) = B_0(t)u(t)$, где, например, $B_0 \in C^1([0,T];\mathscr{L}(V;H))$), то ограничения на T_0 не возникают, так как тогда при доказательстве теоремы 1 все оценки решений рассматриваемых задач выводятся с помощью леммы Гронуолла и ее дискретного аналога [16, с. 171, лемма 4]. Таким образом, в случае линейного уравнения (0.1) можно считать, что $T_0 = T$.

2. Основной результат

Будем использовать обозначения: R_n — оператор $E - Q_n$, где E — тождественный оператор в пространстве V, Q_n — ортопроектор V на V_n (в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot\cdot)_V$); $\rho_n = \|R_n\|_{\mathscr{L}(D;V)} \equiv \|R_n(A(0))^{-1}\|_{\mathscr{L}(H;V)}$; ω_{f,T_0} — интегральный модуль непрерывности функции f на отрезке $[0,T_0]$ (ср. [17, с. 215]):

$$\omega_{f,T_0}(\varepsilon) = \sup_{|\theta|\le\varepsilon} \int_0^{T_0} \|f(t+\theta) - f(t)\|_H \, dt, \quad \varepsilon > 0.$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2. *При любом выборе $(n,\tau) \in U$, где τ достаточно мало ($\tau \le \tau_0$, где τ_0 — константа, не зависящая от n, указанная в теореме 1), справедлива оценка погрешности схемы (1.4), (1.5):*

$$\max_{0\le k\le s_0-1,\ 0\le\lambda\le1} \Big[\big\|y_k^{(1)} - u'((k+\lambda)\tau)\big\|_H + \|y_k - u((k+\lambda)\tau)\|_V\Big] \\ \le c_0\omega_{f,T_0}\big(\rho_n^{1/2} + \tau^{1/2}\big) + c\big(\rho_n^{1/2} + \tau^{1/2}\big), \quad (2.1)$$

где $s_0 = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k\tau \le T_0\}$, $\{y_k\}_{k=0}^s$ — решение задачи (1.4), (1.5), u — обобщенное решение задачи (0.1), (0.2) на отрезке $[0,T_0]$, c_0 и c — константы, не зависящие от n и τ.

Замечание. Если последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ предельно плотна в V, то $\rho_n \to 0$, $n \to \infty$ (см. [1, разд. 4, лемма]). Поскольку также $\omega_{f,T_0}(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ (это легко доказать, пользуясь плотностью пространства $C^0([0,T_0];H)$ в $L^1(0,T_0;H)$ и равномерной непрерывностью на $[0,T_0]$ любой функции из $C^0([0,T_0];H)$), имеем $\omega_{f,T_0}\big(\rho_n^{1/2} + \tau^{1/2}\big) \to 0$, $n \to \infty$, $\tau \to 0$, так что оценка (2.1) гарантирует сходимость

$$\max_{0\le k\le s_0-1,\ 0\le\lambda\le1} \Big[\big\|y_k^{(1)} - u'((k+\lambda)\tau)\big\|_H + \|y_k - u((k+\lambda)\tau)\|_V\Big] \to 0$$

при $n \to \infty$, $\tau \to 0$, $(n, \tau) \in U$.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем $(n, \tau) \in U$, где $\tau \le \tau_0$. Будем исходить из неравенства, являющегося следствием аксиомы треугольника для норм $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_V$:

$$\max_{0 \le k \le s_0-1,\ 0 \le \lambda \le 1} \left[\left\| y_k^{(1)} - u'((k+\lambda)\tau) \right\|_H + \|y_k - u((k+\lambda)\tau)\|_V \right] \le M_1 + M_2 + M_3, \quad (2.2)$$

