Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 514.763.22+517.518.17+514.752.8

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ КАРНО — КАРАТЕОДОРИ В ТОПОЛОГИИ СОБОЛЕВА И BV–ТОПОЛОГИИ

С. К. Водопьянов, Д. В. Исангулова

Аннотация: Доказана дифференцируемость отображений классов Соболева и BV-отображений пространств Карно — Каратеодори в топологии этих классов. В качестве следствия получены обобщения теорем Кальдерона — Зигмунда для отображений пространств Карно — Каратеодори и другие результаты.

Ключевые слова: пространство Карно — Каратеодори, отображение класса Соболева, отображение ограниченной вариации, дифференцируемость.

§ 1. Введение

В работе исследуется дифференцируемость отображений пространств Карно — Каратеодори в различных топологиях.

Понятие дифференцируемости в топологии Соболева и в BV-топологии в евклидовом случае ввел Ю. Г. Решетняк. Он показал, что функции класса Соболева дифференцируемы в топологии Соболева, а функции ограниченной вариации — в BV-топологии. Для функции $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, класса Соболева $W^l_p(\Omega)$, $p\in(1,\infty)$, выполняется следующее [1]: *для почти всех точек $x\in\Omega$ определен полином $P_x(X)=\sum\limits_{|\alpha|\le l}\frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}X^\alpha$ такой, что*

$$\|f(x+tX)-P_x(tX)\|_{W^l_p(B_1(0))}=o(t^l)\quad \textit{при } t\to 0$$

для почти всех $x\in\Omega$.

В качестве следствия отсюда нетрудно получить известные результаты Зигмунда и Кальдерона [2, 3]: всякая функция класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}$ пространства $\mathbb{R}^n$ дифференцируема в обычном смысле при $n<p<\infty$ и в топологии пространства Лебега L_{p^*}, где $p^*=\frac{np}{n-p}$, если $1\le p<n$; функция ограниченной вариации дифференцируема в топологии пространства Лебега L_{p^*}, где $p^*=\frac{n}{n-1}$. Свойство дифференцируемости отображения $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, класса Соболева вытекает из свойств дифференцируемости координатных функций.

С. К. Водопьянов разработал новый метод доказательства приведенных выше результатов Ю. Г. Решетняка при исследовании дифференцируемости отображений в топологии Соболева на группах Карно [4–6]: задача о дифференцируемости отображений с областью значений, отличной от евклидова пространства, становится принципиально новой. Метод работ [4–6] основывается на том, что

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00482) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–8526.2006.1).

1) отображения классов Соболева аппроксимируются липшицевыми отображениями, область определения которых исчерпывает область определения исходного отображения с точностью до множества нулевой меры;

2) липшицевы отображения дифференцируемы почти всюду.

Заметим, что доказательство первого утверждения основывается на неравенстве Пуанкаре (см., например, [7]).

Второе утверждение в евклидовых пространствах — это известная теорема Радемахера. Ее обобщение для липшицевых отображений групп Карно, заданных на открытом множестве, доказано Пансю [8]. С. К. Водопьянов и А. Д. Ухлов [4, 9] распространили этот результат для липшицевых отображений групп Карно, заданных на измеримом множестве. Такое же распространение другим способом позже сделал Маньяни [10].

Цель данной работы — получить дифференцируемость отображений пространств Карно — Каратеодори (CC-пространств) в различных топологиях. Следуя методу работ [4–6], для доказательства дифференцируемости отображений классов Соболева необходимо иметь

1) неравенство Пуанкаре;

2) дифференцируемость липшицевых отображений, определенных на измеримых множествах.

Неравенство Пуанкаре на CC-пространствах доказано в работах [11–13]. Теорема типа Радемахера о дифференцируемости липшицевых отображений CC-пространств сформулирована в работе С. К. Водопьянова и А. В. Грешнова [14] в предположении $X_i \in C^\infty$ и доказана С. К. Водопьяновым [15] при более слабом условии: $X_i \in C^{1,1}$ (см. обозначения ниже). Ее доказательство базируется на методе работы [4].

Перейдем к определениям и формулировкам основных результатов работы. CC-пространство $\mathbf{M}$ характеризуется как связное риманово многообразие топологической размерности N класса C^∞, в касательном расслоении $T\mathbf{M}$ которого фиксировано касательное подрасслоение $H\mathbf{M}$, обладающее следующим свойством. Существует конечный набор натуральных чисел

$$n = \dim H\mathbf{M} = \dim H_1 < \dots < \dim H_i < \dots < \dim H_m = N, \quad 1 < i < m,$$

и каждая точка $x \in \mathbf{M}$ имеет окрестность $U \subset \mathbf{M}$, на которой найдется набор векторных полей $X_1, \dots, X_N$ класса $C^{1,1}$ (производные векторных полей локально липшицевы), удовлетворяющих условию Хёрмандера (см., например, [16]) в следующей форме (ср. с [17]):

1) $X_1(y), \dots, X_N(y)$ образуют базис в $T_y\mathbf{M}$ для любого $y \in U$;

2) $H_i(y) = \operatorname{span}\{X_1(y), \dots, X_{\dim H_i}(y)\}$ образует подпространство в $T_y\mathbf{M}$, размерность которого не зависит от точки y и равна $\dim H_i$ (здесь $H_1(y) = H_y\mathbf{M}$);

3) $[X_i, X_j](y) = \sum\limits_k c_{ijk}(y)X_k(y)$, где $c_{ijk} = 0$ для $\deg X_k > \deg X_i + \deg X_j$, а степень поля $\deg X_k$ — это число $\deg X_k = \min\{s \mid X_k \in H_s\}$;

4) для любого $k = 2, \dots, m-1$ отображение

$$[\cdot,\cdot] : H_1 \times H_k/H_{k-1} \to H_{k+1}/H_k,$$

индуцированное скобкой Ли, является эпиморфизмом для всех точек $y \in U$.

Расстояние $d_{\mathbf{M}}$ (внутренняя метрика Карно — Каратеодори) между точками $x, y \in \mathbf{M}$ определяется как точная нижняя грань длин *горизонтальных* кривых, соединяющих точки x, y, и является неримановым, если $H\mathbf{M}$ — собственное подрасслоение (кусочно-гладкая кривая γ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbf{M}$).

Пусть $x \in \mathbf{M}$, а $B_e(0,r) = \left\{X = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i X_i(x) : \|X\|_x < r\right\}$ — открытый евклидов шар с центром в точке $0 \in T_x\mathbf{M}$ радиуса r (евклидова норма $\|\cdot\|_x$ в $T_x\mathbf{M}$ определяется римановым тензором в точке x). Известно (см., например, [18]), что экспоненциальное отображение

$$\theta_x(y_1,\dots,y_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} y_i X_i\right)(x) = \exp_x\left(\sum_{i=1}^{N} y_i X_i\right),\ \theta_x(0) = \theta_x(0,\dots,0) = x,$$

является $C^{1,1}$-гладким диффеоморфизмом некоторого шара $B_e(0,r_x) \subset T_x\mathbf{M}$ на некоторую окрестность $U^x \subset \mathbf{M}$ точки x, непрерывно зависящим от точки x. Здесь r_x — положительное число, его можно считать не зависящим от x из некоторой компактной части $\mathbf{M}$. Отметим, что $(\theta_x^{-1})_* X_i(x) = X_i(x)$.

Введем однопараметрическую группу растяжений $\delta_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ со следующим свойством: $\delta_\varepsilon : (y_1,\dots,y_N) \mapsto (\varepsilon^{\deg X_1} y_1, \dots, \varepsilon^{\deg X_N} y_N)$, $\varepsilon > 0$. Определим семейство *растяжений* $\Delta_\varepsilon^x : U^x \to U^x$ по правилу $\Delta_\varepsilon^x = \theta_x \circ \delta_\varepsilon \circ \theta_x^{-1}$. Заметим, что в силу Ball-Box теоремы [19] имеем

$$\frac{\varepsilon}{C_0}\, d_{\mathbf{M}}(y,x) \le d_{\mathbf{M}}(\Delta_\varepsilon^x(y), x) \le C_0\, \varepsilon\, d_{\mathbf{M}}(y,x), \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{1.1}$$

где $x \in K$, K — компакт, $y \in U^x$ и C_0 — постоянная, зависящая от выбора компакта K.

Рассмотрим на множестве $\Delta_\varepsilon^x(U^x)$ набор векторных полей $\{\varepsilon^{\deg X_i} X_i\}$, $i = 1,\dots,N$. Векторные поля $X_i^\varepsilon = \big((\Delta_\varepsilon^x)^{-1}\big)_*(\varepsilon^{\deg X_i} X_i)$ сходятся равномерно к векторным полям $\widehat{X}_i^x$ при $\varepsilon \to 0$, $i = 1,\dots,N$, образующим базис некоторой нильпотентной стратифицированной градуированной алгебры Ли V [17, 19].

Векторные поля $\big(\theta_x^{-1}\big)_* \widehat{X}_i^x$, $i = 1,\dots,N$, продолжаются на $T_x\mathbf{M}$, и их продолжения образуют на $T_x\mathbf{M}$ нильпотентную градуированную алгебру Ли V' [17]. Алгебре Ли V' соответствует связная односвязная группа Ли (группа Карно) $\mathbb{G}_x\mathbf{M}$ с каноническим римановым тензором, определяемым евклидовой структурой $\|\cdot\|_x$ в $T_x\mathbf{M}$.

Определение 1.1. Группа $\mathbb{G}_x\mathbf{M}$ называется *нильпотентным касательным конусом* пространства Карно — Каратеодори $\mathbf{M}$ в точке x.

