Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 513.814

О ГЕОМЕТРИИ ПЛОСКИХ ПОЛНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ СТРОГО ПРИЧИННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. М. Гичев, Е. А. Мещеряков

Аннотация: Плоское полное причинное лоренцево многообразие называется *строго причинным*, если прошлое и будущее каждой его точки замкнуты вблизи этой точки. Рассматриваются строго причинные многообразия с унипотентной группой голономии. Такому многообразию сопоставляется набор из четырех целых неотрицательных чисел (сигнатура) и парабола в конусе положительно определенных матриц. Два многообразия эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их сигнатуры и параболы (с точностью до подходящего автоморфизма конуса и аффинной замены переменной). Кроме того, найдены необходимые и достаточные условия, которые выделяют отвечающие многообразиям параболы среди всех парабол в конусе.

Ключевые слова: лоренцево многообразие, причинность, полное аффинное многообразие.

Введение

Полное плоское лоренцево многообразие может быть реализовано в виде фактор-пространства $M = \mathbb{M}_n/\Gamma$, где $\Gamma \cong \pi_1(M)$ — дискретная подгруппа группы Пуанкаре $\mathscr{P}_n$ аффинных автоморфизмов n-мерного пространства Минковского $\mathbb{M}_n$, действующая на $\mathbb{M}_n$ свободно и собственно разрывно. Есть еще несколько эквивалентных определений: M — геодезически полное лоренцево многообразие, метрика которого имеет нулевые кручение и кривизну; M допускает атлас с локальными координатами из $\mathbb{M}_n$ и отображениями перехода из $\mathscr{P}_n$, причем любое аффинное отображение отрезка из $\mathbb{R}$ в M продолжается до аффинного отображения $\mathbb{R}$ (полное аффинное многообразие с согласованной лоренцевой метрикой). В каждом касательном пространстве T_pM лоренцева метрика определяет пару замкнутых выпуклых круглых конусов. Выбор одного из них задает локально поле конусов. Оно продолжается до глобального поля на M или на двулистной накрывающей M; условимся считать, что поле определено на M. Это равносильно тому, что линейные части отображений из Γ не переставляют конусов прошлого и будущего в $\mathbb{M}_n$. Если многообразие M не допускает замкнутых времениподобных кривых, то оно называется *причинным.* Для Γ это означает, что орбита любой точки v не пересекает заданного метрикой конуса с вершиной в v. Выбор начала координат $o \in \mathbb{M}_n$ позволяет отождествить $\mathbb{M}_n$ с вещественным векторным пространством V, в котором задана лоренцева форма ℓ сигнатуры $(+, - \dots, -)$; причинная структура задается

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06–08–01403, 06–07–89051).

конусом C (одним из двух конусов, определяемых соотношением $\ell(v,v) \geq 0$). Будем называть M *строго причинным,* если M причинно, а прошлое и будущее любой точки $p \in M$ замкнуты в некоторой окрестности p (это не означает глобальной их замкнутости). В работе [1] такие многообразия были найдены с точностью до конечных накрытий. Вкратце описание таково. Действие Γ расщепляется на аффинное унипотентное и ограниченное линейное. Это сводит задачу к случаю унипотентной Γ. Существуют два их типа. Первый (эллиптический) тривиален: Γ есть группа сдвигов векторного пространства на векторы из некоторой решетки в линейном подпространстве $T \subset V$, для которого выполнено условие $T \cap C = 0$. Мы рассматриваем второй (параболический) тип. Наименьшая размерность, в которой такие многообразия существуют, равна 4, причем все строго причинные полные плоские лоренцевы неэллиптические многообразия размерности 4 гомотетичны. В этой статье каждому многообразию указанного вида (любой размерности) сопоставляется парабола в конусе P_T положительно определенных квадратичных форм на евклидовом пространстве T. Она параметризуется квадратичным полиномом с матричными коэффициентами. Многообразие M однозначно задается этой параболой (рассматриваемой с точностью до автоморфизмов конуса) и некоторой решеткой $\Gamma \subset T$. Не всякая парабола в P_T имеет указанное выше происхождение; мы характеризуем такие параболы и описываем некоторые их инварианты.

Предмет данной статьи лежит в пересечении двух довольно хорошо изученных областей. Речь идет о полных аффинных многообразиях (см. недавние обзоры [2] и [3]) и структурах причинности в лоренцевых многообразиях, главным стимулом к изучению которых является общая теория относительности (см. например, [4, 5]). Из относящихся к их общей части нам известны лишь некоторые работы хроногеометрической школы А. Д. Александрова (ссылки можно найти в [6]), а также работы [1, 7, 8]. В [7] охарактеризованы двухконцовые причинные многообразия размерности 4, допускающие реализацию в виде H/Γ, где H — подгруппа группы Пуанкаре, действующая просто транзитивно на пространстве Минковского, а Γ — ее дискретная подгруппа. Для бóльшей части таких многообразий не выполнено условие строгой причинности. С другой стороны, нетривиальные строго причинные многообразия не могут быть глобально гиперболическими [1, 8]; последний класс плоских лоренцевых (не обязательно полных) многообразий изучался в [8]. Данная статья продолжает работу [1], в которой дано параметрическое описание плоских полных строго причинных лоренцевых многообразий (оно приведено ниже).

§ 1. Предварительные сведения и формулировка результатов

Выбирая начало $o \in \mathbb{M}_n$, можно отождествить $\mathbb{M}_n$ с вещественным векторным пространством V, в котором задана лоренцева форма ℓ сигнатуры $(+,-,\dots,-)$. Множество $\ell(v,v) \geq 0$ есть объединение двух замкнутых круглых конусов в V. Пусть C — один из них. Группа Γ действует свободно и собственно разрывно в V аффинными преобразованиями, линейные части которых сохраняют ℓ и C. Обозначим через κ отображение факторизации $\kappa : \mathbb{M}_n \to M = V/\Gamma$ и определим *прошлое* P_p и *будущее* F_p точки $p \in M$ равенствами

$$P_p = \kappa(v - C), \quad F_p = \kappa(v + C), \quad \text{где } v \in \kappa^{-1}(p).$$