где

$$M_1 = \max_{0 \le t \le T_0} [\|u'(t) - v'(t)\|_H + \|u(t) - v(t)\|_V],$$

$$M_2 = \max_{0 \le k \le s_0-1} \left\| y_k^{(1)} - z_k^{(1)} \right\|_H + \max_{0 \le k \le s_0} \|y_k - z_k\|_V,$$

$$M_3 = \max_{0 \le k \le s_0-1,\ 0 \le \lambda \le 1} \left[\left\| z_k^{(1)} - v'((k+\lambda)\tau) \right\|_H + \|z_k - v((k+\lambda)\tau)\|_V \right],$$

v — сильное решение на отрезке $[0, T_0]$ задачи (1.7), (1.8), соответствующей некоторому (пока произвольному) значению $\varepsilon > 0$, $\{z_k\}_{k=0}^{s}$ — решение задачи (1.9), (1.10), соответствующей тому же самому значению ε. Поочередно оценим сверху величины M_1, M_2, M_3.

Ясно, что функцию $w = u - v$ можно рассматривать как обобщенное решение на отрезке $[0, T_0]$ задачи $w''(t) + A(t)w(t) = \varphi(t)$, $w(0) = w'(0) = 0$ со свободным членом $\varphi(t) = f(t) - f_\varepsilon(t) + B(t, v(t)) - B(t, u(t))$. Для этой задачи имеет место энергетическое равенство [21, с. 308]. Применив к нему стандартную технику вывода энергетических оценок (см. [11, с. 23–24; 21, с. 297–298; 22, с. 203–205]), с помощью (1.2) и (1.11) получим

$$M_1 \le d_1 \|f - f_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)}, \quad (2.3)$$

где d_1 — константа, не зависящая от ε.

Почленно вычтем (1.9) из (1.4). К полученному уравнению применим известную технику вывода сеточных энергетических оценок (см. [15, гл. VI, § 3; 16, гл. IV, § 1, 2]), учитывая начальные условия $y_0 = y_1 = z_0 = z_1 = 0$ (см. (1.5), (1.10)) и используя условия $\sigma_1 \ge \sigma_2$, (1.6), неравенство (1.2) и оценки (1.14). В результате будем иметь

$$M_2 \le d_2 \tau \sum_{k=1}^{s_0-1} \|f_k - f_{\varepsilon,k}\|_H,$$

где d_2 — константа, не зависящая от n, τ и ε. Простым следствием определений элементов f_k и $f_{\varepsilon,k}$ является неравенство

$$\tau \sum_{k=1}^{s_0-1} \|f_k - f_{\varepsilon,k}\|_H \le \|f - f_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)}.$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$M_2 \le d_2 \|f - f_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)}. \quad (2.4)$$

Чтобы оценить должным образом величину M_3, действуем в основном по образцу доказательств теоремы 4 в [4] и теоремы 2 в [5] (исходным задачам и схемам проекционно-разностного метода, рассматривавшимся в [4, 5], в данном случае соответствуют задача (1.7), (1.8) и схема (1.9), (1.10)). Дополнительно, используя оценки (1.11)–(1.13), вторую оценку (1.14) и оценку (1.15), выражаем зависимость от ε констант, возникающих в процессе вывода искомой оценки величины M_3, в виде либо линейной, либо квадратичной зависимости только от $\|f'_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)}$, а некоторые из этих констант получаем вообще не зависящими от ε. Отметим также следующее отличие вывода нужной здесь оценки от указанных доказательств: неравенству (3.21) работы [4] и первому неравенству (21) работы [5] здесь должно было бы точно соответствовать неравенство

$$\big(v_k^{(2)} - z_k^{(2)}, R_{n,k}(v_{k+1} - v_{k-1})\big)_H \le C_1(\|f'_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)} + 1)\rho_n \int\limits_{(k-1)\tau}^{(k+1)\tau} \|R_n v'(t)\|_V\,dt, \tag{2.5}$$