Алгебре Ли V соответствует *локальная группа Карно* $\big(\mathscr{G}^x, d_c^x\big)$. Ее элементами являются точки из U^x, для которых имеет смысл групповая операция, а именно

$$\begin{aligned} w \cdot y = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} y_i \widehat{X}_i^x\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^{N} w_i \widehat{X}_i^x\right)(x) \\ = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} y_i \widehat{X}_i^x\right)(w) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} z_i \widehat{X}_i^x\right)(x). \end{aligned}$$

Известно, что z_i однозначно определяются по формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа. Свойства векторных полей $\widehat{X}_i^x$ обеспечивают, что $\mathscr{G}^x$ — CC-пространство с расстоянием Карно — Каратеодори d_c^x, где риманова метрика на $\mathscr{G}^x$ — это каноническая риманова метрика на группе Ли, определяемая исходным римановым тензором в точке x; $X_i(x) = \widehat{X}_i^x(x)$ и $\deg X_i = \deg \widehat{X}_i^x$, $i = 1,\dots,N$.

Определение 1.2. *Горизонтальным гомоморфизмом* групп Карно называется гомоморфизм $L : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ групп Карно такой, что $L(\exp H\mathbb{G}_1) \subset \exp H\mathbb{G}_2$. Горизонтальный гомоморфизм $L : \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ локальных групп Карно отличается от приведенного тем, что включение $L(\mathscr{G}_1 \cap \exp H\mathscr{G}_1) \subset \mathscr{G}_2 \cap \exp H\mathscr{G}_2$ выполняется лишь для таких $v \in \mathscr{G}_1 \cap \exp H\mathscr{G}_1$, что $L(v) \in \mathscr{G}_2$.

Пусть $(\mathbf{M}, d_{\mathbf{M}}), (\mathbf{N}, d_{\mathbf{N}})$ — два пространства Карно — Каратеодори и $E \subset \mathbf{M}$ — подмножество CC-пространства $\mathbf{M}$.

Определение 1.3 [14, 15]. Отображение $f : E \to \mathbf{N}$ называется *hc-дифференцируемым* в точке $x \in E$, если существует горизонтальный гомоморфизм $L : \left(\mathscr{G}^x, d_c^x\right) \to \left(\mathscr{G}^{f(x)}, d_c^{f(x)}\right)$ локальных групп Карно такой, что

$$d_{\mathbf{N}}(f(w), L(w)) = o(d_{\mathbf{M}}(x, w)) \quad \text{при } E \cap \mathscr{G}^x \ni w \to x.$$

Горизонтальный гомоморфизм $L : \left(\mathscr{G}^x, d_c^x\right) \to \left(\mathscr{G}^{f(x)}, d_c^{f(x)}\right)$ называется *hc-дифференциалом* отображения $f : E \to \mathbf{N}$ в точке $x \in E$ на множестве E.

Можно проверить, что если x — точка плотности 1 множества E, то hc-дифференциал единствен (см. [15]).

В случае римановых пространств ($H\mathbf{M} = T\mathbf{M}$, $H\mathbf{N} = T\mathbf{N}$) приведенное определение дифференцируемости совпадает с классическим. В случае групп Карно hc-дифференцируемость эквивалентна $\mathscr{P}$-дифференцируемости в смысле Пансю [4, 8, 9].

Напомним, что отображение $f : E \to \mathbf{N}$ называется *липшицевым*, если

$$d_{\mathbf{N}}(f(x), f(y)) \leq C d_{\mathbf{M}}(x, y) \quad \text{для всех } x, y \in E$$

с некоторой постоянной C, не зависящей от выбора точек x и y. Известен следующий аналог теоремы Радемахера.

Теорема 1.1 [15]. *Пусть $E \subset \mathbf{M}$ и $f : E \to \mathbf{N}$ — липшицево отображение. Тогда f hc-дифференцируемо почти всюду на E. Соответствующий hc-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли определяется преобразованием базисных векторов $X_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, горизонтального подпространства $H_x\mathbf{M}$ в горизонтальные векторы $\{(X_i f)(x) \in H_{f(x)}\mathbf{N}\}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Пусть Ψ — класс отображений $f : E \to \mathbf{N}$ со следующим свойством: для любого $f \in \Psi$ существуют множества $E_i \subset E$ такие, что $|E \setminus \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} E_i| = 0$ и ограничение f на E_i липшицево, $i \in \mathbb{N}$. Тогда в силу теоремы 1.1 ограничение $f|_{E_i}$ hc-дифференцируемо почти всюду. Следовательно, для почти всех точек $x \in E$ определен горизонтальный гомоморфизм $Df(x) : \left(\mathscr{G}^x, d_c^x\right) \to \left(\mathscr{G}^{f(x)}, d_c^{f(x)}\right)$ локальных групп Карно, который в силу формулируемого ниже предложения 1.1 мы будем называть *аппроксимативным hc-дифференциалом отображения f*.

Определение 1.4. Пусть $E \subset \mathbf{M}$ — измеримое множество. Отображение $f : E \to \mathbf{N}$ называется *аппроксимативно hc-дифференцируемым* в точке $x \in E$, если существует горизонтальный гомоморфизм $L : \left(\mathscr{G}^x, d_c^x\right) \to \left(\mathscr{G}^{f(x)}, d_c^{f(x)}\right)$ локальных групп Карно такой, что для любого ε выполнено

$$\lim_{t \to 0} \frac{|\{w \in B_t(x) \cap E : d_{\mathbf{N}}(f(w), L(w)) > \varepsilon d_{\mathbf{M}}(x, w)\}|}{|B_t(x)|} = 0.$$

Здесь $B_t(x)$ — шар с центром в точке x радиуса t в метрике Карно — Каратеодори $d_{\mathbf{M}}$, $|B_t(x)|$ — риманов объем множества $B_t(x)$.

Напомним, что $\operatorname{ap}\lim\limits_{t\to 0} f(t) = a$, $f : (0,t_0) \to \mathbf{N}$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{|\{t\in(0,\tau) : d_{\mathbf{N}}(f(t),a)>\varepsilon\}|}{\tau} = 0.$$

Из теоремы 1.1 получаем следующее

Предложение 1.1. *Пусть $f : E \subset M \to \mathbf{N}$ — отображение класса Ψ. Тогда f аппроксимативно hc-дифференцируемо почти всюду. В частности, для почти всех $x \in E$ определено отображение*

$$X_i(x) \mapsto D_{X_i} f(x) = \operatorname{ap}\lim_{t\to 0} \Delta^{f(x)}_{t^{-1}}(f(\exp_x tX_i)) \in \mathscr{G}^{f(x)},$$

которое задает линейное отображение $D_h f(x) : H_x\mathbf{M} \to H_{f(x)}\mathbf{N}$:

$$X_i(x) \mapsto \exp^{-1}_{f(x)} D_{X_i} f(x) \in H_{f(x)}\mathbf{N}, \quad i = 1,\dots,n,$$

порождающее гомоморфизм алгебр Ли локальных групп Карно и соответствующий ему горизонтальный гомоморфизм $Df(x)$ локальных групп Карно.

Линейное отображение $D_h f(x)$ горизонтальных подпространств алгебр Ли локальных групп Карно называется *аппроксимативным горизонтальным дифференциалом*, а горизонтальный гомоморфизм $Df(x)$ локальных групп Карно — *аппроксимативным hc-дифференциалом.*

Так как указанное выше свойство отображения класса Ψ выполняется для отображений класса Соболева (см. лемму 3.1) и для отображений ограниченной вариации (см. лемму 4.1), то отображения этих классов почти всюду аппроксимативно hc-дифференцируемы.

Предположим, что $\psi : E \to \mathbf{N}$ — гладкое отображение. Тогда соответствие $X_i(x) \mapsto X_i\psi(x) = \frac{d}{dt}\psi(\exp_x tX_i)|_{t=0}$ порождает линейное отображение из $H_x\mathbf{M}$ в $T_{\psi(x)}\mathbf{N}$, которое мы также будем обозначать символом $D_h\psi(x)$. Для линейного отображения $A : H_x\mathbf{M} \to T_w\mathbf{N}$ положим $|A| = \sup\limits_{\xi\in H_x\mathbf{M}, \|\xi\|_x=1} \|A\xi\|_w$. Если $\mathbf{N} = \mathbb{R}$, то линейное отображение $A : H_x\mathbf{M} \to \mathbb{R}$ можно отождествить с вектором из $H_x\mathbf{M}$ и, следовательно, $|A| = \|A\|_x$.

Всюду далее мы будем обозначать через dx риманов объем $d\mathscr{H}^N$ многообразия $\mathbf{M}$.

Пусть $\mathbb{X}$ — одно из пространств W^1_q, BV, L_q, C (см. определения в § 3 и § 4), $\Omega \subset \mathbf{M}$ — открытое множество.

Определение 1.5. Отображение $f : \Omega \to \mathbf{N}$ называется *hc-дифференцируемым в топологии пространства* $\mathbb{X}$ в точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $L : \left(\mathscr{G}^x, d^x_c\right) \to \left(\mathscr{G}^{f(x)}, d^{f(x)}_c\right)$ локальных групп Карно такой, что

$$\|(f,L)\|_{\mathbb{X}_{x,r}} = o(r) \quad \text{при } r \to 0.$$

Здесь $\|(f,L)\|_{\mathbb{X}_{x,r}}$ — расстояние между отображением $f \in \mathbb{X}$ и гладким отображением $L : \left(\mathscr{G}^x, d^x_c\right) \to \left(\mathscr{G}^{f(x)}, d^{f(x)}_c\right)$, которое в зависимости от $\mathbb{X}$ определяется следующим образом:

1) $\mathbb{X} = W^1_q(\Omega,\mathbf{N})$, расстояние $\|(f,L)\|_{\mathbb{X}_{x,r}}$ равно

$$\Bigg(\ \fint\limits_{B_r(x)} d_{\mathbf{N}}(f(y),L(y))^q\,dy\Bigg)^{1/q} + r\Bigg(\ \fint\limits_{B_r(x)} |D_h f(y) - D_h L(y)|^q\,dy\Bigg)^{1/q},$$

где $\displaystyle\fint_{B_r(x)}$ — среднее значение по шару. Если $\mathbf{N}=\mathbb{R}$, то

$$\|(f,L)\|_{\mathbb{X}_{x,r}}=\|f-L\|_{W^1_q(B_r(x),\mathbb{R})}=\frac{\|f-L\|_{L_q(B_r(x))}+r\|f-L\|_{L^1_q(B_r(x))}}{|B_r(x)|^{1/q}};$$

2) $\mathbb{X}=BV(\Omega,\mathbf{N})$,

$$\|(f,L)\|_{\mathbb{X}_{x,r}}=\fint_{B_r(x)}d_{\mathbf{N}}(f(y),L(y))\,dy+r\fint_{B_r(x)}|D_hf(y)-D_hL(y)|\,dy;$$

3) $\mathbb{X}=L_q(\Omega,\mathbf{N})$,

$$\|(f,L)\|_{\mathbb{X}_{x,r}}=\biggl(\,\fint_{B_r(x)}d_{\mathbf{N}}(f(y),L(y))^q dy\biggr)^{1/q};$$

4) $\mathbb{X}=C(\Omega,\mathbf{N})$ — пространство непрерывных отображений,

$$\|(f,L)\|_{\mathbb{X}_{x,r}}=\sup_{y\in B_r(x)}d_{\mathbf{N}}(f(y),L(y)).$$

Заметим, что определение hc-дифференцируемости в топологии C (равномерной топологии) эквивалентно приведенному выше определению 1.3 hc-дифференцируемости для отображения f, определенного на открытом множестве. Если $\mathbf{N}=\mathbb{R}$, то вместо $\|(f,L)\|_{\mathbb{X}_{x,r}}$ будем писать $\|f-L\|_{\mathbb{X}_{x,r}}$.