Очевидно, P_p и F_p не зависят от выбора v. Дифференциал κ проектирует на M

поле параллельных конусов в $\mathbb{M}_n$:

$$C_p = d_v\kappa(v + C) \subset T_pM, \quad v \in \kappa^{-1}(p).$$

Многообразие M будем называть *причинным*, если M не допускает замкнутых кусочно-гладких времениподобных путей. Гладкий путь η является *времениподобным*, если $\eta'(t) \in C_{\eta(t)}$ при всех t; для *светоподобных* путей вектор $\eta'(t)$ лежит на границе $\partial C_{\eta(t)}$ конуса $C_{\eta(t)}$ (таким образом, светоподобный путь считается времениподобным). Очевидно, любая времениподобная кривая в M может быть поднята до времениподобной кривой в V, и проекция времениподобной кривой в V времениподобна. Будем говорить, что изометрия лоренцева многообразия *причинная*, если ориентация времениподобных кривых сохраняется (такие многообразия будем называть *причинно изометричными*). *Аффинное многообразие* по определению допускает атлас с аффинными отображениями перехода. *Полное* аффинное многообразие может быть реализовано как фактор-пространство V/Γ, где Γ — свободно и собственно разрывно действующая группа аффинных преобразований V (в нашем случае они содержатся в $\mathscr{P}_n$). Для $\gamma \in \Gamma$ положим

$$\gamma(v) = \lambda(\gamma)v + \tau(\gamma), \quad \text{где } \lambda(\gamma) \in \mathrm{O}(\ell),\ \tau(\gamma) \in V; \tag{1}$$
$$G = \lambda(\Gamma).$$

Через $\mathrm{O}(\ell)$ обозначена лоренцева группа всех линейных преобразований V, сохраняющих форму ℓ. Очевидно, отображение $\lambda : \Gamma \to G \subset \mathrm{O}(\ell)$ является гомоморфизмом, и для всех $\gamma, \nu \in \Gamma$

$$\tau(\gamma \circ \nu) = \lambda(\gamma)\tau(\nu) + \tau(\gamma).$$

Согласно [1, теорема 1] каждое строго причинное плоское полное лоренцево многообразие конечно накрывается пространством векторного расслоения с (произвольной) ограниченной группой голономии и унипотентной базой (последнее означает, что Γ состоит из аффинных преобразований с унипотентной линейной частью). Поэтому мы будем рассматривать унипотентный случай. Ввиду [1, теорема 2] унипотентное многообразие этого типа допускает конечное накрытие многообразием описанного ниже вида.

Основная конструкция. Фиксируем $v_0, v_1 \in \partial C$, для которых выполняется равенство $\ell(v_0, v_1) = 1$. Обозначим

$$L = \mathbb{R}v_0, \quad W = L^{\perp}, \quad N = W \cap v_1^{\perp}; \tag{2}$$
$$l_0(v) = \ell(v_0, v).$$

Гиперплоскость W равна $N \oplus L$ и касается ∂C в точке v_0; очевидно, $W \cap \partial C$ — полупрямая в L. Форма ℓ неположительная и вырожденная на W и невырожденная и отрицательная на N. Пусть T — произвольное линейное подпространство N, $\widetilde{T} = T + L$ (мы обычно будем отождествлять T с $\widetilde{T}/L$), Γ — решетка в T (кокомпактная подгруппа аддитивной группы T) и a — линейное отображение, симметричное по отношению к ℓ:

$$a : T \to N,$$
$$\ell(ax, y) = \ell(x, ay), \quad x, y \in T. \tag{3}$$

Аддитивная группа T аффинно действует в V по формулам

$$\lambda(x)v = v + l_0(v)ax - \left(\ell(ax, v) + \frac{1}{2}l_0(v)\ell(ax, ax)\right)v_0, \tag{4}$$

$$\tau(x) = x - \frac{1}{2}\ell(ax, x)v_0, \tag{5}$$
$$\gamma_x(v) = \lambda(x)v + \tau(x).$$

Следующее условие необходимо и достаточно для того, чтобы действие T было свободным, а действие Γ — свободным и собственно разрывным [1, лемма 19]:

$$\ker(\mathbf{1} + sa) = 0 \quad \text{для всех } s \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

где $\mathbf{1}$ обозначает тождественное отображение.

Отображения факторизации $V \to V/L$ и $V \to V/\Gamma$ обозначаются через ϕ и κ соответственно. В следующей лемме сформулированы несколько простых утверждений об описанном выше действии.

Лемма 1. *При условии* (6) *действие* (2)–(5) *обладает следующими свойствами.*

(1) *Если $x \in T$ и $ax \neq 0$, то прямая L есть в точности множество всех неподвижных точек $\lambda(x)$ в $C \cup (-C)$; сдвиг на любой вектор из L коммутирует с γ_x для всех $x \in T$.*

(2) *Действие Γ в фактор-пространстве V/L свободно и собственно разрывно. Любая гиперплоскость*

$$W_s = \{v \in V : l_0(v) = s\} \subset V$$

Γ-инвариантна, причем Γ действует в $W_s/L \subset V/L$ параллельными переносами.

(3) *Отображение ϕ взаимно однозначно на любой T-орбите в V.*

Множество всех неподвижных точек группы $G = \lambda(\Gamma)$ в V может быть строго больше L. Если $a = 0$, то Γ и T действуют переносами: $\gamma_x(v) = v + x$. В [1] этот случай назван *эллиптическим* и рассмотрен отдельно, но здесь удобнее объединять эллиптический и *параболический* ($a \neq 0$) случаи.

Аффинная структура в M позволяет определить, параллельны ли два достаточно близких вектора. Это задает параллельный перенос векторов вдоль кривых. Применяя его к петлям в точке $p \in M$, получаем представление голономии $\lambda_p : \pi_1(M, p) \cong \Gamma \to \mathrm{GL}(T_pM)$. При этом имеется естественное отождествление $\lambda_p(\pi_1(M, p)) = \lambda(\Gamma) = G$. Следующая теорема представляет собой наблюдение, уточняющее [1, теорема 2], где аналогичное утверждение доказано с точностью до конечных накрытий и без упоминания о группе голономии. Линейная группа называется *унипотентной*, если она в некотором линейном базисе реализуется треугольными матрицами с единицами на диагонали. Будем говорить, что $\Gamma \subset \mathrm{Aff}(V)$ является *унипотентной*, если $G = \lambda(\Gamma)$ обладает этим свойством (тогда Γ может быть реализована как унипотентная линейная группа в пространстве $V \oplus \mathbb{R}$).

Теорема 1. *Плоское полное строго причинное лоренцево многообразие допускает реализацию из основной конструкции тогда и только тогда, когда ее группа голономии унипотентна.*

Будем называть многообразия из теоремы 1 *унипотентными*.

Следствие 1. *Фундаментальная группа унипотентного многообразия изоморфна $\mathbb{Z}^m$.*

Доказательство. Согласно основной конструкции Γ — решетка в T. Поэтому $\pi_1(M) \cong \Gamma \cong \mathbb{Z}^m$, где $m = \dim T$.

Пусть $\widehat{\Gamma}$ обозначает алгебраическое (т. е. в топологии Зарисского) замыкание Γ в группе $\mathrm{Aff}(V)$ всех аффинных преобразований V; очевидно, $\widehat{\Gamma} \subseteq \mathscr{P}(V)$.

