Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 512.54

c–ПОЛУПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Б. Ху, В. Го

Аннотация: Говорят, что подгруппа в G *c-полуперестановочна*, если A имеет минимальное добавление T в G такое, что для любой подгруппы T_1 в T существует $x \in T$ такой, что $AT_1^x = T_1^x A$. Получены некоторые результаты о c-полуперестановочных подгруппах, которые затем использованы для выяснения структуры некоторых конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, c-полуперестановочная подгруппа, максимальные подгруппы силовских подгрупп, сверхразрешимая группа, p-нильпотентная группа.

1. Введение

Напомним, что подгруппа A группы G называется *перестановочной с подгруппой* B, если $AB = BA$. Подгруппа A, перестановочная со всеми подгруппами в G, называется *перестановочной подгруппой* [1] (или *квазинормальной подгруппой* [2]) группы G.

Перестановочные подгруппы обладают рядом интересных свойств в случае, когда G — конечная группа. Например, Оре [2] доказал, что каждая перестановочная подгруппа конечной группы субнормальна. В [3] доказано, что для любой перестановочной подгруппы H конечной группы G группа H/H_G нильпотентна.

Однако, вообще говоря, две подгруппы H и T группы G могут не быть перестановочны в G, но G может содержать элемент x такой, что $HT^x = T^x H$. Исходя из этого В. Го, К.-П. Шум и А. Н. Скиба недавно ввели понятие условно перестановочной подгруппы (понятие H-перестановочной подгруппы) [4–6].

Пусть A, B — подгруппы группы G и $0 \neq H \subseteq G$. Будем говорить, что

(1) *A H-перестановочна с B*, если существует $x \in T$ такое, что $AB^x = B^x A$.

(2) *A вполне H-перестановочна с B*, если $AB^x = B^x A$ для некоторого $x \in H \cap \langle A, B\rangle$.

Если, в частности, $H = G$, то G-перестановочная подгруппа называется также *условно перестановочной* или, иначе, *c-перестановочной подгруппой.*

С использованием этого нового понятия в [4–6] получены некоторые новые элегантные результаты о строении конечных групп.

В данной статье мы развиваем понятие H-перестановочной подгруппы, а именно вводим следующее понятие (см. также [7]).

Определение 1. Пусть A — подгруппа группы G. Будем говорить, что

Research is supported by a NNSF grant of China (Grant:10471118).

(1) A *c-полуперестановочна* в G, если существует минимальное добавление T подгруппы A в G такое, что A T-перестановочно со всеми подгруппами в T.

(2) A *вполне c-полуперестановочно* в G, если существует минимальное добавление T к A в G такое, что A вполне T-перестановочно со всеми подгруппами в T.

Пусть A — подгруппа группы G. Через $T(A)$ (соответственно $T_c(A)$) будем обозначать множество всех минимальных добавлений T к A в G таких, что A T-перестановочно (соответственно вполне T-перестановочно) со всеми подгруппами в T. Если $T \in T(A)$ (соответственно $T \in T_c(A)$), то T назовем *c-добавлением* (соответственно *вполне c-добавлением*) к A в G.

В настоящей статье мы изучаем влияние (вполне) c-перестановочных подгрупп на структуру конечных групп. Получены некоторые новые достаточные и необходимые условия, при которых группа нильпотентна, сверхразрешима и вообще входит в данную формацию.

Все рассматриваемые ниже группы конечны. Все понятия и термины стандартны. Мы отсылаем читателя к монографиям [1, 8] по поводу обозначений и не представленных в данной статье терминов.

2. Предварительные результаты

В этом разделе напомним некоторые основные результаты о H-перестановочных подгруппах и c-полуперестановочных подгруппах. Мы также приведем некоторые известные утверждения, часто используемые нами в дальнейшем.