Замечание 1.1. Всюду далее мы будем полагать, что векторные поля, образующие локальный базис CC-пространств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, принадлежат классу C^∞. Условие гладкости векторных полей мы используем только при применении неравенства Пуанкаре и при построении псевдометрики ρ (определение 2.1).

Главным результатом работы является

Теорема 1.2. *Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — CC-пространства, Ω — область в $\mathbf{M}$, $f:\Omega\to\mathbf{N}$ — отображение класса $\mathbb{X}$, где $\mathbb{X}=W^1_q(\Omega,\mathbf{N})$, $1\le q<\infty$, или $\mathbb{X}=BV(\Omega,\mathbf{N})$. Тогда для почти всех $x\in\Omega$ для каждого $z\in\mathscr{G}^{f(x)}\setminus\{f(x)\}\subset\mathbf{N}$ существует число $\alpha>0$ такое, что*

$$\|\rho(z(r),f(\cdot))-\rho(z(r),L(\cdot))\|_{\mathbb{X}_{x,r}}=o(r)\quad\text{при } r\to0.$$

Здесь $z(r)=\Delta^{f(x)}_{\alpha r}z$, $L=Df(x)$ — аппроксимативный hc-дифференциал f в точке x, ρ — псевдометрика на $\mathbf{N}$ из определения 2.1.

В качестве основного следствия мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — CC-пространства, Ω — область в $\mathbf{M}$, $f:\Omega\to\mathbf{N}$ — отображение класса $\mathbb{X}$, где $\mathbb{X}=W^1_q(\Omega,\mathbf{N})$, $1\le q<\infty$, или $\mathbb{X}=BV(\Omega,\mathbf{N})$. Тогда*

1) *f hc-дифференцируемо почти всюду в Ω в топологии $\mathbb{X}$;*

2) *соответствующий hc-дифференциал f в точке $x\in\Omega$ совпадает с аппроксимативным hc-дифференциалом $Df(x)$.*

Если CC-пространства — евклидовы пространства (группы Карно), то утверждение теоремы 1.3 эквивалентно соответствующему результату Ю. Г. Решетняка [1] (С. К. Водопьянова [4–6]). В работе [6], посвященной дифференцируемости отображений класса Соболева на группах Карно, отмечено, что метод работы [6] применим также к отображениям класса BV. Здесь мы реализуем этот план сразу на пространствах Карно — Каратеодори.

Из теоремы 1.2 с помощью теорем вложения можно вывести hc-дифференцируемость отображений классов Соболева в других топологиях. Напомним [19, 20], что размерность Хаусдорфа CC-пространства $\mathbf{M}$ выражается формулой $Q = \sum\limits_{i=1}^{m} i(\dim H_i - \dim H_{i-1})$, здесь $\dim H_0 = 0$.

Следствие 1.1. *Пусть отображение f принадлежит $W_q^1(\Omega, \mathbf{N})$, $Q < q < \infty$. Тогда f hc-дифференцируемо почти всюду в Ω и его hc-дифференциал в точке $x \in \Omega$ совпадает с аппроксимативным hc-дифференциалом $Df(x)$.*

Следствие 1.2. *Пусть отображение f принадлежит $W_q^1(\Omega, \mathbf{N})$, $1 \leq q < Q$ ($f \in BV(\Omega, \mathbf{N})$). Тогда f hc-дифференцируемо в топологии L_{q^*}, $q^* = \frac{Qq}{Q-q}$ ($q^* = \frac{Q}{Q-1}$), почти всюду в Ω и соответствующий hc-дифференциал f в точке $x \in \Omega$ совпадает с аппроксимативным hc-дифференциалом $Df(x)$.*

В случае евклидовых пространств утверждения следствий 1.1 и 1.2 доказаны Зигмундом и Кальдероном [2, 3]. В случае $\mathbf{N} = \mathbb{R}$ аналог следствия 1.1 доказан в работе [21] при некоторых ограничениях на геометрию векторных полей. Для функций ограниченной вариации групп Карно, следствие 1.2 совпадает с одним результатом Амброзио и Маньяни [22].

§ 2. Вспомогательные результаты

Функции класса Соболева. Пусть $(\mathbf{M}, d_{\mathbf{M}})$ — CC-пространство, Ω — область в CC-пространстве $\mathbf{M}$, g — риманов тензор на $\mathbf{M}$. Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $W_q^1(\Omega)$, если $f \in L_q(\Omega)$ и существуют обобщенные производные функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ вдоль векторных полей X_i, $i = 1, \dots, n$, принадлежащие классу $L_q(\Omega)$. Напомним, что локально-суммируемая функция $h_i : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной функции* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ вдоль векторного поля X_i, если $\int\limits_{\Omega} h_i \psi \, dx = -\int\limits_{\Omega} f X_i^* \psi \, dx$ для любой тестовой функции $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, где X_i^* — оператор, формально сопряженный к X_i. Вектор $\nabla_{\mathscr{L}} f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x) h_j(x) X_i(x) \in H_x\mathbf{M}$ называется *обобщенным субградиентом функции* f. Эквивалентные определения пространства Соболева можно найти в работе [23].

Псевдометрика. Пусть $(\mathbf{N}, d_{\mathbf{N}})$ — CC-пространство, $Y_1, \dots, Y_{\widetilde{N}}$ — базисные векторные поля, $\tilde{n} = \dim H\mathbf{N}$, $\widetilde{N} = \dim T\mathbf{N}$, $\widetilde{Q}$ — размерность Хаусдорфа CC-пространства $\mathbf{N}$.

В работе [16] найдены оценки на объем шаров в метрике Карно — Каратеодори: для любой области K, компактно вложенной в CC-пространство $\mathbf{N}$, существуют $C_1, R_1 > 0$ такие, что для всех $x \in K$, $r < R_1$ имеет место оценка $C_1^{-1} r^{\widetilde{Q}} \leq |B_r(x)| \leq C_1 r^{\widetilde{Q}}$.

При доказательстве теорем 1.2 и 1.3 мы используем гладкую псевдометрику, описываемую ниже. Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathscr{L} = Y_1^* Y_1 + \dots + Y_{\tilde{n}}^* Y_{\tilde{n}}$. Известно [16, 24], что фундаментальное решение $\Gamma(x, y)$ оператора $-\mathscr{L}$ удовлетворяет следующим соотношениям: для любой области K, компактно вложенной в $\mathbf{N}$, существуют постоянные $C_2, R_2 > 0$ такие, что

$$C_2^{-1}\frac{d_{\mathbf{N}}(x,y)^2}{|B_{d_{\mathbf{N}}(x,y)}(x)|} \le \Gamma(x,y) \le C_2\frac{d_{\mathbf{N}}(x,y)^2}{|B_{d_{\mathbf{N}}(x,y)}(x)|},$$

$$|Y_{i_1}\dots Y_{i_s}\Gamma(x,y)| \le C_2\frac{d_{\mathbf{N}}(x,y)^{2-s}}{|B_{d_{\mathbf{N}}(x,y)}(x)|}$$

для $x \in K$, $d_{\mathbf{N}}(x,y) \le 2R_2$, $i_k \le \tilde{n}$, $k = 1,\dots,s$.

Пусть K — область, компактно вложенная в CC-пространство $\mathbf{N}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathscr{G}^x \subset B_{2R_2}(x) \cap B_{R_1}(x)$ для всех $x \in K$.

Определение 2.1. Рассмотрим точки $x \in K$, $y \in \mathbf{N}$. Назовем *псевдометрикой* ρ следующую функцию:

$$\rho(x,y) = \chi(d_{\mathbf{N}}(x,y))\Gamma(x,y)^{1/(2-\widetilde{Q})} + (1-\chi(d_{\mathbf{N}}(x,y)))d_{\mathbf{N}}(x,y), \qquad (2.1)$$

где $\chi \in C^\infty$, $\chi(t) = 1$ при $t < R_2$, $\chi(t) = 0$ при $t > 2R_2$ и $|\chi'| \le 2R_2$.

Легко показать, что существует константа C_3 такая, что

1) $C_3^{-1}d_{\mathbf{N}}(x,y) \le \rho(x,y) \le C_3 d_{\mathbf{N}}(x,y)$ для любых точек $x \in K$, $y \in \mathbf{N}$;

2) при фиксированном $x \in K$ функция $\rho(x,y)$ непрерывно дифференцируема по y на $\mathscr{G}^x \setminus \{x\}$, причем $|Y_i\rho(x,y)| \le \frac{C_3}{d_{\mathbf{N}}(x,y)^{\deg Y_i - 1}}$, $i = 1,\dots,\widetilde{N}$;

3) $|\rho(z,x) - \rho(z,y)| \le C_3 d_{\mathbf{N}}(x,y)$ для всех $z \in K$, $x, y \in \mathbf{N}$.