Предложение 1. *Алгебраическое замыкание* $\widehat{\Gamma}$ *группы* Γ *совпадает с образом* T *при определенном* (4) *и* (5) *вложении в* $\mathscr{P}(V)$; *в частности,* $\widehat{\Gamma}$ *изоморфна векторной группе* T *и* $\widehat{\Gamma}/\Gamma$ *есть тор. Кроме того, любая орбита* $\widehat{\Gamma}$ *в* V *замкнута в топологии Зарисского.*

Будем считать, что $\widehat{\Gamma}$ вложена в $\mathscr{P}_n$ и T — линейное подпространство V. Орбиты $\widehat{\Gamma}$ в M — торы $\widehat{\Gamma}/\Gamma$. Если $a = 0$, то они являются аффинными подмногообразиями M; в противном случае согласованная аффинная структура имеется на линейных расслоениях над этими торами, где линии параллельны L (свойство (2) леммы 1). В обоих случаях тор $\widehat{\Gamma}/\Gamma$ действует свободно на M, причем $M/\widehat{\Gamma}$ гомеоморфно векторному пространству, а M гомеоморфно произведению $\widehat{\Gamma}/\Gamma \times M/\widehat{\Gamma}$ [1, теорема 2].

Многообразие M полностью определяется набором v_0, v_1, T, a, Γ. Эти данные зависимы (так, пространство T есть линейная оболочка Γ). Векторы v_0 и v_1 задают W, N, L (см. (2)). Если v_0 фиксировано, то любое дополнение $N \subset W$ к L в W однозначно определяет v_1: двумерное пространство $N^{\perp}$ пересекает $\partial(C \cup (-C))$ по двум прямым, L и $\mathbb{R}v_1$, и положение v_1 на второй прямой определяется условием $\ell(v_0, v_1) = 1$. Будем записывать

$$M = M(v_0, v_1, T, a, \Gamma) = M(v_0, N, T, a, \Gamma),$$

иногда опуская параметры. Бóльшая их часть имеет естественный геометрический смысл, который проясняет следующее предложение. Пусть M удовлетворяет условиям теоремы 1. Выберем $p \in M$ и отождествим Γ с $\pi_1(M, p)$. Согласно сформулированным выше результатам можно считать, что группа $\widehat{\Gamma}$ действует на M, причем стабилизатор p равен Γ. Определим подпространства T_pM в обозначениях, согласованных с основной конструкцией:

T — касательное пространство к орбите $\widehat{\Gamma}p$ в точке p;

H — линейная оболочка векторов вида $(\lambda_p(x) - \mathbf{1})v$, где $x \in \Gamma$, $v \in T_pM$;

$$U = T + H, \quad L = H \cap H^{\perp}, \quad W = L^{\perp}.$$

Если M эллиптично, то $H = L = 0$, $U = T$, $W = V$. Так как действие $\widehat{\Gamma}/\Gamma$ в M свободно, то T можно отождествить с алгеброй Ли тора $\widehat{\Gamma}/\Gamma$. Это задает экспоненциальное отображение $\exp : T \to \widehat{\Gamma}p$. Для плоского полного аффинного многообразия M и точки $p \in M$ экспоненциальное отображение $\exp_p : T_pM \to M$ однозначно определяется следующими условиями:

(1) $\frac{d}{dt}\exp_p(tu)|_{t=0} = u$ для всех $u \in T_pM$;

(2) отображение $t \to \exp_p(tu)$ аффинно.

Из леммы 1 следует равенство $\phi \circ \exp = \phi \circ \exp_p$ (при этом, вообще говоря, $\exp \neq \exp_p$). Через π_X будем обозначать ℓ-ортогональную проекцию на подпространство X (определение корректно, если ℓ невырожденная в X).

Предложение 2. *Пусть* M — *унипотентное не эллиптическое многообразие,* $p \in M$, *а пространства* T, H, U, L, W *те же, что выше. Тогда* $\dim L = 1$ *и* L *состоит из неподвижных точек представления голономии.*

(1) *Любой выбор порождающего* L *вектора* $v_0 \in \partial C_p$, *изотропного вектора* $v_1 \perp U$ *такого, что* $\ell(v_0, v_1) = 1$, *при* $N = v_1^{\perp} \cap W$ *определяет действие* (2)–(5) *в* T *по формуле*

$$ax = \pi_N \lambda(\exp(x))v_1, \quad x \in T,$$

с T_pM *в качестве* V.

(2) *Отображение* $\exp_p$ *удовлетворяет условию* $\exp_p(\gamma(v)) = \exp_p(v)$ *для всех* $v \in T_pM$ *и отождествляет* M *с* T_pM/Γ.

(3) *Положим* $E = U^\perp \cap N$. *Тогда* $M = E \times M'$, *где подмногообразие* $M' = \exp_p(E^\perp)$ *многообразия* M *унипотентно и не эллиптично.*

Любое ℓ-симметричное отображение $T \to N$ имеет очевидную структуру: если a удовлетворяет (3), то существует единственное разложение

$$a = a' + a'', \tag{7}$$

где $a' : T \to T$ — самосопряженное преобразование T, соответствующее симметрической билинейной форме $\ell(ax, y)$ относительно отрицательно определенной на T формы $\ell(x, x)$:

$$\ell(ax, y) = \ell(a'x, y) = \ell(x, a'y), \quad x, y \in T,$$

a'' — произвольное линейное отображение

$$a'' : T \to T^\perp \cap N.$$

Положим

$$R = a''T.$$

Условие (6) может быть переписано следующим образом:

$$t \in \mathbb{R}, \quad a'x = tx \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad a''x \neq 0. \tag{8}$$

Другими словами, a'' не обращается в нуль на всех собственных векторах a', за исключением $\ker a'$. Отметим, что собственные числа a' вещественны, так как a' самосопряжено. Пространство $\ker a = \ker a' \cap \ker a'' \subseteq T$ действует в V параллельными переносами. Оно представляет собой тривиальное слагаемое для действия группы T, но для Γ это, вообще говоря, неверно.

В построении M есть три естественных этапа:

(A) фиксируем v_0, v_1, определяем L, W, N, как в (2), и выбираем $T \subseteq N$;

(B) задаем произвольный ℓ-симметрический линейный оператор $a' : T \to T$ и для каждого его собственного подпространства Λ_j — линейный оператор $a''_j : \Lambda_j \to R$ (невырожденный, если $\Lambda_j \neq \ker a'$), после чего полагаем $a'' = \sum\limits_j a''_j$, $a = a' + a''$;

(C) выбираем линейный базис в T и определяем Γ как порожденную им подгруппу аддитивной группы T.

Первый этап задает исходные данные для второго и третьего, которые могут быть выполнены независимо друг от друга. Если, например, $T = N$, то $a = 0$ и многообразие M эллиптично. Если $\dim R = 1$, то a'' имеет ранг 1 и поэтому из невырожденности a'' в собственном подпространстве a' следует одномерность последнего (будем в этом случае говорить, что a' и $M(a)$ имеют *простой спектр*).