в котором k — любое натуральное число, не превосходящее $s_0 - 1$, $v_j = v(j\tau)$ $(j = k, k \pm 1)$, C_1 — константа, не зависящая от n, τ, k и ε, а $R_{n,k} = E - Q_{n,k}$, где, в свою очередь, E — тождественный оператор в V, $Q_{n,k}$ — ортопроектор V на V_n в смысле скалярного произведения $a(k\tau, \cdot, \cdot\cdot)$; фактически же мы вместо (2.5) получаем и используем неравенство

$$\big(v_k^{(2)} - z_k^{(2)}, R_{n,k}(v_{k+1} - v_{k-1})\big)_H \le C_2(\|f'_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)} + 1)^2 \rho_n \tau, \tag{2.6}$$

где C_2 — константа, не зависящая от n, τ, k и ε (легко видеть, что (2.6) следует из (2.5) в силу элементарного неравенства $\|R_n\|_{\mathscr{L}(V)} \le 1$ и оценки (1.12)).

Итак, действуя, как только что сказано, имеем следующую оценку величины M_3 (аналог оценки (3.1) из [4] и оценки (13) из [5]):

$$M_3 \le d_3(\|f'_\varepsilon\|_{L^1(0,T_0;H)} + 1)\big(\rho_n^{1/2} + \tau^{1/2}\big), \tag{2.7}$$

где d_3 — константа, не зависящая от n, τ и ε.

Теперь оценим сверху правую часть неравенства (2.2) с помощью (2.3), (2.4) и (2.7), а затем применим неравенства (2.5) работы [1]. Тогда

$$\begin{aligned} \max_{0\le k\le s_0-1,\ 0\le\lambda\le 1} &\big[\big\|y_k^{(1)} - u'((k+\lambda)\tau)\big\|_H + \|y_k - u((k+\lambda)\tau)\|_V\big] \\ &\le \big(d_1 + d_2 + d_3\varepsilon^{-1}\big(\rho_n^{1/2} + \tau^{1/2}\big)\big)\omega_{f,T_0}(\varepsilon) + d_3\big(\rho_n^{1/2} + \tau^{1/2}\big). \end{aligned} \tag{2.8}$$

До сих пор $\varepsilon > 0$ предполагалось произвольным. Теперь примем в (2.8) $\varepsilon = \rho_n^{1/2} + \tau^{1/2}$, тогда получим оценку (2.1) с константами $c_0 = d_1 + d_2 + d_3$ и $c = d_3$, очевидно, не зависящими от n и τ. Теорема 2 доказана.

3. Примеры

Пусть задача (0.1), (0.2) — первая начально-краевая задача для гиперболического уравнения с частными производными второго порядка в цилиндре $\Omega \times [0, T]$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$, и пусть проекционные подпространства V_n для этой задачи строятся методом конечных элементов. В данном случае $H = L^2(\Omega)$, $A(t)$ $(0 \le t \le T)$ — эллиптические операторы второго порядка, заданные на $D = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ (здесь используются обозначения пространств Соболева, принятые в [11, 21]), $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, а для величины ρ_n характерна оценка $\rho_n = O(h_n)$, где h_n — максимальный из диаметров конечных элементов, порождающих подпространство V_n. Указанная оценка выводится, например, на основе теоремы 3.2.1 из [23, с. 135] (подробнее об этом см. [6, разд. 4]). Используя эту оценку и учитывая, что

$\omega_{f,T_0}(O(\varepsilon)) = O(\omega_{f,T_0}(\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$ (данное соотношение является простым следствием определения интегрального модуля непрерывности, ср. [17, с. 216]), получаем из (2.1) соответствующую рассматриваемой ситуации оценку погрешности схемы (1.4), (1.5):

$$\max_{0\le k\le s_0-1,\ 0\le\lambda\le 1}\bigl[\bigl\|y_k^{(1)} - u'((k+\lambda)\tau)\bigr\|_{L^2(\Omega)} + \|y_k - u((k+\lambda)\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}\bigr]$$
$$= O\bigl(\omega_{f,T_0}\bigl(h_n^{1/2} + \tau^{1/2}\bigr) + h_n^{1/2} + \tau^{1/2}\bigr).$$

Подобные оценки (при единственном условии $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ на свободный член и при отсутствии априорных требований гладкости точного решения более высокой, чем гладкость обобщенного решения) до сих пор были, по-видимому, неизвестны даже для линейных задач.