Для доказательства теоремы 1.2 нам понадобится следующая

Лемма 2.1. *Пусть заданы точки $x \in \mathbf{M}$, $w \in \mathbf{N}$ и горизонтальный гомоморфизм локальных групп Карно $A : (\mathscr{G}^x, d_c^x) \to (\mathscr{G}^w, d_c^w)$. Тогда для каждого $z \in \mathscr{G}^w \setminus \{w\} \subset \mathbf{N}$ существует число $\alpha > 0$ такое, что*

$$X_i\rho(z(r), A(y)) = \widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}}\rho(z(r), A(y))X_iA(x) + o(1)$$

для всех $y \in B_r(x)$ при $r \to 0$, $i = 1,\dots,n$, где $z(r) = \Delta^w_{\alpha r}(z)$.

Доказательство. Надо оценить первые n компонент вектора

$$\nabla\rho(z(r), A(y)) = \widetilde{\nabla}\rho(z(r), A(y))DA(y), \quad y \in B_r(x).$$

(Здесь $\widetilde{\nabla}$ — полный градиент на $\mathbf{N}$.) Так как A — гомоморфизм, то $d_c^w(A(y), w) \le c_1 r$ для всех $y \in B_r(x) \subset \mathscr{G}^x$. В силу результатов о сравнении различных метрик [15] имеем $d_{\mathbf{N}}(A(y), w) \le c_2 d_c^w(A(y), w) + o(r)$. Следовательно, существует константа C' такая, что $A(B_r(x)) \subset B_{C'r}(w)$. По свойству 2 псевдометрики ρ при достаточно малых r имеем

$$|Y_k\rho(z(r), A(y))| \le C_3\, d_{\mathbf{N}}(z(r), A(y))^{1-\deg Y_k} \le Cr^{1-\deg Y_k}$$

при условии, что $z(r)$ находится вне множества $\{Ay : y \in B_r(x)\}$. В силу (1.1) достаточно взять α таким, что $d_{\mathbf{N}}(z(r), w) \ge \frac{\alpha r}{C_0} d_{\mathbf{N}}(z, w) = r(C' + 1)$.

Рассмотрим $X_iA(y)$, $y \in B_r(x)$, $i = 1,\dots,n$. Так как A — горизонтальный гомоморфизм локальных групп Карно, то

$$\widehat{X}_l^x A(y) = \sum_{s\colon \deg Y_s = \deg X_l} a_{ls}\widehat{Y}_s^w(A(y)), \quad l = 1,\dots,N,$$

где коэффициенты a_{ls} не зависят от выбора точки y и в силу $X_l(x) = \widehat{X}_l^x(x)$, $l = 1,\dots,N$, $Y_s(w) = \widehat{Y}_s^w(w)$, $s = 1,\dots,\widetilde{N}$, выполняется

$$X_lA(x) = \sum_{s: \deg Y_s = \deg X_l} a_{ls}Y_s(w), \quad l = 1,\dots,N.$$

Выразим векторное поле X_l через векторные поля $\widehat{X}_j^x$ и $\widehat{Y}_l^w$ — через Y_j:

$$X_l(y) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j^l(y)\widehat{X}_j^x(y), \quad \widehat{Y}_l^w(v) = \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} \xi_j^l(v) Y_j(v).$$

Тогда

$$X_i A(y) = \sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \gamma_k^i(y) Y_k(A(y)),$$

где

$$\gamma_k^i(y) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j^i(y) \sum_{s:\deg Y_s = \deg X_j} a_{js}\xi_k^s(A(y)).$$

Достаточно показать, что $\gamma_k^i = \begin{cases} a_{ik} + O(r), & k \le \tilde{n}, \\ o(r^{\deg Y_k - 1}), & k > \tilde{n}. \end{cases}$ В силу [17] имеем

$$\eta_j^i(y) = \begin{cases} \delta_{ij} + O(r), & j = 1, \dots, n, \\ o(r^{\deg X_j - 1}), & j = n+1, \dots, N, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad y \in B_r(x).$$

Возможны два случая.

1. Y_k — горизонтальное векторное поле ($k \le \tilde{n}$). В этом случае [17]

$$\xi_k^s(v) = \begin{cases} \delta_{sk} + O(r), & s \le \tilde{n}, \\ o(r^{\deg Y_s - 1}), & s > \tilde{n}, \end{cases} \quad v \in B_{C'r}(w),$$

и

$$\gamma_k^i = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} + O(r)) \sum_{s:\, \deg Y_s = \deg X_j} a_{js}(\delta_{sk} + O(r)) \\ + \sum_{j=n+1}^{N} o(r^{\deg X_j - 1}) \sum_{s:\, \deg Y_s = \deg X_j} a_{js} o(r^{\deg Y_s - 1}) = a_{ik} + O(r).$$

2. Y_k — не горизонтальное векторное поле ($k > \tilde{n}$). Тогда [17]

$$\xi_k^s(v) = \begin{cases} \delta_{sk} + o(r^{\deg Y_k - \deg Y_s}), & \deg Y_s \le \deg Y_k, \\ O(r), & \deg Y_s > \deg Y_k, \end{cases} \quad v \in B_{C'r}(w),$$

и поэтому

$$\gamma_k^i = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} + O(r)) \sum_{s=1}^{\tilde{n}} a_{js} o(r^{\deg Y_k - 1}) \\ + \sum_{j:1 < \deg X_j \le \deg Y_k} o(r^{\deg X_j - 1}) \sum_{s:\, \deg Y_s = \deg X_j} a_{js}(\delta_{sk} + o(r^{\deg Y_k - \deg X_j})) \\ + \sum_{j:\deg X_j > \deg Y_k} o(r^{\deg X_j - 1}) \sum_{s:\deg Y_s = \deg X_j} a_{js} O(r) = o(r^{\deg Y_k - 1}),$$

что и требовалось доказать. $\square$

§ 3. Отображения класса Соболева

Для функций класса Соболева имеет место

Теорема 3.1 (неравенство Пуанкаре, см. [11, 12]). *Пусть Ω — ограниченная область в CC-пространстве $\mathbf{M}$. Тогда если $u \in W_p^1(\Omega)$, $p \geq 1$, то*

$$\Biggl(\ \fint_{B_r(x)} |u(y) - u_{B_r(x)}|^p\, dy\Biggr)^{1/p} \leq Cr\Biggl(\ \fint_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}} u(y)|^p\, dy\Biggr)^{1/p} \tag{3.1}$$

для всех $x \in \Omega$, $r > 0$ таких, что $B_r(x) \subset \Omega$. Здесь $u_{B_r(x)} = \frac{1}{|B_r(x)|} \int\limits_{B_r(x)} u(y)\, dy$.

Отображения класса Соболева. Рассмотрим CC-пространство $(\mathbf{M}, d_{\mathbf{M}})$, область Ω в $\mathbf{M}$ и метрическое пространство $(\mathbf{X}, r)$.

Определение 3.1 [25]. Отображение $f : \Omega \to (\mathbf{X}, r)$ *принадлежит классу* $W_q^1(\Omega, \mathbf{X})$, если выполнены следующие условия:

(A) функция $[f]_z : x \in \Omega \mapsto r(f(x), z)$ принадлежит классу $W_q^1(\Omega)$ для всякого $z \in \mathbf{X}$;

(B) семейство функций $\nabla_{\mathscr{L}}([f]_z)_{z \in \mathbf{X}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_q(\Omega)$, т. е. существует функция $g \in L_q(\Omega)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla_{\mathscr{L}}([f]_z)(x)| \leq g(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

В случае $\mathbf{M} = \mathbb{R}^n$ данное определение эквивалентно определению работы [26].

Следующая лемма показывает, что отображения класса Соболева в определенном смысле аппроксимируются липшицевыми.

Лемма 3.1 [25, предложение 1]. *Пусть Ω — ограниченная область в CC-пространстве $\mathbf{M}$, $(\mathbf{X}, r)$ — сепарабельное метрическое пространство, $f : \Omega \to \mathbf{X}$ — отображение класса $W_p^1(\Omega, \mathbf{X})$, $1 \leq p < \infty$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое множество $A \subset \Omega$ такое, что $|\Omega \backslash A| < \varepsilon$ и ограничение f на множество A липшицево.*

Если $(\mathbf{X}, r) = (\mathbf{N}, d_{\mathbf{N}})$ — CC-пространство, то в силу леммы 3.1 и предложения 1.1 у отображения класса Соболева почти всюду определен аппроксимативный hc-дифференциал.

Приведем еще одну лемму.

Лемма 3.2 [15, лемма 4.6]. *Пусть $E \subset \mathbf{M}$ — измеримое ограниченное множество конечной меры, а $f : E \to \mathbf{N}$ — липшицево отображение на E. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $F \subset E$ такое, что $|E \setminus F| < \varepsilon$ и на нем выполняются следующие свойства:*

(a) *«разностное отношение» $\Delta_{t^{-1}}^{f(x)} f(\exp tX_i(x))$ сходится к $D_{X_i} f(x)$ равномерно по $x \in F$, $i = 1, \dots, n$;*

(b) *отображение $x \mapsto D_{X_i} f(x)$ непрерывно на F, $i = 1, \dots, n$;*

(c) *отображение $f : F \to \mathbf{N}$ hc-дифференцируемо во всех точках множества F.*

Доказательство основных результатов. Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — CC-пространства, Ω — область в $\mathbf{M}$, $f : \Omega \to \mathbf{N}$ отображение класса $W_q^1(\Omega, \mathbf{N})$, $1 \leq q < \infty$.

Без ограничения общности можно считать, что Ω — ограниченная область. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ по леммам 3.1 и 3.2 находим измеримое множество

$F \subset \Omega$, $|\Omega \setminus F| < \varepsilon$, на котором отображение f липшицево и равномерно hc-дифференцируемо. Можно считать также, что каждая точка F является точкой плотности 1. Мы покажем, что теорема 1.2 справедлива для любой точки $x \in F$.