Замечание 1. Нетрудно построить унипотентное многообразие с простым спектром и заданными собственными значениями и векторами a' (любой ортонормированный линейный базис в T). Многообразие с простым спектром с точностью до изометрии определяется m вещественными числами (спектр a') и матрицей Грама m векторов (a''-образы собственных векторов) ранга $r \geq 1$, которая должна иметь ненулевые диагональные элементы (это не классификация, поскольку указанные параметры не различают некоторых изометричных многообразий).

Причинно изометричные многообразия допускают реализацию (2)–(5) с одинаковыми параметрами. Будем говорить что многообразия *почти причинно изометричны*, если они допускают реализации, в которых различается лишь этап (C).

Для любых $p \in M$ и $x \in \pi_1(M,p)$ существует единственная реализация петли в виде отрезка прямой линии в M. Именно, это проекция отрезка с концами $\gamma_x(v)$ и v, где $\kappa(v) = p$, а $\gamma_x \in \Gamma$ — аффинное преобразование, соответствующее x (от выбора v проекция не зависит). Положим

$$q_v(x) = -\ell(\gamma_x(v) - v, \gamma_x(v) - v). \tag{9}$$

Это функция на группе $\pi_1(M,p) = \Gamma$ (квадрат ℓ-длины указанного отрезка). Если $a = 0$, то $q_v(x) = -\ell(x,x)$ не зависит от v, так как Γ действует в V сдвигами. В общем случае Γ действует сдвигами в любой гиперплоскости W_s/L (свойство (2) леммы 1). Поскольку $W \perp L$, это означает, что q_v зависит лишь от $s = l_0(v)$. Подставляя (4) и (5) в (9), прямыми вычислениями получаем

$$q_v(x) = q_s(x) = -\ell((\mathbf{1} + sa)x, (\mathbf{1} + sa)x), \quad \text{где } s = l_0(v). \tag{10}$$

Таким образом, $\{q_v : v \in V\}$ — однопараметрическое семейство квадратичных форм на T. Так как ℓ отрицательно определена на T, все формы q_s положительно определены на T благодаря (6). Это задает кривую в конусе положительно определенных квадратичных форм на T с параметризацией $s = l_0(v)$. Согласно (9) и (10) перенос начала координат в точку $\tilde{o}$ влечет сдвиг параметра:

$$s \to s - s_0, \quad s_0 = l_0(\tilde{o}). \tag{11}$$

Замена v_0, v_1 на $tv_0, v_1/t$ (соответственно) при любом $t > 0$ приводит к тем же формулам с $tl_0, a/t$ вместо l_0, a. Это соответствует замене

$$s \to ts \tag{12}$$

параметра s. Если $t < 0$, то время обращается. Поэтому мы будем рассматривать кривую $s \to q_s$ с точностью до сохраняющей ориентацию аффинной замены переменной s.

Фиксируем отождествление $\widehat{\Gamma} = \mathbb{R}^m$ и $\Gamma = \mathbb{Z}^m$. Точнее, выберем линейный изоморфизм $\iota : \mathbb{R}^m \to T$ такой, что $\iota\mathbb{Z}^m = \Gamma$. Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Согласно (10) форма q_s квадратична по s. Записывая отвечающую ей форму на $\mathbb{R}^m$, получаем

$$q_s(x) = \langle (A + 2sB + s^2C)z, z\rangle \quad \text{для всех } z \in \mathbb{R}^m, \tag{13}$$

где $x = \iota z \in T$ и A, B, C — некоторые симметрические m-матрицы. Условимся записывать условие положительной определенности матрицы S неравенством $S > 0$, причем $S \geq 0$ будет означать неотрицательную определенность S. Обозначим через P_m множество положительно определенных симметрических матриц размера m. Это однородное пространство группы $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$, действующей в P_m по правилу

$$S \to X^\top SX, \quad X \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{R}),$$

где $^\top$ обозначает операцию транспонирования. Инволюция $S \to S^{-1}$ определяет в P_m структуру симметрического пространства. Условие

$$Q(s) = A + 2sB + s^2C > 0 \quad \text{для всех } s \in \mathbb{R} \tag{14}$$

необходимо (но не достаточно) для того, чтобы матричный квадратичный полином Q удовлетворял (13). Из него следует, что $A > 0$, $C \geq 0$ (отметим, что $B = C = 0$, если $a = 0$).

Замечание 2. Аффинная оболочка построенной кривой в общем положении двумерна — параллельное ей линейное пространство порождается матрицами B и C. Поэтому она представляет собой обычную параболу, вырождающуюся в луч, если B скалярно кратна C, и в точку при $B = C = 0$; при этом случай $C = 0$, $B \neq 0$ исключается условием (14). Поскольку любая пара квадратичных параметризаций параболы связана аффинной заменой переменной, мы получаем геометрический объект — *характеристическую кривую* M.

Линейная замена переменной $z \in \mathbb{R}^m$, заданная вещественной m-матрицей $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, индуцирует ее перемещение в симметрическом пространстве P_m:

$$Q(s) \to X^\top Q(s) X. \tag{15}$$

Будем называть $Q(s)$ *характеристическим полиномом* M и обозначать через Q_M, считая его определенным с точностью до аффинной замены переменной s. Положим

$$n = \dim M, \quad m = \dim T, \quad r = \dim R; \quad k = \dim \ker a. \tag{16}$$

Набор (n, m, r, k) будем называть *сигнатурой* M. Из предложения 2 следует, что сигнатура не зависит от реализации M в форме (2)–(5). Очевидно, эти числа удовлетворяют неравенствам $m + r + 2 \leq n$, $r + k \leq m$.

Теорема 2. *Многообразия M и $\widetilde{M}$, удовлетворяющие условиям теоремы* 1, *причинно изометричны тогда и только тогда, когда их сигнатуры совпадают и*

$$Q_M(s) = X^\top Q_{\widetilde{M}}(\alpha s + \beta) X \tag{17}$$

для некоторых $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Другими словами, многообразия с одинаковой сигнатурой изометричны тогда и только тогда, когда проекции их характеристических кривых на $P_m / \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ совпадают. Отметим, что $P_m / \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ есть пространство модулей евклидовых структур на m-торе. Они отвечают евклидовым структурам, индуцированным формой $-\ell$ на орбитах тора $\widehat{\Gamma}/\Gamma$ в M/L, которые зависят лишь от $s = l_0(v)$ (группа $L \cong \mathbb{R}$, действующая в $M = V/\Gamma$ сдвигами на векторы из L, коммутирует с Γ).