Лемма 2.1 (см. [4–6]). *Пусть A, B, H — подгруппы в G и $K \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если A (вполне) H-перестановочна с B, то B (вполне) H-перестановочна с A.*

(2) *Если A (вполне) H-перестановочна с B, то A^x (вполне) H^x-перестановочна с B^x для любого $x \in G$.*

(3) *Если A (вполне) H-перестановочна с B, то AK/K (вполне) HK/K-перестановочна с BK/K.*

(4) *Если $K \leq A$, то A/K (вполне) HK/K-перестановочна с BK/K в G/K тогда и только тогда, когда A (вполне) H-перестановочна с B в G.*

(5) *Если F — перестановочная подгруппа в G и A (вполне) H-перестановочна с B, то A (вполне) H-перестановочна с BF.*

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2.2. *Пусть $G = AT$ и T_1 — подгруппа в T. Допустим, что A (вполне) G-перестановочна с T_1. Тогда A (вполне) T-перестановочна с T_1.*

Лемма 2.3. *Пусть G — группа, $N \trianglelefteq G$ и $A \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если A (вполне) c-полуперестановочна в G, то AN/N (вполне) c-полуперестановочна в G/N.*

(2) *Если A/N (вполне) c-полуперестановочна в G/N, то A (вполне) c-полуперестановочна в G.*

(3) *Если A вполне c-полуперестановочна в G и $A \leq H \leq G$, то A вполне c-полуперестановочна в H.*

(4) *Если максимальная подгруппа A в G (вполне) c-полуперестановочна в G, то $|G : A|$ простое.*

(5) *Если* $T \in T(A)$ $(T \in T_c(A))$, *то* $T^x \in T(A)$ (*соответственно* $T^x \in T_c(A)$) *для любого* $x \in G$.

Доказательство. (1) Рассмотрим случай, когда A вполне c-полуперестановочна в G. Пусть $T \in T_c(A)$. Тогда $G/N = (AN/N)(TN/N)$. Пусть T_0/N — минимальное добавление к AN/N в G/N, содержащееся в TN/N, и T_1/N — подгруппа в T_0/N. Тогда $T_1 = T_1 \cap NT = N(T_1 \cap T)$ и $T_1/N = (T_1 \cap T)N/N$. Так как A вполне T-перестановочна с $T_1 \cap T$, по лемме 2.1(5) A вполне T-перестановочна с $(T_1 \cap T)N$, а значит, по лемме 2.1(3) AN/N вполне TN/N-перестановочна с T_1/N в G/N. Аналогично можно рассмотреть случай, когда A T-полуперестановочна в G.

(2) Пусть $T/N \in T_c(A/N)$ и T_0 — минимальное добавление к A в G, содержащееся в T. Пусть T_1 — подгруппа в T_0. Так как A/N вполне TN/N-перестановочна с T_1N/N в G/N, по лемме 2.1 A вполне T-перестановочна с T_1 в G. Отсюда A вполне T-перестановочна с любой подгруппой в T_0 и тем самым A вполне c-полуперестановочна в G. Аналогично можно доказать второе утверждение.

(3) Пусть $T \in T_c(A)$. Тогда $H = H \cap AT = A(H \cap T)$. Пусть T_0 — минимальное добавление к A в H, содержащееся в $H \cap T$. Тогда, как и выше, можно увидеть, что T_0 — c-добавление к A в H. Следовательно, A вполне c-полуперестановочна в H.

(4) Пусть $T \in T(A)$, M — максимальная подгруппа в T. Тогда $AM^t = M^tA$ для некоторого $t \in T$. Поскольку T — минимальное добавление к A в G, имеем $AM \neq G$ и тем самым $AM^t \neq G$. Отсюда $M^t \leq A$, потому что A максимальна в G. Предположим, что T имеет максимальную подгруппу M_1, не сопряженную с M. Как и выше, можно показать, что $M_1^{t_1} \leq A$ для некоторого $t_1 \in T$. Ясно, что $M^t \neq M_1^t$. Тогда $T = \langle M^t, M_1^t \rangle \leq A$, а значит, $G = AT = A$; противоречие. Отсюда T — циклическая группа и $M \leq A$. Следовательно, $|G : A| = |T : A \cap T| = |T : M|$ простое. Аналогично можно доказать второе утверждение.