Рассмотрим точки $x \in F$, $w = f(x) \in \mathbf{N}$, $z \in \mathscr{G}^w \setminus \{w\}$, аппроксимативный hc-дифференциал $A = Df(x)$ и функцию $\varphi(y) = \rho(z(r), f(y)) - \rho(z(r), A(y))$, где $z(r) = \Delta^w_{\alpha r} z$, число α из леммы 2.1.

Заметим, что $\varphi(y) \le C_3 d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y)) = o(d_{\mathbf{M}}(y, x))$ при $F \ni y \to x$ в силу hc-дифференцируемости f на F.

Доказательство теоремы 1.2. Надо показать два соотношения:

$$\Biggl(\ \fint_{B_r(x)} |\varphi(y)|^q \, dy\Biggr)^{1/q} = o(r), \tag{3.2}$$

$$\Biggl(\ \fint_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}} \varphi(y)|^q \, dy\Biggr)^{1/q} = o(1) \tag{3.3}$$

для всех $z \in \mathscr{G}^{f(x)}$, кроме $z = f(x)$.

Докажем вначале соотношение (3.3). Для достаточно малых r, очевидно, имеем $\varphi \in W^1_q(B_r(x))$. Тогда в силу леммы 2.1

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathscr{L}} \varphi(y) &= \nabla_{\mathscr{L}} \rho(z(r), f(y)) - \nabla_{\mathscr{L}} \rho(z(r), A(y)) \\ &= \widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}} \rho(z(r), f(y)) D_h f(y) - \widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}} \rho(z(r), A(y)) D_h f(x) + o(1)\end{aligned}$$

для $y \in B_r(x)$ при $r \to 0$. Отсюда

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathscr{L}} \varphi(y) &= \widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}} \rho(z(r), f(y))(D_h f(y) - D_h f(x)) \\ &\quad + (\widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}} \rho(z(r), f(y)) - \widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}} \rho(z(r), A(y))) D_h f(x) + o(1).\end{aligned}$$

При достаточно малых r функция $\rho(z(r), \cdot)$ непрерывно hc-дифференцируема всюду в $\mathscr{G}^{z(r)}$, кроме, быть может, точки $z(r)$. В точке $z(r)$ положим $\widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}} \rho(z(r), z(r)){=}0$. Если $|f^{-1}(z(r))| \ne 0$, то субградиент функции $\rho(z(r), f(\cdot))$ равен 0 почти всюду на множестве $f^{-1}(z(r)) \cap F$. Так как соответствующий гомоморфизму A гомоморфизм алгебр Ли — линейное отображение, то $|A^{-1}(z(r))| = 0$. Единственная точка, которую следует исключить из рассмотрения, это $z = f(x)$.

Поскольку $|\widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}} \rho(z(r), \cdot)| \le C_3$, имеем

$$\begin{aligned}\Biggl(\ \fint_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}} \varphi(y)|^q \, dy\Biggr)^{1/q} &\le C_3 \Biggl(\ \fint_{B_r(x)} |D_h f(y) - D_h f(x)|^q \, dy\Biggr)^{1/q} \\ &\quad + |D_h f(x)| \Biggl(\ \fint_{B_r(x)} |\widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}} \rho(z(r), f(y)) - \widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}} \rho(z(r), A(y))|^q \, dy\Biggr)^{1/q} + o(1).\end{aligned}$$

Первое слагаемое имеет порядок $o(1)$ при $r \to 0$ в силу теоремы Лебега о дифференцировании интеграла. По построению все точки множества F являются точками Лебега отображения $D_h f$, так как все точки F суть точки плотности 1 и по свойству (b) леммы 3.2 отображение $y \mapsto D_h f(y)$ непрерывно на F.

Оценим второе слагаемое. В силу липшицевости f на F без ограничения общности можно считать, что $f(B_r(x) \cap F) \subset B_{C'r}(f(x))$, где C' из леммы 2.1

такое, что $A(B_r(x)) \subset B_{C'r}(f(x))$. Следовательно, по свойству 2 псевдометрики ρ имеем

$$|\widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}}\rho(z(r), f(y)) - \widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}}\rho(z(r), A(y))|$$

$$\leq \max\{|\widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}}\widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}}\rho(z(r), w)| : w \in B_{C'r}(f(x))\} d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y)) \leq \frac{o(d_{\mathbf{M}}(x, y))}{r} = o(1)$$

для всех $y \in B_r(x) \cap F$ при $r \to 0$. Отсюда

$$\Bigg(\fint_{B_r(x)} |\widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}}\rho(z(r), f(y)) - \widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}}\rho(z(r), A(y))|^q \, dy\Bigg)^{1/q}$$

$$\leq \frac{1}{|B_r(x)|^{1/q}} \Bigg(\int_{B_r(x)\cap F} |\widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}}\rho(z(r), f(y)) - \widetilde{\nabla}_{\mathscr{L}}\rho(z(r), A(y))|^q \, dy\Bigg)^{1/q}$$

$$+ 2C_3 \frac{|B_r(x) \setminus F|^{1/q}}{|B_r(x)|^{1/q}} = o(1).$$

Таким образом, (3.3) доказано.

Докажем теперь соотношение (3.2). Рассмотрим точку $x \in F$. Заметим, что $|\varphi(y)| \leq C_3 d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y)) = o(d_{\mathbf{M}}(x, y))$ при $F \ni y \to x$, так как отображение f hc-дифференцируемо всюду на F. Из неравенства Пуанкаре и соотношения (3.3) получаем

$$\Bigg(\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)\cap F} |\varphi(y) - \varphi_{B_r(x)}|^q \, dy\Bigg)^{1/q}$$

$$\leq \Bigg(\fint_{B_r(x)} |\varphi(y) - \varphi_{B_r(x)}|^q \, dy\Bigg)^{1/q} \leq Cr \Bigg(\fint_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}}\varphi(y)|^q\Bigg)^{1/q} = o(r).$$

Поэтому

$$|\varphi_{B_r(x)}| \leq \Bigg(\frac{2}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)\cap F} (|\varphi(y) - \varphi_{B_r(x)}| + |\varphi(y)|)^q \, dy\Bigg)^{1/q} = o(r)$$

при $r \to 0$. Отсюда

$$\Bigg(\fint_{B_r(x)} |\varphi(y)|^q \, dy\Bigg)^{1/q} \leq \Bigg(\fint_{B_r(x)} |\varphi(y) - \varphi_{B_r(x)}|^q \, dy\Bigg)^{1/q} + \Bigg(\fint_{B_r(x)} |\varphi_{B_r(x)}|^q \, dy\Bigg)^{1/q} = o(r),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Достаточно показать, что для всех $x \in F$ выполняются два соотношения:

$$\Bigg(\fint_{B_r(x)} d_{\mathbf{N}}(A(y), f(y))^q \, dy\Bigg)^{1/q} = o(r), \quad \Bigg(\fint_{B_r(x)} |D_h f(y) - D_h A(y)|^q \, dy\Bigg)^{1/q} = o(1).$$

В силу леммы 2.1 имеем $D_h A(y) = D_h f(x) + o(1)$ при $y \to x$. Поэтому второе соотношение эквивалентно выражению

$$\Bigg(\fint_{B_r(x)} |D_h f(x) - D_h f(y)|^q \, dy\Bigg)^{1/q} = o(1),$$

которое справедливо всюду на F по теореме Лебега о дифференцируемости интеграла, так как все точки F являются точками плотности 1 и по свойству (b) леммы 3.2 отображение $y \mapsto D_h f(y)$ непрерывно на F.

Ввиду hc-дифференцируемости f на F имеем $d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y)) = o(d_{\mathbf{M}}(x,y))$ при $F \ni y \to x$. Далее,

$$\begin{aligned}&d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y)) \leq d_{\mathbf{N}}(z(r), f(y)) + d_{\mathbf{N}}(z(r), A(y))\\&\leq C_3|\rho(z(r), f(y)) - \rho(z(r), A(y))| + (1 + C_3^2) d_{\mathbf{N}}(z(r), A(y)) = O(r) + C_3|\varphi(y)|\end{aligned}$$

для всех $y \in B_r(x)$ и $z \in \mathscr{G}^{f(x)}$ при $r \to 0$. Получаем

$$\begin{aligned}&\biggl(\ \fint\limits_{B_r(x)} d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y))^q\,dy\biggr)^{1/q}\\&= \frac{1}{|B_r(x)|^{1/q}}\biggl(\ \int\limits_{B_r(x)\cap F} d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y))^q\,dy + \int\limits_{B_r(x)\setminus F} d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y))^q\,dy\biggr)^{1/q}\\&\leq o(r) + C_3\biggl(\ \fint\limits_{B_r(x)} |\varphi(y)|^q\,dy\biggr)^{1/q} = o(r), \qquad (3.4)\end{aligned}$$

так как $\frac{|B_r(x)\setminus F|}{|B_r(x)|} = o(1)$. $\square$

Для доказательства следствий 1.1 и 1.2 нам понадобятся аналоги теорем вложения пространств Соболева (см., например, [27–29]).

Теорема 3.2 (теоремы вложения). *Пусть $\mathbf{M}$ — CC-пространство хаусдорфовой размерности Q, Ω — ограниченная область в $\mathbf{M}$. Тогда существуют $C, r_0 > 0$, $0 < c \leq 1$ такие, что для всех функций $u \in W_p^1(B_r(x))$, $x \in \Omega$, $r < r_0$, выполняется*

$$\biggl(\ \fint\limits_{B_r(x)} |u(y) - u_{B_r(x)}|^{p^*}\biggr)^{1/p^*} dy \leq Cr\biggl(\ \fint\limits_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}} u(y)|^p\,dy\biggr)^{1/p},$$

где $p^* = \frac{pQ}{Q-p}$, при $1 \leq p < Q$;

$$|u(z) - u(y)| \leq Cr^{Q/p} d_{\mathbf{M}}(z,y)^{1-Q/p}\biggl(\ \fint\limits_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}} u(y)|^p\,dy\biggr)^{1/p}$$

для всех $z, y \in B_{cr}(x)$ при $p > Q$.