Замечание 3. Замена включения $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ на $X \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ приводит к необходимому и достаточному условию почти причинной изометричности M и $\widetilde{M}$. Действительно, многообразия M и $\widetilde{M}$ почти причинно изометричны тогда и только тогда, когда они допускают реализации с одинаковыми параметрами, за исключением Γ, а любые две решетки могут быть совмещены линейным преобразованием. Если $m = 1$, то Q_M — обычный квадратичный полином вида $A + t^2$, где A — положительное число (если $a \neq 0$). В этом случае $\dim M = 4$, а теорема 2 влечет существование однопараметрического семейства неэллиптических многообразий. Более точный результат получен в [1, теорема 3]: все плоские полные строго причинные неэллиптические лоренцевы 4-многообразия гомотетичны. Построим одно из них, указав явный вид формы ℓ и преобразований из группы Γ.

Пример 1. Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}$ — бесконечная циклическая группа, порожденная аффинным преобразованием $x \to \lambda x + \tau$, определенным в базисе $e_0, \ldots, e_3$ соотношениями

$$\lambda e_0 = e_0, \quad \lambda e_1 = e_1, \quad \lambda e_2 = e_2 + e_0, \quad \lambda e_3 = e_3 + e_2 + \frac{1}{2} e_0, \quad \tau = e_1;$$

$$\ell(x, x) = 2x_0 x_3 - x_1^2 - x_2^2.$$

Многообразие V/Γ строго причинно. Прямые вычисления (см. [1]) показывают, что прошлое точки $u = (u_0, \dots, u_3)$ при $u_3 > 0$ содержит открытое полупространство $x_3 < -\frac{1}{u_3}$ и имеет нетривиальное пересечение с гиперплоскостью $x_3 = -\frac{1}{u_3}$, однако целиком ее не включает; в частности, прошлое не замкнуто и содержит некоторую светоподобную прямую.

Опишем те квадратичные полиномы из (14), которые имеют вид $Q_M(s)$. Это будет сделано за два шага: сначала сведем задачу к случаю невырожденной матрицы C, после чего охарактеризуем полиномы с $C > 0$.

Предложение 3. *Пусть многообразие M имеет сигнатуру (n, m, r, k). Предположим, что $k > 0$. Тогда матрицу Q_M можно преобразованием вида (15) сделать блочно-диагональной с блоками размеров $k \times k$ и $(m-k) \times (m-k)$, где k-блок не зависит от s, а $(m-k)$-блок является характеристическим полиномом для многообразия $\widetilde{M}$ сигнатуры $(n-k, m-k, r, 0)$; при этом M почти причинно изометрично произведению $\widetilde{M}$ и плоского k-тора. Кроме того,*

$$m - k = \operatorname{rank}(C). \tag{18}$$

Теорема 3. *Полином $Q(s)$ из (14) задает характеристическую кривую некоторого полного плоского строго причинного лоренцева многообразия M сигнатуры $(n, m, r, 0)$ тогда и только тогда, когда $n \geq m + r + 2$, выполняется (14) и*

$$C - BA^{-1}B \geq 0, \tag{19}$$

$$r = \operatorname{rank}(C - BA^{-1}B). \tag{20}$$

Если $m = r$, то (14) можно заменить более слабым условием $A > 0$.

Из (14), (19) и (20) следует, что $r > 0$ (см. замечание в конце статьи). В предположении (19) и при условии $A > 0$ ограничение (14) может быть сформулировано в терминах собственных векторов некоторых матриц (как в (8)).

Замечание 4. Условие (19) не следует из (14) и не влечет (14). Пусть, например, $m = 2$, $A = B = \mathbf{1}$ и

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Тогда выполняется (14), а (19) неверно. Если $m = 2$, $A = C = \mathbf{1}$, B диагональна с 1 и 0 на диагонали, то $Q(-1)$ вырожденная. Поэтому (14) неверно, однако (19) в этом случае справедливо.

Условие (19), в несколько вольной формулировке, означает, что $Q(s)$ представляется в виде суммы квадратов (см. доказательство теоремы). Если $m = 1$, то $BA^{-1}B - C$ — дискриминант (деленный на A) квадратичного полинома $Q(s)$.

Характеристическая кривая неявно содержит некоторые инварианты M. Один из наиболее существенных указан в следующем предложении. Он не определяет M полностью, в частности, не различает почти изометричные и гомотетичные многообразия. Спектр матрицы X условимся обозначать через $\operatorname{sp}(X)$.

Предложение 4. *Пусть полиномы $Q_M(s) = A + 2sB + s^2C$, $Q_{\widetilde{M}}(s) = \widetilde{A} + 2s\widetilde{B} + s^2\widetilde{C}$ являются характеристическими для почти причинно изометричных* *многообразий M и $\widetilde{M}$. Допустим, что $C > 0$ и $\widetilde{C} > 0$. Тогда собственные числа матриц BC^{-1}, $\widetilde{B}\widetilde{C}^{-1}$ вещественны и*

$$\mathrm{sp}(BC^{-1}) = \alpha(\mathrm{sp}(\widetilde{B}\widetilde{C}^{-1})) \tag{21}$$

для некоторого $\alpha \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.

Замечание 5. Используя описанные выше результаты, нетрудно найти плоские полные строго причинные многообразия малых размерностей. При $n = 4$ есть лишь одно с точностью до гомотетии неэллиптическое многообразие (см. пример 1). Пусть $n = 5$ и $e_1, \dots, e_5$ — стандартный базис в V,

$$\ell(x, x) = 2x_4x_5 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Если $m + r + 2 = 5$ и $k = 0$, то $m = 2$ и $r = 1$. Благодаря условию (8) a' должно иметь простой спектр. Равенства $ae_1 = te_3$, $ae_2 = e_2 + re_3$, где $t, r \neq 0$, $v_0 = e_5$, $v_1 = e_4$, и выбор Γ в линейной оболочке e_1, e_2 задают все многообразия сигнатуры (5, 2, 1, 0); остальные сводятся к меньшим размерностям. Количество вариантов быстро растет при увеличении n.

§ 2. Доказательства

Доказательство леммы 1. Поскольку $ax \notin L$, из $\lambda(x)v = v$ и (4) следует $l_0(v) = 0$. Поэтому $v \in W$. Так как W касается ∂C в точке v_0, то $W \cap (C \cup (-C)) = L$. Из $l_0(v_0) = 0$ и $ax \in T \subset W$ вытекает, что $\lambda(x)v_0 = v_0$. Те же соотношения влекут и второе утверждение из (1). Согласно (4) и (5) из $v_0, x, ax \in W$ следует Γ-инвариантность всех гиперплоскостей W_s. Отбрасывая в (4) и (5) пропорциональные v_0 слагаемые и подставляя $l_0(v) = s$, получаем, что Γ действует в W_s/L по формуле $\gamma_x(v) = v + sax + x \pmod{L}$. Поэтому T действует в W_s/L параллельными переносами, а из (6) следует, что действие T в W_s/L свободно. Поэтому выполняется (3) и, кроме того, действие свободно и собственно разрывно в W_s, что доказывает (2).