Вернемся к исходной абстрактной задаче (0.1), (0.2) и рассмотрим другой вариант дискретизации по пространству, идея которого восходит к [2], когда в качестве V_n берутся собственные подпространства некоторого самосопряженного положительно определенного в H оператора A_0, область определения которого совпадает с D (метод Галёркина в форме Михлина). Тогда, как нетрудно показать, $\rho_n = O(\mu_n^{-1/2})$, где μ_n — минимальное из собственных значений оператора A_0, соответствующих его собственным элементам, не принадлежащим V_n. Поэтому в данном случае из (2.1) следует оценка

$$\max_{0\le k\le s_0-1,\ 0\le\lambda\le 1}\bigl[\bigl\|y_k^{(1)} - u'((k+\lambda)\tau)\bigr\|_{H} + \|y_k - u((k+\lambda)\tau)\|_{V}\bigr]$$
$$= O\bigl(\omega_{f,T_0}\bigl(\mu_n^{-1/4} + \tau^{1/2}\bigr) + \mu_n^{-1/4} + \tau^{1/2}\bigr). \quad (3.1)$$

Подобная оценка для случая линейной исходной задачи и чисто неявной по времени вычислительной схемы получена в [3]. В отличие от [3] здесь для выполнения оценки (3.1) не требуется, чтобы операторы $A(t)$ и A_0 составляли острый угол.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Железовский С. Е.* К оценкам погрешности метода Галёркина для гиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 374–389.
2. *Михлин С. Г.* По поводу метода Ритца // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106, № 3. С. 391–394.
3. *Железовская Л. А., Железовский С. Е.* О скорости сходимости метода Ротэ — Галёркина для гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 2. С. 305–316.
4. *Железовский С. Е.* Оценки скорости сходимости проекционно-разностного метода для гиперболических уравнений // Изв. вузов. Математика. 2002. № 1. С. 21–30.
5. *Железовский С. Е.* Оценки погрешности схем проекционно-разностного метода для квазилинейных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 825–833.
6. *Железовский С. Е.* К оценкам погрешности схем проекционно-разностного метода для гиперболических уравнений // Сиб. журн. вычислит. математики. 2004. Т. 7, № 4. С. 309–325.
7. *Dendy J. E., Jr.* An analysis of some Galerkin schemes for the solution of nonlinear time-dependent problems // SIAM J. Numer. Anal. 1975. V. 12, N 4. P. 541–565.
8. *Geveci T.* On the convergence of Galerkin approximation schemes for second–order hyperbolic equations in energy and negative norms // Math. Comput. 1984. V. 42, N 166. P. 393–415.
9. *Yuan Yi-rang, Wang Hong.* The discrete-time finite element methods for nonlinear hyperbolic equations and their theoretical analysis // J. Comput. Math. 1988. V. 6, N 3. P. 193–204.
10. *Злотник А. А.* Оценки скорости сходимости проекционно-сеточных методов для гиперболических уравнений второго порядка // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1991. С. 116–167.

11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
12. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
13. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
14. *Железовский С. Е.* О существовании и единственности решения и о скорости сходимости метода Бубнова — Галёркина для одной квазилинейной эволюционной задачи в гильбертовом пространстве // Изв. вузов. Математика. 1998. № 10. С. 37–45.
15. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
16. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
17. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
18. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.
19. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
20. *Демидович В. Б.* Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1247–1255.
21. *Лионс Ж.–Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
22. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
23. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

Статья поступила 15 июня 2005 г., окончательный вариант — 15 марта 2006 г.

Железовский Сергей Евгеньевич
Саратовский гос. социально-экономический университет,
кафедра прикладной математики,
ул. Радищева, 89, Саратов 410003
jelezovsky@ssea.runnet.ru