Доказательство следствия 1.1. Надо показать, что для почти всех точек $x \in \Omega$ выполнено

$$d_{\mathbf{N}}(f(y), (Df(x))(y)) = o(d_{\mathbf{M}}(x,y)) \quad \text{при } y \to x. \qquad (3.5)$$

В силу hc-дифференцируемости f на F имеем $d_{\mathbf{N}}(f(y), (Df(x))(y)) = o(d_{\mathbf{M}}(x,y))$ при $F \ni y \to x$, $x \in F$.

Для каждого $x \in F$ выберем точку $z_x \in \mathscr{G}^{f(x)} \setminus \{f(x)\}$. По теореме 1.2 для каждого $x \in F$ существует число $\alpha_x > 0$ такое, что для функции $\varphi_{r,x}(y) =$

$\rho(z_x(r), f(y)) - \rho(z_x(r), (Df(x))(y))$, $z_x(r) = \Delta^{f(x)}_{\alpha_x r} z_x$, выполнено соотношение (3.3), т. е.

$$\left(\fint_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}} \varphi_{r,x}(y)|^q \, dy\right)^{1/q} = o(1) \quad \text{при } r \to 0. \tag{3.6}$$

Применяя теорему Егорова, для любого $\varepsilon > 0$ получаем измеримое множество $F' \subset F$ такое, что $|F \setminus F'| < \varepsilon$ и сходимость в выражении (3.6) равномерна на множестве F'. Для доказательства следствия 1.1 достаточно показать, что f hc-дифференцируемо на F'.

Применим теорему вложения для функции $\varphi_{r,x} \in W^1_q(B_r(x))$, $q > Q$, $r < r_0$, учитывая, что $\varphi_{r,x}(x) = 0$. Имеем

$$|\varphi_{r,x}(y)| \leq Cr\left(\fint_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}} \varphi_{r,x}(y)|^q \, dy\right)^{1/q} = o(r)$$

для всех $y \in B_{cr}(x)$ при $r \to 0$.

В силу выбора F' существует число $r_1 \in (0, r_0]$ такое, что $|\varphi_{r,x}(y)| < d_{\mathbf{M}}(x, y)$ для всех $y \in B_{cr}(x)$ при любом $x \in F'$, $r < r_1$. Отсюда получаем, что $f(B_r(x)) \subset B_{\beta r}(f(x))$ для всех $x \in F'$, $r < cr_1$, при некотором $\beta > 0$.

Фиксируем точку $x \in F'$. Пусть вопреки (3.5) существуют число $\gamma > 0$ и последовательность $y_k \to x$ такие, что

$$d_{\mathbf{N}}(f(y_k), (Df(x))(y_k)) > \gamma d_{\mathbf{M}}(x, y_k). \tag{3.7}$$

Очевидно, что y_k не лежат в F'.

Вспомним, что x — точка плотности 1 множества F'. Следовательно, для любого k существует точка $w_k \in F'$ такая, что $d_{\mathbf{M}}(y_k, w_k) = o(d_{\mathbf{M}}(y_k, x))$ при $k \to \infty$.

В силу следствия 1.2 работы [15] имеем

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{N}}(Ay_k, Aw_k) &\leq c_1 d_c^{f(x)}(Ay_k, Aw_k) + o(d_{\mathbf{M}}(y_k, x)) \\ &\leq c_2 d_c^x(y_k, w_k) + o(d_{\mathbf{M}}(y_k, x)) \leq c_3 d_{\mathbf{M}}(y_k, w_k) + o(d_{\mathbf{M}}(y_k, x)) = o(d_{\mathbf{M}}(y_k, x)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{N}}(f(y_k), A(y_k)) &\leq d_{\mathbf{N}}(f(y_k), f(w_k)) + d_{\mathbf{N}}(f(w_k), A(w_k)) + d_{\mathbf{N}}(A(w_k), A(y_k)) \\ &\leq \beta d_{\mathbf{M}}(y_k, w_k) + o(d_{\mathbf{M}}(w_k, x)) + o(d_{\mathbf{M}}(y_k, x)) = o(d_{\mathbf{M}}(y_k, x)), \end{aligned}$$

что противоречит (3.7). $\square$

Другой метод доказательства следствия 1.1 см. в [25].

Доказательство следствия 1.2. Применим теорему вложения для функции $\varphi(y) = \rho(z(r), f(y)) - \rho(z(r), A(y)) \in W^1_q(B_r(x))$, $x \in F$, $1 \leq q < Q$, $r < r_0$. Имеем

$$\left(\fint_{B_r(x)} |\varphi(y) - \varphi_{B_r(x)}|^{q*} \, dy\right)^{1/q^*} \leq Cr\left(\fint_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}} \varphi(y)|^q \, dy\right)^{1/q} = o(r)$$

при $r \to 0$, где $q* = \frac{Qq}{Q-q}$. Отсюда, используя (3.2), получаем

$$\left(\fint_{B_r(x)} |\varphi(y)|^{q*} \, dy\right)^{1/q^*} \leq \left(\fint_{B_r(x)} |\varphi(y) - \varphi_{B_r(x)}|^{q*} \, dy\right)^{1/q^*} + |\varphi_{B_r(x)}| = o(r).$$

Поэтому аналогично соотношению (3.4)

$$\left(\fint_{B_r(x)} d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y))^{q^*}\,dy\right)^{1/q^*} = o(r). \qquad \square$$

§ 4. Отображения ограниченной вариации

Поскольку результаты о дифференцируемости имеют локальный характер, мы ограничимся рассмотрением такого CC-пространства $\mathbf{M}$, на котором существует набор базисных векторных полей $X_1, \dots, X_N$.

Функции ограниченной вариации. Пусть Ω — открытое множество CC-пространства $\mathbf{M}$, $\mathscr{F}(\Omega)$ — семейство горизонтальных векторных полей $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Phi_i(x)X_i(x)$, $\Phi_i \in C_0^1(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, таких, что $\|\Phi(x)\|_x \leq 1$ для всех $x \in \Omega$.

Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *функцией ограниченной вариации*, $f \in BV(\Omega)$, если $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и вариация f на Ω конечна, т. е.

$$\operatorname{Var}(f, \Omega) = \sup_{\Phi \in \mathscr{F}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) \sum_{j=1}^{n} X_j^* \Phi_j(x)\,dx < \infty.$$

По теореме Рисса о представлении линейного функционала существуют положительная борелевская мера ν и измеримое горизонтальное векторное поле σ, $\|\sigma(x)\|_x = 1$ для почти всех $x \in \Omega$, такие, что

$$\int_{\Omega} f(x) \sum_{j=1}^{n} X_j^* \Phi_j(x)\,dx = \int_{\Omega} \langle \Phi(x), \sigma(x) \rangle\,d\nu(x) \quad \text{для всех } \Phi \in \mathscr{F}(\Omega).$$

Отметим, что вариация функции f равна вариации меры ν, т. е. для любого борелевского множества $U \subset \Omega$ выполняется

$$\operatorname{Var}(f, U) = |\nu|(U) = \sup \sum_{k=1}^{\infty} |\nu(U_k)|,$$

где супремум берется по всем дизъюнктным разбиениям U: $U = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ и $U_k \cap U_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$.

Заметим, что пространство $BV(\Omega)$ с нормой

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L_1(\Omega)} + \operatorname{Var}(f, \Omega)$$

банахово.

Известна следующая

Теорема 4.1 (теорема вложения [13]). *Пусть Ω — ограниченная область в CC-пространстве $\mathbf{M}$. Тогда существуют $C, r_0 > 0$ такие, что для всех функций $f \in BV(B_r(x))$, $B_r(x) \subset \Omega$, $r < r_0$, выполняется*

$$\left(\fint_{B_r(x)} |f(y) - f_{B_r(x)}|^{\frac{Q}{Q-1}}\right)^{\frac{Q-1}{Q}} \leq Cr \frac{\operatorname{Var}(f, B_r(x))}{|B_r(x)|}.$$

Следствие 4.1 (неравенство Пуанкаре). *В условиях теоремы вложения для функции $f \in BV(B_r(x))$ выполняется неравенство*

$$\fint_{B_r(x)} |f(y) - f_{B_r(x)}|\, dy \leq Cr \frac{\operatorname{Var}(f, B_r(x))}{|B_r(x)|}$$

для всех $x \in \Omega$, $r < r_0$.

Рассмотрим борелевскую меру ω на CC-пространстве $\mathbf{M}$. Напомним, что величина $\mathscr{M}\omega(x) = \sup\limits_{B \ni x} \frac{\omega(B)}{|B|}$ называется *максимальной функцией меры* ω в точке $x \in \mathbf{M}$. Известно, что для любой ограниченной области K существует константа $C > 0$ такая, что $|\{x \in K : \mathscr{M}\omega(x) > k\}| < C/k$ для всех $k > 0$.

Приведем утверждение, которое немедленно следует из неравенства Пуанкаре.

Предложение 4.1. *Пусть K — область, компактно вложенная в Ω, $f \in BV(\Omega)$. Тогда существует множество $Z \subset K$ нулевой меры такое, что*

$$|f(x) - f(y)| \leq (\mathscr{M}\operatorname{Var}(f)(x) + \mathscr{M}\operatorname{Var}(f)(y))\, d_{\mathbf{M}}(x, y)$$

для всех точек $x, y \in K \setminus Z$.

Предложение 4.1 верно для любого пространства, где имеют место аналог неравенства Пуанкаре и условие удвоения меры. Его доказательство можно найти, например, в [29, теорема 3.2] и в [7].

Отображения ограниченной вариации. Рассмотрим CC-пространство $(\mathbf{M}, d_{\mathbf{M}})$, область Ω в $\mathbf{M}$ и метрическое пространство $(\mathbf{X}, r)$.

Определение 4.1. Отображение $f : \Omega \to (\mathbf{X}, r)$ называется *отображением ограниченной вариации* ($f \in BV(\Omega, \mathbf{X})$), если

(A) для всех $z \in \mathbf{X}$ функция $[f]_z : x \in \Omega \mapsto r(f(x), z)$ принадлежит классу $BV(\Omega)$;

(B) существует конечная σ-аддитивная мера ω, определенная на борелевских множествах из Ω, такая, что $\operatorname{Var}([f]_z) \leq \omega$, где ω не зависит от z.