Доказательство предложения 1. Пусть p — полином на V. Предположим, что p постоянен на Γ-орбите $v \in V$, т. е. что $p(\gamma_x(v))$ не зависит от $x \in \Gamma$. Согласно (4) и (5) γ_x зависит от x полиномиально; поэтому $p(\gamma_x(v))$ не зависит от x на T. Следовательно, замыкание Γ-орбиты v в топологии Зарисского содержит T-орбиту. Для доказательства обратного включения заметим, что ϕ-проекция T-орбиты из V в V/L есть аффинное пространство $\phi((\mathbf{1} + sa)T + v)$, $s = l_0(v)$. Значит, замыкание T-орбиты содержится в аффинном пространстве $X = L + (\mathbf{1} + sa)T + v$. Очевидно, орбита имеет коразмерность 1 в X. Согласно свойству (3) леммы 1 она имеет вид $\{v + x + sax + f(x)v_0 : x \in T\}$ для некоторой функции f на T. Несложные вычисления с (4) и (5) позволяют найти f и показывают, что T-орбита задается алгебраическим уравнением в X. Таким образом, каждая T-орбита замкнута в топологии Зарисского. Замкнутость образа T при вложении, заданном (4) и (5), очевидна. Поскольку действие T свободно ввиду (6), то же самое верно и для $\widehat{\Gamma}$.

Доказательство теоремы 1. Из (4) следует, что

$$(\lambda(x) - \mathbf{1})V \subset W, \quad (\lambda(x) - \mathbf{1})W \subset L, \quad (\lambda(x) - \mathbf{1})L = 0.$$

Поэтому группа голономии $M(a, \Gamma)$ унипотентна. Для доказательства обратного утверждения заметим, что M допускает конечное накрытие многообразием вида $M(a, \Gamma)$ для некоторых a и Γ согласно [1, теорема 2]. Тогда $M = V/\widetilde{\Gamma}$, где группа $\widetilde{\Gamma} \subset \mathscr{P}(V)$ унипотентна, включает в себя Γ как подгруппу конечного индекса и действует в V свободно и собственно разрывно. Очевидно, $\widehat{\Gamma}$ имеет конечный индекс в алгебраическом замыкании $\widehat{\widetilde{\Gamma}}$ группы $\widetilde{\Gamma}$. Любая унипотентная матрица U содержится в однопараметрической группе $\exp(tX)$, где матрица X нильпотентна и представляется в виде полинома от $U-\mathbf{1}$, а $\exp(tX)$ зависит от t полиномиально. Следовательно, однопараметрическая группа $\exp(\mathbb{R}X)$ содержится в алгебраическом замыкании циклической группы, порожденной U. Это означает, что алгебраическое замыкание унипотентной линейной группы связно и влечет следующее: $\widehat{\widetilde{\Gamma}} = \widehat{\Gamma}$ и $\widetilde{\Gamma} \subset \widehat{\Gamma}$. Согласно предложению 1 $\widetilde{\Gamma}$ является дискретной подгруппой в векторной группе $\widehat{\Gamma}$, а так как Γ — решетка и $\Gamma \subseteq \widetilde{\Gamma}$, то $\widetilde{\Gamma}$ — тоже решетка; поэтому $M = M(a, \widetilde{\Gamma})$.

Доказательство предложения 2. Благодаря теореме 1 можно считать, что $M = M(v_0, v_1, T, a, \Gamma)$. Предположим сначала, что $p = \kappa(o)$. Тогда можно отождествить V и T_pM. Касательное пространство к орбите T в точке p естественно отождествляется с T согласно формуле (5): линейная по x часть $\tau(x)$ равна x. Два определения T согласованы благодаря предложению 1. Так как M не эллиптическое, то $ax \neq 0$ для некоторого $x \in T$. Тогда $\ell(ax, ax) \neq 0$, поскольку ℓ отрицательно определена на T. Ввиду (4) для всех достаточно больших $t > 0$ и для любого $v \in V$ такого, что $l_0(v) \neq 0$, при некотором $r \neq 0$ выполняется равенство $(\lambda(tx)v - v) + (\lambda(-tx)v - v) = rv_0$. Поэтому $v_0 \in H$; непосредственно из (4) получаем $H = aT + \mathbb{R}v_0$. Так как вектор v_0 изотропен и ℓ невырожденная на aT, то $L = H \cap H^{\perp} = \mathbb{R}v_0$ и $\dim L = 1$. Пусть $\tilde{v}_0 = \frac{1}{r}v_0$ для некоторого $r > 0$, $\tilde{v}_1 = rv_1 + w$, где $w \in T^{\perp} \cap W$ выбран так, что $\tilde{v}_1$ изотропен. Используя (4), получаем

$$\lambda(x)\tilde{v}_1 = \lambda(x)(rv_1 + w) = rax + \xi(x, w, r)v_0$$

для некоторой функции ξ. Обозначим $\tilde{a} = ra$; тогда $\ell(ax, x)v_0 = \ell(\tilde{a}x, x)\tilde{v}_0$. Так как ядро ортогональной проекции на любое дополнительное к L подпространство W всегда пересекает W по L и $ax \in U$, получаем формулы (2)–(5) для действия T, где v_0, v_1, a заменены на $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{a}$. Вложение группы Γ в T удовлетворяет соотношению

$$\Gamma = \pi_T\bigl(\exp_p^{-1}(p)\bigr)$$

и полностью определяется им. Равенство $\exp_p(\gamma(v)) = \exp_p(v)$ для любых $v \in V$ и $\gamma \in \Gamma$ очевидно. Более того, из включения $E \subseteq N$ следует, что ℓ невырожденная в E, откуда $V = E \oplus E^{\perp}$. Разложение Γ-инвариантно, так как $E^{\perp} \supseteq T + aT + L$. Поэтому E — прямой фактор в $M = V/\Gamma$. Многообразие $M' = E^{\perp}/\Gamma$ удовлетворяет предложению, так как действие Γ в $E^{\perp}$ подчиняется тем же формулам. Для того чтобы доказать утверждение для любого $p \in M$, достаточно переместить начало в произвольную точку $\tilde{o} \in V$ и найти параметрическую реализацию действия в форме (2)–(5). Параллельный перенос не изменяет линейную часть аффинного действия, поэтому H и L те же, что и выше. Более того, согласно первой части доказательства можно не изменять v_1 и, следовательно, N. Таким образом,

$$\lambda(x) = \tilde{\lambda}(\tilde{x}), \quad \tilde{a}\tilde{x} = \pi_N\tilde{\lambda}(\tilde{x})v_1 = \pi_N\lambda(x)v_1 = ax$$