(5) Очевидно, что T^x — минимальное добавление к A в G. Пусть T_1 — подгруппа в T^x. Покажем, что A вполне T^x-перестановочна с T_1 в G. Пусть $A, T_1 \leq D \leq G$. Поскольку $G = AT$, имеем $x = at$ для некоторых $a \in A$, $t \in T$. Отсюда $T^x = T^a$. Заметим, что $T_1^{a^{-1}} \leq T$ и $A = A^{a^{-1}}$, $T_1^{a^{-1}} \leq D^{a^{-1}}$. Ввиду предположений и леммы 2.1(2) для некоторого $d \in D \cap T$ имеем

$$
\begin{aligned}
A(T_1^{a^{-1}})^{d^{a^{-1}}} &= (T_1^{a^{-1}})^{d^{a^{-1}}}A \\
&= A(ad^{-1}a^{-1})(aT_1a^{-1})(ad^{-1}a^{-1}) = Ad^{-1}T_1da^{-1} = a(Ad^{-1}T_1d)a^{-1}.
\end{aligned}
$$

Тем самым $Ad^{-1}T_1d = d^{-1}T_1dA$. Значит, A вполне T^x-перестановочна с T_1 в G. Итак, $T^x \in T_c(A)$. Аналогично можно показать, что если $T \in T(A)$, то $T^x \in T(A)$.

Лемма 2.4 [8, теорема 24.2]. *Пусть* $\mathscr{F}$ *— локальная формация,* G *— группа и* $G^{\mathscr{F}}$ *разрешима. Если* $G^{\mathscr{F}} \neq 1$ *и каждая* $\mathscr{F}$*-анормальная максимальная подгруппа в* G *принадлежит* $\mathscr{F}$*, то справедливы следующие утверждения.*

1. $G^{\mathscr{F}}$ *—* p*-подгруппа в* G *для некоторого* p*, простого делителя* $|G|$.
2. $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ *— минимальная нормальная подгруппа в* $G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$.
3. *Если* $G^{\mathscr{F}}$ *абелева, то* $G^{\mathscr{F}}$ *— элементарная абелева* p*-группа.*
4. *Если* $p > 2$*, то степень* $G^{\mathscr{F}}$ *равна* p*. Если* $p = 2$*, то степень* $G^{\mathscr{F}}$ *равна* 2 *или* 4.

5. $\Phi(G) \subseteq Z_{\mathscr{F}}(G)$.

Лемма 2.5 [4, лемма 3.3]. *Пусть H — неабелева минимальная нормальная подгруппа в G. Пусть M — максимальная подгруппа в G такая, что $|G : M| = p$ простое. Если $H \nsubseteq M$, то H — простая группа и $|H : M \cap H| = p$.*

Лемма 2.6 [4, лемма 3.5]. *Пусть G — группа с подгруппой M и T такова, что $|G : M|$ и $|G : T|$ различные простые. Тогда G не является простой.*

Лемма 2.7 [5, лемма 3.1]. *Пусть N и L — нормальные подгруппы группы G такие, что P/L является силовской p-подгруппой в NL/L, и M/L — максимальная подгруппа в P/L. Если P_p — силовская p-подгруппа в $P \cap N$, то P_p — силовская p-подгруппа в N такая, что $D = M \cap N \cap P_p$ является максимальной подгруппой P_p и $M = LD$.*

3. Группы, в которых минимальные подгруппы или максимальные подгруппы силовских подгрупп вполне *c*-полуперестановочны

Лемма 3.1. *Пусть P — минимальная нормальная p-подгруппа в G. Если каждая подгруппа порядка p в P вполне c-полуперестановочна в G, то P — группа порядка p.*