В случае $\mathbf{M} = \mathbb{R}^n$ данное определение эквивалентно определению работы [30]. Аналогично [30] можно показать, что условие (B) эквивалентно условию

(B$'$) существует конечная σ-аддитивная мера ω, определенная на борелевских множествах из Ω, такая, что $\operatorname{Var}(\varphi \circ f) \leq \omega$ для всех 1-липшицевых функций $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$.

Следующая лемма показывает, что отображения ограниченной вариации в определенном смысле аппроксимируются липшицевыми.

Лемма 4.1. *Пусть Ω — ограниченная область в CC-пространстве $\mathbf{M}$, $(\mathbf{X}, r)$ — сепарабельное метрическое пространство, $f : \Omega \to \mathbf{X}$ — отображение класса $BV(\Omega, \mathbf{X})$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое множество $A \subset \Omega$ такое, что $|\Omega \backslash A| < \varepsilon$ и ограничение f на множество A липшицево.*

Так как на ограниченном множестве справедливы вложения $W^1_p \subset W^1_1 \subset BV$ для всех $p \geq 1$, то лемма 3.1 есть следствие леммы 4.1.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$, область $D \Subset \Omega$ такую, что $|\Omega \backslash D| < \varepsilon/2$, и точку $z \in \mathbf{X}$. Рассмотрим функцию $[f]_z(x) = r(z, f(x))$. По определению функция $[f]_z$ принадлежит классу $BV(D)$.

Тогда существует множество $S_z \subset D$ нулевой меры такое, что

$$|[f]_z(x) - [f]_z(y)| \le (\mathscr{M}\,\mathrm{Var}([f]_z)(x) + \mathscr{M}\,\mathrm{Var}([f]_z)(y))d_{\mathbf{M}}(x,y)$$

для всех $x, y \in D\backslash S_z$ по предложению 4.1. Напомним, что по определению 4.1 существует мера σ, не зависящая от z, такая, что $\mathrm{Var}([f]_z) \le \sigma$ для всех z. Следовательно, $\mathscr{M}\,\mathrm{Var}([f]_z) \le \mathscr{M}\sigma$ почти всюду в $\mathbf{M}$, т. е. существует множество E_z нулевой меры такое, что это неравенство выполняется всюду в $D \setminus E_z$. Поэтому

$$|[f]_z(x) - [f]_z(y)| \le (g(x) + g(y))d_{\mathbf{M}}(x,y)$$

для всех $x, y \in D \setminus (S_z \cup E_z)$, где $g(x) = \mathscr{M}\sigma(x)$.

Пусть $Z \subset f(D)$ — счетное всюду плотное множество. Положим $S = \bigcup\limits_{z\in Z}(S_z \cup E_z)$. Очевидно, что $|S| = 0$.

Определим множество $A = \{x \in D\backslash S \mid g \le k\}$, где k настолько большое, что $|D\backslash A| \le \varepsilon/2$. Это всегда можно сделать, так как по свойству максимальной функции от меры существует константа $C > 0$ такая, что $|\{y \in D \setminus S \mid g(y) > k\}| < C/k$ для всех $k > 0$.

Так как для любой точки $x \in A$ существует последовательность точек $z_i \in Z$ таких, что $z_i \to f(x)$ при $i \to \infty$, то

$$\begin{aligned} r(f(x), f(y)) &\le |r(f(x), z_i) - r(f(y), z_i)| + 2r(f(x), z_i) \\ &\le 2k\, d_{\mathbf{M}}(x,y) + 2r(f(x), z_i) \to 2k\, d_{\mathbf{M}}(x,y) \quad \text{при } i \to \infty \end{aligned}$$

для любого $y \in A$. Следовательно, отображение f на множестве A липшицево. $\square$

Если $(\mathbf{X}, r) = (\mathbf{N}, d_{\mathbf{N}})$ — CC-пространство, то из леммы 4.1 и hc-дифференцируемости почти всюду липшицевых отображений (теорема 1.1) вытекает, что у отображений ограниченной вариации почти всюду определен аппроксимативный hc-дифференциал.

Субградиент. Если $\mathbf{N} = \mathbb{R}$ — вещественная прямая, то функция ограниченной вариации $f : \Omega \to \mathbb{R}$ почти всюду в Ω имеет аппроксимативный горизонтальный дифференциал, который в случае функций мы так же, как и в § 3, будем называть обобщенным субградиентом функции f и обозначать через

$$\nabla_{\mathscr{L}} f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x) X_i f(x) X_j(x),$$

где $X_i f(x) = \operatorname*{ap\,lim}\limits_{t\to 0} \frac{d}{dt} f(\exp_x tX_i)$.

По теореме о дифференцируемости меры (см., например, [31]) и теореме Лебега — Безиковича (см., например, [32]) определено векторное поле

$$\mu'(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i'(x) X_i(x),$$

где

$$\mu_i'(x) = \lim_{x\in B, \mathrm{rad} B\to 0} \frac{\int\limits_B \sigma_i(y)\, d\nu(y)}{|B|} = \sigma_i(x)\nu'(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

причем $\mu_i' \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Замечание 4.1. В работе [31] результат о дифференцируемости меры доказывается для знакопостоянных мер. Этот результат легко распространяется на знакопеременные меры с помощью теоремы Жордана о разложении меры.

Таким образом, функция ограниченной вариации f имеет почти всюду, с одной стороны, субградиент $\nabla_{\mathscr{L}} f$ и, с другой стороны, плотность векторного заряда μ'. Заметим, что для функций класса Соболева эти два понятия совпадают в силу теоремы Лебега о дифференцируемости интеграла. В случае функций ограниченной вариации связь между плотностью заряда μ' и субградиентом $\nabla_{\mathscr{L}} f$ устанавливается в следующей лемме.

Лемма 4.2. *Пусть функция f принадлежит $BV(\Omega)$. Тогда $\mu'(x) = \nabla_{\mathscr{L}} f(x)$ почти всюду на Ω.*

Доказательство леммы основано на известной схеме в евклидовом пространстве (см., например, [32]). В случае групп Карно эта схема реализована в работе [22].

Фиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме 4.1 существует измеримое множество $F \subset \Omega$, $|\Omega \setminus F| < \varepsilon$, такое, что на F функция f липшицева. Без ограничения общности можно считать, что все точки $x \in F$ являются точками hc-дифференцируемости функции f, точками плотности 1.

Рассмотрим точку $x \in F$. В точке x существует аппроксимативный hc-дифференциал $(Df(x))(y) = f(x) + \big\langle \nabla_{\mathscr{L}} f(x), \theta_x^{-1}(y)\big\rangle$, причем $f(y) - (Df(x))(y) = o(d_{\mathbf{M}}(x,y))$ при $F \ni y \to x$.

Обозначим

$$\operatorname{Box}_r(x) = \big\{y \in \mathbf{M} : \max_{i=1,\dots,N}\{|y_i|^{1/\deg X_i}\} < r,\ (y_1,\dots,y_N) = \theta_x^{-1}(y)\big\}.$$

Известно [19], что существует константа $C_4 > 0$ такая, что $B_{r/C_4}(x) \subset \operatorname{Box}_r(x) \subset B_{C_4 r}(x)$ для всех $x \in F$.

Вариация функции $h(y) = f(y) - f(x) - \langle \mu'(x), \theta_x^{-1}(y)\rangle$ имеет вид

$$\operatorname{Var}(h,U) = \sup_{\Phi \in \mathscr{F}(U)} \bigg\{ \int_U \langle \Phi(y), \sigma(y)\rangle d\nu(y) - \int_U \langle \Phi(y), \mu'(x)\rangle dy \bigg\}$$

и, следовательно,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{Var}(h, B_{C_4 r}(x))}{|B_{C_4 r}(x)|} = 0.$$

Из неравенства Пуанкаре получаем

$$\fint_{\operatorname{Box}_r(x)} |h(y) - h_{\operatorname{Box}_r(x)}|\, dy \le 2 \fint_{\operatorname{Box}_r(x)} |h(y) - h_{B_{C_4 r}(x)}|\, dy$$
$$\le C \fint_{B_{C_4 r}(x)} |h(y) - h_{B_{C_4 r}(x)}|\, dy \le Cr \frac{\operatorname{Var}(h, B_{C_4 r}(x))}{|B_{C_4 r}(x)|} = o(r).$$

Обозначим $Ly = \big\langle \nabla_{\mathscr{L}} f(x) - \mu'(x), \theta_x^{-1}(y)\big\rangle$. Тогда $h = f - Df(x) + L$. Имеем

$$o(r) = \fint_{\operatorname{Box}_r(x)} |h(y) - h_{\operatorname{Box}_r(x)}|\, dy$$
$$\ge \frac{1}{|\operatorname{Box}_r(x)|} \int_{\operatorname{Box}_r(x)\cap F} |f(y) - (Df(x))(y) + Ly - h_{\operatorname{Box}_r(x)}|\, dy$$

$$= o(r) + \frac{1}{|\operatorname{Box}_r(x)|} \int\limits_{\operatorname{Box}_r(x)\cap F} |Ly - h_{\operatorname{Box}_r(x)}|\, dy.$$

Рассмотрим среднее значение функции h:

$$h_{\operatorname{Box}_r(x)} = \fint\limits_{\operatorname{Box}_r(x)\cap F} h(y)\, dy - \fint\limits_{\operatorname{Box}_r(x)\cap F} (h(y) - h_{\operatorname{Box}_r(x)})\, dy$$

$$= \fint\limits_{\operatorname{Box}_r(x)\cap F} (f(y) - (Df(x))(y) + Ly)\, dy + o(r) = \fint\limits_{\operatorname{Box}_r(x)\cap F} Ly\, dy + o(r).$$

Так как $|Ly| \leq Cr$ для всех $y \in \operatorname{Box}_r(x)$ и x — точка плотности 1 множества F, то

$$\fint\limits_{\operatorname{Box}_r(x)\cap F} Ly\, dy = o(r) + L_{\operatorname{Box}_r(x)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|\operatorname{Box}_r(x)|} \int\limits_{\operatorname{Box}_r(x)\cap F} |Ly - L_{\operatorname{Box}_r(x)}|\, dy = o(r).$$