(тильда отвечает новым параметрам), где $\tilde{x}$ — точка в касательном пространстве $\widetilde{T}$ к $\widehat{\Gamma}$-орбите $\tilde{o}$ в точке $\tilde{o}$, которая удовлетворяет соотношению $\phi(\tilde{x}) = \phi(\tilde{\tau}(\tilde{x}))$,

$$\tilde{\tau}(\tilde{x}) = \gamma_x(\tilde{o}) - \tilde{o} = \tau(x) + (\lambda(x) - \mathbf{1})\tilde{o}, \quad x \in T. \tag{22}$$

Дифференцируя по x при $x=0$, получаем

$$\widetilde{T}=\{x+sax-\ell(ax,\tilde{o})v_0 : x\in T\},\quad s=l_0(\tilde{o});\quad \tilde{x}=x+sax-\ell(ax,\tilde{o})v_0.$$

Последнее соотношение выполняется, так как $\phi(\tilde{x})=\phi(x+sax)$ согласно (22), (4) и (5). Если $s=0$ (что соответствует включению $\tilde{o}\in W$), то $\phi(\tilde{T})=\phi(T)$ и $U=T+H$ не изменяется, поскольку $L\subset H$. Подставляя это в (4), (5), получаем те же формулы с новыми параметрами. Пусть $\tilde{o}=sv_1$, где $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда $l_0(\tilde{o})=s$, $\ell(ax,\tilde{o})=0$ и

$$\tilde{\tau}(\tilde{x})=\tau(x)+(\lambda(x)-\mathbf{1})\tilde{o}=x-\frac{1}{2}\ell(ax,x)v_0+sax-\frac{s}{2}\ell(ax,ax)v_0=\tilde{x}-\frac{1}{2}\ell(\tilde{a}\tilde{x},\tilde{x})v_0.$$

Так как каждое движение в V может быть представлено в виде композиции движения в W и сдвигов вдоль $\mathbb{R}v_1$, действие может быть реализовано в форме (2)–(5) при любом выборе начала.

Доказательство теоремы 2. Утверждение о сигнатуре очевидно. Левая часть (9) представляет собой квадрат длины единственного отрезка прямой линии, реализующего петлю $x\in\pi_1(M,p)$. Поэтому изометрия отождествляет q_v, $\tilde{q}_v$ как функции на $\pi_1(M,p)$, $\pi_1(\widetilde{M},\tilde{p})$. Согласно (10) и (13) отождествляя Γ с $\mathbb{Z}^m$, получаем квадратичные полиномы с матричными коэффициентами. Преобразования коэффициентов, индуцированные изменением параметров, очевидно, подчиняются (17). Если множества значений полиномов Q_M и $Q_{\widetilde{M}}$ (а каждое из них может быть лишь параболой, лучом или точкой) совпадают, то существует возрастающая аффинная замена переменной s, отождествляющая их (это нетрудно доказать, учитывая, что аффинная оболочка кривой не более чем двумерна). Так как любая такая замена может быть реализована перемещением начала вдоль $\mathbb{R}v_1$ и умножением векторов v_0, v_1 на константы (см. доказательство предложения 2 выше и (11), (12)), то причинно изометричным многообразиям отвечают одинаковые кривые в $P_m/\operatorname{GL}(m,\mathbb{Z})$, т. е. выполняется (17). Обратно, пусть выполнено (17). Достаточно доказать существование замены переменных в V из $\mathscr{P}_n$, сохраняющей направление времени и отождествляющей действия фундаментальных групп M и $\widetilde{M}$ в V. При этом можно предполагать, что они подчиняются формулам (2)–(5). Используя преобразования из $\mathscr{P}(V)$, можно добиться выполнения равенств $v_0=\tilde{v}_0$, $v_1=\tilde{v}_1$ (отсюда $N=\tilde{N}$ и $W=\tilde{W}$), а также равенств $T=\widetilde{T}$ и $R=\widetilde{R}$ (так как сигнатуры совпадают). Поэтому достаточно доказать, что a и $\tilde{a}$ сопряжены некоторым ℓ-ортогональным линейным преобразованием N, сохраняющим T и R. Используя (10) и разложение (7), (9) и (13), получаем

$$\langle Az,z\rangle=-\ell(x,x),\tag{23}$$

$$\langle Bz,z\rangle=-\ell(a'x,x),\tag{24}$$

$$\langle Cz,z\rangle=-(\ell(a'x,a'x)+\ell(a''x,a''x)),\tag{25}$$

где $x=\iota z\in T$, $z\in\mathbb{R}^m$; аналогичные равенства выполняются для $Q_{\widetilde{M}}$. Поэтому, например, (23) означает, что $\ell(x,x)=\ell(\tilde{x},\tilde{x})$, где $\tilde{x}=\tilde{\iota}z$. Из (23) следует, что $\iota=\xi\tilde{\iota}$ для некоторого $\xi\in\mathrm{O}(\ell|_T)$. Тогда $\tilde{a}'=\xi^{-1}a'\xi$ согласно (24) (заметим, что квадратичная форма в левой части однозначно определяет a' и $\tilde{a}'$, так как они ℓ-симметричны). Это влечет $\ell(a'x,a'x)=\ell(\tilde{a}'\tilde{x},\tilde{a}'\tilde{x})$ для всех $x\in T$. Тогда $\ell(a''x,a''x)=\ell(\tilde{a}''\tilde{x},\tilde{a}''\tilde{x})$ при (25); следовательно, $\tilde{a}''=\zeta^{-1}a''\xi$ для некоторого $\zeta\in\mathrm{O}(\ell|_R)$. Таким образом, преобразование, совпадающее с ξ на T, с ζ на R и тождественное на $U^{\perp}$, отождествляет параметры для двух действий (включая вложение Γ).

Доказательство предложения 3. Поскольку a — ℓ-симметрическое отображение, то $\ker a \perp aT$, а так как форма ℓ отрицательно определена на N, то $\ker a \cap aT = 0$. Существует $X \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ такое, что $\iota X \iota^{-1}$ отождествляет разложение $T = \ker a \oplus \widetilde{T}$, где $\widetilde{T} = T \cap (\ker a)^{\perp}$, с естественным разложением $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{m-k}$. Согласно (10) $q_s(x)$ не зависит от s, если $x \in \ker a$. Обозначим $\widetilde{V} = (\ker a)^{\perp}$ и $\widetilde{\Gamma} = \mathbb{Z}^{m-k}$. Так как $\widetilde{V}$ содержит $\widetilde{T}$, $aT = a\widetilde{T}$ и L, то оно $\widetilde{\Gamma}$-инвариантно при действии, заданном (2)–(5). Пусть $\widetilde{M} = \widetilde{V}/\widetilde{\Gamma}$. Очевидно, M почти причинно изометрично произведению $\widetilde{M}$ и тора $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ (отметим, что $\gamma_x(v) = v + x$ для $x \in \ker a$). Сравнивая коэффициенты при s^2 в (10) и (13), получаем $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} a$, что доказывает (18). Оставшиеся утверждения очевидны.

