Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 513.83

О ДВУХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ РЕТРАКТОВ

П. В. Черников

Аннотация: Установлено, что условие (Γ) о брикетных разбиениях не факторизуемо. Это ответ на вопрос К. Борсука [1]. Доказано, что существуют метрические пространства X, Y и точка $(a, b) \in X \times Y$ такие, что точка (a, b) является r-точкой произведения $X \times Y$ и при этом точка a не является r-точкой пространства X. Это ответ на вопрос А. Косиньского [2].

Ключевые слова: абсолютный ретракт, условие (Γ), Q-многообразие, r-точка.

1. Далее через $A(N)R$ обозначаем совокупность всех компактных метрических абсолютных (окрестностных) ретрактов. В [1] определяется понятие брикетного разбиения метрического пространства. А именно, *брикетным разбиением произвольного метрического пространства* X называется конечная система $X_1, \dots, X_k$ непустых множеств, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i$;

2) для любого набора индексов $i_0, i_1, \dots, i_m$, где $1 \leq i_j \leq k$, пересечение $\bigcap\limits_{j=0}^{m} X_{i_j}$ либо пусто, либо является AR-компактом.

Из условия 2, в частности, следует, что каждое множество X_i принадлежит классу AR. Отметим, что существует двумерный связный ANR-компакт X', не представимый в виде объединения конечного или счетного числа AR-компактов [1, с. 178].

Будем говорить, следуя [1], что метрическое пространство X *удовлетворяет условию* (Γ), и писать $X \in (\Gamma)$, если это пространство X допускает брикетное разбиение. Топологическое свойство (α) называется *факторизуемым*, если из того, что произведение $X_1 \times X_2$ топологических пространств X_1, X_2 обладает свойством (α), следует, что каждый сомножитель обладает этим свойством.

В [1, с. 250] сформулирован вопрос: факторизуемо ли условие (Γ)? Покажем, что ответ отрицательный.

Теорема 1. *Условие* (Γ) *не факторизуемо.*

Доказательство. Для всякого конечного полиэдра P все непустые симплексы его произвольной триангуляции образуют, очевидно, брикетное разбиение этого полиэдра, т. е. $P \in (\Gamma)$. Если метрические пространства допускают брикетное разбиение, пусть, например, $X_1, X_2 \in (\Gamma)$, то их произведение $X_1 \times X_2$ также допускает брикетное разбиение. Действительно, пусть $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ — брикетное разбиение пространства X_1, $\{B_k\}_{k=1}^{m}$ — брикетное разбиение пространства X_2. Тогда множества $A_i \times B_k$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$, образуют брикетное разбиение пространства $X_1 \times X_2$, так как для любого набора индексов $(i_0, k_0), (i_1, k_1), \dots, (i_s, k_s)$ множество

$$\bigcap_{j=0}^{s} (A_{i_j} \times B_{k_j}) = \left(\bigcap_{j=0}^{s} A_{i_j} \right) \times \left(\bigcap_{j=0}^{s} B_{k_j} \right)$$

либо пусто, либо является AR-компактом [1].

Рассмотрим произведение $X' \times Q$, где X' — упоминавшийся выше ANR-компакт. Согласно ANR-теореме Эдвардса [3] пространство $X' \times Q$ является Q-многообразием. По триангуляционной теореме Чепмэна [3] найдется компактный полиэдр P_0 такой, что $X' \times Q$ и $P_0 \times Q$ гомеоморфны.

Согласно сказанному ранее пространство $P_0 \times Q$ допускает брикетное разбиение, поэтому $X' \times Q \in (\Gamma)$, тогда как $X' \notin (\Gamma)$.

Теорема доказана.

2. Точка x, принадлежащая топологическому пространству X, называется *r-точкой пространства* X, если во всякой окрестности U точки x содержится такая окрестность V этой точки, что для каждой точки $q \in V$ граница $\mathrm{Fr}(V)$ является деформационным ретрактом множества $\overline{V} \setminus \{q\}$ [2].

В [2] сформулирован следующий вопрос (проблема 7). Пусть $(a, b) \in X \times Y$, где X, Y — топологические пространства, и пусть точка (a, b) является r-точкой произведения $X \times Y$. Будут ли тогда точки a и b r-точками пространств X и Y соответственно?

Покажем, что ответ отрицательный.

Точку $(0, 0, \dots) \in l_2$ будем обозначать сокращенно через $\overline{0}$.

Теорема 2. *Точка* $(0, \overline{0}) \in [0, 1) \times l_2$ *является* r*-точкой произведения* $[0, 1) \times l_2$*, при этом точка* $0 \in [0, 1)$ *не является* r*-точкой полуинтервала* $[0, 1)$.

Доказательство. Очевидно, что точка $0 \in [0, 1)$ не является r-точкой полуинтервала $[0, 1)$. Рассмотрим произведение $[0, 1) \times l_2$. Так как всякое l_2-многообразие $[0, 1)$-устойчиво [3, с. 44], пространство $[0, 1) \times l_2$ гомеоморфно l_2. Всякая точка пространства l_2 есть, очевидно, r-точка этого пространства. Значит, $(0, \overline{0})$ — r-точка пространства $[0, 1) \times l_2$, тогда как точка $0 \in [0, 1)$ r-точкой пространства $[0, 1)$ не является.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борсук К.* Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.
2. *Kosinski A.* On manifods and r-spaces // Fund. Math. 1955. V. 42. P. 111–124.
3. *Чепмэн Т.* Лекции о Q-многообразиях. М.: Мир, 1981.

Статья поступила 9 декабря 2005 г., окончательный вариант — 1 сентября 2006 г.

Черников Павел Васильевич
г. Новосибирск