Покажем, что $L_{\operatorname{Box}_r(x)} = o(r)$. Напомним, что

$$\theta_x^{-1}(\operatorname{Box}_r(x)) = \{(w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^N : |w_i| \leq r^{\deg X_i},\ i = 1, \dots, N\},$$

$$L(\theta_x(w)) = \sum_{i=1}^{n} (X_i f(x) - \mu_i'(x)) w_i$$

и $J(\theta_x, w) = 1 + o(1)$ при $w \to 0$. (Здесь $J(\theta_x, w)$ — якобиан отображения θ_x в точке w.) Поэтому

$$\int\limits_{\operatorname{Box}_r(x)} Ly\, dy = \int\limits_{\theta_x^{-1}(\operatorname{Box}_r(x))} L(\theta_x(w)) J(\theta_x, w)\, dw$$

$$= \int\limits_{\theta_x^{-1}(\operatorname{Box}_r(x))} \sum_{i=1}^{n} (X_i f(x) - \mu_i'(x)) w_i (1 + o(1))\, dw = o(r) |\operatorname{Box}_r(x)|$$

в силу симметричности множества $\theta_x^{-1}(\operatorname{Box}_r(x))$. Таким образом,

$$\frac{1}{\operatorname{Box}_r(x)} \int\limits_{\operatorname{Box}_r(x)\cap F} |Ly|\, dy = o(r).$$

Отсюда немедленно вытекает, что $L = 0$ и, следовательно, $\mu'(x) = \nabla_{\mathscr{L}} f(x)$. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *— CC-пространства,* Ω *— область в* $\mathbf{M}$, $f : \Omega \to \mathbf{N}$ *— отображение ограниченной вариации. Тогда* $D_h f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Доказательство. Для почти всех точек $x \in \Omega$ существует аппроксимативный горизонтальный дифференциал $D_h f(x)$. Фиксируем точку $x \in \Omega$, где определен $D_h f(x)$. Тогда найдется гладкая функция $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ такая, что $|\nabla_{\mathscr{L}}(\varphi \circ f)(x)| = |D_h f(x)|$. По лемме 4.2 $\nabla_{\mathscr{L}}(\varphi \circ f)(x) = \mu'(x)$, где μ — знакопеременный заряд, определяемый функцией ограниченной вариации $\varphi \circ f$.

По определению отображения ограниченной вариации существует борелевская мера ω такая, что $\mathrm{Var}(\varphi \circ f) \leq \omega$ для любой 1-липшицевой функции $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$. Следовательно, $|\nabla_{\mathscr{L}}(\varphi \circ f)(x)| = |\mu'(x)| \leq \omega'(x)$ для почти всех точек $x \in \Omega$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $\omega' \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Пусть Ω — область в CC-пространстве $\mathbf{M}$, $f \in BV(\Omega, \mathbf{N})$. Без ограничения общности можно считать, что Ω — ограниченное множество. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. По леммам 4.1 и 3.2 существует измеримое множество $F \subset \Omega$ такое, что $|\Omega \setminus F| < \varepsilon$ и отображение f липшицево и равномерно hc-дифференцируемо на F. Можно считать, что все точки F являются точками плотности 1. По определению 4.1 отображение ограниченной вариации f определяет положительно определенную борелевскую меру σ такую, что $\mathrm{Var}(\varphi \circ f) \leq \sigma$ для любой 1-липшицевой функции φ. Будем дополнительно считать, что F не пересекается с носителем сингулярной части меры σ. Мы покажем справедливость теоремы 1.2 для любой точки $x \in F$.

Обозначим $A = Df(x)$, $\varphi(y) = \rho(z(r), f(y)) - \rho(z(r), A(y))$, где $z(r) = \Delta^{f(x)}_{\alpha r} z$, число α из леммы 2.1.

Следуя схеме доказательства теоремы 1.2 для отображений класса Соболева, для всех $z \in \mathscr{G}^{f(x)}$, кроме $z = f(x)$, получаем

$$\fint_{B_r(x)} |\nabla_{\mathscr{L}} \varphi(y)| \, dy = o(1).$$

Чтобы применить неравенство Пуанкаре, нам требуется оценить вариацию φ. Для этого воспользуемся леммой 4.2.

Вариация разлагается на два слагаемых: $\mathrm{Var}(\varphi) = \mu^a + \mu^s$, где μ^a — абсолютно непрерывная часть вариации, μ^s — ее сингулярная часть, $\lim\limits_{r \to 0} \frac{\mu^s(B_r(x))}{|B_r(x)|} = 0$ по выбору множества F. Известно, что абсолютно непрерывная часть восстанавливается по производной $\mu^a(U) = \int\limits_U |\mu'(y)| \, dy$, причем $|\mu'(y)| = |\nabla_{\mathscr{L}} \varphi(y)|$ почти всюду на $\mathscr{G}^x$ по лемме 4.2. Поэтому

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{Var}(\varphi, B_r(x))}{|B_r(x)|} = \lim_{r \to 0} \fint |\mu'(y)| \, dy = 0.$$

Из неравенства Пуанкаре получаем

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x) \cap F} |\varphi(y) - \varphi_{B_r(x)}| \, dy \leq \fint_{B_r(x)} |\varphi(y) - \varphi_{B_r(x)}| \, dy$$
$$\leq Cr \frac{\mathrm{Var}(\varphi, B_r(x))}{|B_r(x)|} = o(r).$$

Заметим, что $\varphi(y) = o(r)$ на $B_r(x) \cap F$, так как $\varphi(y) \leq C_3 d_{\mathbf{N}}(f(y), A(y)) = o(d_{\mathbf{M}}(x, y))$ в силу hc-дифференцируемости f на F, если $y \in F \cap B_r(x)$. Поэтому $\varphi_{B_r(x)} = o(r)$ и, следовательно,

$$\fint_{B_r(x)} |\varphi(y)| \, dy \leq \fint_{B_r(x)} |\varphi(y) - \varphi_{B_r(x)}| \, dy + |\varphi_{B_r(x)}| = o(r).$$

Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.3 и следствия 1.2 для отображений ограниченной вариации с очевидными изменениями повторяет доказательство этих результатов для отображений класса Соболева.

Основные результаты статьи сформулированы в работе авторов [33].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // Мат. сб. 1968. Т. 75, № 3. С. 657–675.
2. *Calderón A. P., Zygmund A.* Local properties of solutions of elliptic partial differential equations // Stud. Math. 1961. V. 20, N 2. P. 171–225.
3. *Calderón A. P., Zygmund A.* On the differentiability of functions which are of bounded variation in Tonelli's sense // Rev. Union Mat. Argent. 1962. V. 20. P. 102–121.
4. *Vodop'yanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии (Редактор-составитель С. К. Водопьянов). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2000. С. 603–670.
5. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 3. С. 305–309.
6. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.
7. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
8. *Pansu P.* Métriques de Carnot — Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
9. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 70–89.
10. *Magnani V.* Differentiability and area formulas on stratified Lie groups // Houston J. Math. 2001. V. 27, N 2. P. 297–323.
11. *Lu G.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications // Rev. Mat. Iberoam. 1992. V. 8, N 3. P. 367–439.
12. *Lu G.* The sharp Poincaré inequality for free vector fields: An endpoint result // Rev. Mat. Iberoam. 1994. V. 10, N 2. P. 453–466.
13. *Garofalo N., Nhieu D.-M.* Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 49, N 10. P. 1081–1144.
14. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений в геометрии пространств Карно — Каратеодори // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 5. С. 592–596.
15. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость отображений в геометрии пространств Карно — Каратеодори // Представлена в Сиб. мат. журн.
16. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
17. *Gromov M.* Carnot — Carathéodory spaces seen from within // Sub-Reimannian Geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
18. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
19. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Локальная геометрия пространств Карно — Каратеодори в условиях минимальной гладкости // Докл. РАН. 2006. Т. 412, № 3.
20. *Mitchell J.* On Carnot-Carathéodory metrics // J. Differential Geom. 1985. V. 21, N 1. P. 35–45.
21. *Monti R., Serra Cassano F.* Surface measures in Carnot-Carathédory spaces // Calc. Var. Partial Diff. Equations. 2001. V. 13, N 3. P. 339–376.
22. *Ambrosio L., Magnani V.* Weak differentiability of BV functions on stratified groups // Math. Z. 2003. Bd 245, N 1. S. 123–153.
23. *Водопьянов С. К., Романовский Н. Н.* Классы отображений Соболева на пространствах Карно — Каратеодори. Различные нормировки и вариационные задачи // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 2. С. 154–157.
24. *Sánchez Calle A.* Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields // Invent. Math. 1984. V. 78, N 1. P. 143–160.

25. *Водопьянов С. К.* Геометрия пространств Карно — Каратеодори, квазиконформный анализ и геометрическая теория меры // Владикавказ. мат. журн. 2003. Т. 5, № 1. С. 14–34.
26. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
27. *Capogna L., Danielli D., Garofalo N.* An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1993. V. 18, N 9–10. P. 1765–1794.
28. *Lu G.* Embedding theorems into Lipschitz and BMO spaces and applications to quasilinear subelliptic differential equations // Publ. Mat. 1996. V. 40, N 2. P. 301–329.
29. *Haj_lasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré. Providence RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Mem. Amer. Math.Soc.; V. 688).
30. *Ambrosio L.* Metric space valued functions of bounded variation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. (4). 1990. V. 17, N 3. P. 439–478.
31. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I // Мат. тр. 2003. Т. 6, № 2. С. 14–65.
32. *Evans L. C., Gariepy R. F.* Measure theory and fine properties of functions. London a. o.: CRC Press, Boca Raton, 1992.
33. *Водопьянов С. К., Исангулова Д. В.* Дифференцируемость отображений пространств Карно — Каратеодори в топологии Соболева и BV-топологии // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 1. С. 295–300.

Статья поступила 14 октября 2005 г.

Водопьянов Сергей Константинович, Исангулова Дарья Васильевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru, dasha@math.nsc.ru