В последующем тексте предполагается, что дробные степени неотрицательных матриц неотрицательны.

Лемма 2. *Пусть* $C > 0$ *в* Q *из* (14). *Преобразование* (15) *не изменяет* $\mathrm{sp}(C^{-\frac{1}{2}}BC^{-\frac{1}{2}})$ *и* $\mathrm{sp}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})$.

Доказательство. Если два квадратичных полинома вида $A + 2sB + s^2\mathbf{1}$ связаны преобразованием X, как в (15), то X ортогонально. Следовательно, спектр коэффициента при s не зависит от выбора полинома с коэффициентом $\mathbf{1}$ при s^2 в $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$-орбите $A + 2sB + s^2C$ под действием преобразований (15). Такие же рассуждения доказывают совпадение спектров коэффициентов при s у всех полиномов вида $\mathbf{1} + 2sB + s^2C$ в этой орбите. Поэтому равенства

$$C^{-\frac{1}{2}}(A + 2sB + s^2C)C^{-\frac{1}{2}} = C^{-\frac{1}{2}}AC^{-\frac{1}{2}} + 2sC^{-\frac{1}{2}}BC^{-\frac{1}{2}} + s^2\mathbf{1}, \tag{26}$$
$$A^{-\frac{1}{2}}(A + 2sB + s^2C)A^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{1} + 2sA^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} + s^2A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}}$$

доказывают лемму.

Доказательство предложения 4. Спектры матриц $C^{-\frac{1}{2}}BC^{-\frac{1}{2}}$ и BC^{-1} совпадают, так как эти матрицы сопряжены; они вещественны, поскольку первая из них симметрична. Заменяя s на $t(s - s_0)$ в $A + 2sB + s^2C$, получаем коэффициенты t^2C и $2(tB - t^2s_0C)$ при s^2 и s соответственно; при этом BC^{-1} отвечает $\frac{1}{t}BC^{-1} - s_0\mathbf{1}$. Осталось лишь применить следствие теоремы 2 и лемму 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть $Q(s) = Q_M(s)$ для некоторого M. Обозначим $\widetilde{B} = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$, $\widetilde{C} = A^{-\frac{1}{2}}CA^{-\frac{1}{2}}$. Тогда

$$Q(s) = A^{\frac{1}{2}}(\mathbf{1} + 2s\widetilde{B} + s^2\widetilde{C})A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}((\mathbf{1} + s\widetilde{B})^2 + s^2(\widetilde{C} - \widetilde{B}^2))A^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

С другой стороны, $q_s(x) = -\ell((\mathbf{1} + sa')x, (\mathbf{1} + sa')x) - s^2\ell(a''x, a''x)$. Сравнивая с (27), получаем $-\ell(a''x, a''x) = \langle(\widetilde{C} - \widetilde{B}^2)z, z\rangle$, где $x = \iota A^{\frac{1}{2}}z$, $z \in \mathbb{R}^m$. Следовательно,

$$C - BA^{-1}B = A^{\frac{1}{2}}(\widetilde{C} - \widetilde{B}^2)A^{\frac{1}{2}} \geq 0, \tag{28}$$
$$r = \operatorname{rank} a'' = \operatorname{rank}(\widetilde{C} - \widetilde{B}^2) = \operatorname{rank}(C - BA^{-1}B).$$

Условие (6) равносильно тому, что $\operatorname{rank}(\mathbf{1} + sa) = m$ для любого $s \in \mathbb{R}$; другими словами, оно выполняется тогда и только тогда, когда форма в левой части (10) положительно определена, а это эквивалентно (14).

Обратно, пусть $Q(s)$ удовлетворяет (14) и (19). Многообразие M может быть получено применением (не дословно) процедуры (A)–(C), описанной после предложения 2.

(A) Положим $V = \mathbb{R}^n$, где $n \geq m + r + 2$ и r определено соотношением (20). Пусть $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$,

$$\ell(z, z) = 2z_n z_{n-1} - z_1^2 - \dots - z_{n-2}^2,$$

$v_0 = e_{n-1}$, $v_1 = e_n$, и пусть L, W, N такие же, как в (2). Определенные выше специальные подпространства зададим разложением

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^{n-m-r-2} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = T \oplus R \oplus E \oplus \mathbb{R}v_1 \oplus L.$$

(B) Положим $a' = \widetilde{B}$ и $a'' = J(\widetilde{C} - \widetilde{B}^2)^{\frac{1}{2}}$, где J — некоторая линейная изометрия образа $\widetilde{C} - \widetilde{B}^2$ на R.

(C) Определим $\iota : \mathbb{R}^m \to T$ как $\iota = A^{-\frac{1}{2}}$.

Условие $m = r$ равносильно тому, что $C - BA^{-1}B > 0$. Если $A > 0$, то $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ определяются корректно и (28) вместе с (27) влекут (14).

Из (27) нетрудно вывести, что равенство $C - BA^{-1}B = 0$ равносильно представимости $Q(s)$ в виде $X(\mathbf{1} + sY)^2X$, где X и Y — симметрические матрицы. Если $Y \neq 0$, то в этом случае $Q(s)$ при некотором $s \in \mathbb{R}$ вырожденная. Поэтому из (14), (19) и (20) следует, что $r > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gichev V. M., Morozov O. S.* On flat complete causal Lorentzian manifolds // Geom. Dedicata. 2005. V. 116. P. 37–59.
2. *Abels H.* Properly discontinuous groups of affine transformations: A survey // Geom. Dedicata. 2001. V. 87. P. 309–333.
3. *Charette V., Drumm T., Goldman W., Morill M.* Complete flat affine and Lorentzian manifolds // Geom. Dedicata. 2003. V. 97. P. 187–198.
4. *Ellis G., Hawking S.* The large scale structure of space-time. London; New York: Cambridge Univ. Press, 1973. (Cambridge Monogr. Math. Phys.; N 1).
5. *Beem J. K., Ehrlich P. E.* Global Lorentzian geometry. New York: Marcel Dekker, 1996. (Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.; V. 202).
6. *Guts A. K.* Semigroups in foundations of geometry and axiomatic theory of space-time // Semigroups in algebra, geometry and analysis. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1995. P. 56–76.
7. *Fried D.* Flat spacetimes // J. Differential Geometry. 1987. V. 26. P. 385–396.
8. *Barbot T.* Globally hyperbolic flat space-times // J. Geometry Phys. 2005. V. 53. P. 123–165.

Гичев Виктор Матвеевич, Мещеряков Евгений Александрович
Омский филиал ИМ СО РАН, 644099, Омск, ул. Певцова, 13
gichev@iitam.omsk.net.ru, mechtch@mail.ru