Доказательство. Пусть D — силовская p-подгруппа в G. Тогда $P \cap Z(D) \neq 1$. Пусть L — подгруппа в $P \cap Z(D)$ порядка p. Так как L вполне c-полуперестановочна в G, существует минимальное добавление T к L в G такое, что $G = LT$ и для любого простого $q \in \pi(T)$ с $q \neq p$ существует силовская q-подгруппа Q в T такая, что $LQ = QL$. Ясно, что $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Так как L субнормальна в LQ и L — силовская p-подгруппа в LQ, то L нормальна в LQ. Итак, $Q \leq N_G(L)$. С другой стороны, $D \leq N_G(L)$. Ввиду произвольности выбора q будет $L \trianglelefteq G$. Так как P — минимальная нормальная подгруппа в G, имеем $P = L$. Тем самым P — циклическая подгруппа порядка p.

Лемма 3.2. *Пусть G — группа. Если каждая минимальная подгруппа в G вполне c-полуперестановочна в G и каждая силовская 2-подгруппа в G абелева, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Допустим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка.

Очевидно, что условия наследуются всеми собственными подгруппами G. Тем самым G — минимальная не сверхразрешимая группа. Поэтому согласно лемме 2.4 и [9, теорема 3.11.8]

1) G имеет нормальную силовскую p-подгруппу P для некоторого простого делителя p числа $|G|$;

2) $P/\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi(P)$;

3) если P абелева, то $\Phi(P) = 1$;

4) если $p > 2$, то степень P равна p, если $p = 2$, то степень P равна 2 или 4;

5) $P/\Phi(P)$ не циклическая.

Если $p = 2$, то согласно предположениям P является элементарной абелевой p-группой. Таким образом, в любом случае степень P равна p. Так как каждая минимальная подгруппа в G вполне c-полуперестановочна в G, по лемме 2.3 находим, что каждая минимальная подгруппа в $P/\Phi(P)$ вполне c-полуперестановочна в $G/\Phi(P)$. Отсюда $P/\Phi(P)$ — циклическая подгруппа порядка p ввиду леммы 3.1. Это противоречит тому, что $P/\Phi(P)$ не циклическая. Лемма доказана.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая класс $\mathscr{U}$ всех сверхразрешимых групп, и G — группа. Тогда $G \in \mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа N в G такая, что $G/N \in \mathscr{F}$, каждая минимальная подгруппа в N вполне c-полуперестановочна в G и каждая силовская 2-подгруппа в N абелева.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность.

Предположим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка. Так как $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, имеем $G^{\mathscr{F}} \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть M — $\mathscr{F}$-анормальная максимальная подгруппа в G. Тогда $G = MG^{\mathscr{F}}$. Поскольку $G/G^{\mathscr{F}} \cong M/(M \cap G^{\mathscr{F}}) \in \mathscr{F}$, получаем $M^{\mathscr{F}} \subseteq G^{\mathscr{F}} \subseteq N$. Согласно лемме 2.3 M и $M \cap G^{\mathscr{F}}$ удовлетворяют условиям теоремы. Ввиду выбора G имеем $M \in \mathscr{F}$. С другой стороны, ввиду леммы 3.2 $G^{\mathscr{F}}$ — разрешимая группа. Используя лемму 2.4 (или теорему 3.4.2 из [9]), получим, что

1) $G^{\mathscr{F}}$ — p-подгруппа для некоторого p, являющегося простым делителем $|G|$;

2) $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$;

3) если $G^{\mathscr{F}}$ абелева, то $G^{\mathscr{F}}$ — элементарная абелева p-группа;

4) если $p > 2$, то степень $G^{\mathscr{F}}$ равна p, если $p = 2$, то степень $G^{\mathscr{F}}$ равна 2 или 4;

5) $\Phi(G) \subseteq Z_{\mathscr{F}}(G)$.

Во-первых, покажем, что $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ — циклическая подгруппа порядка p. В самом деле, ввиду свойства 2 $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ — минимальная нормальная p-подгруппа в $G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$. По лемме 2.3 каждая минимальная подгруппа группы $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ вполне c-полуперестановочна в $G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$. Из леммы 3.1 вытекает, что $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ — циклическая подгруппа порядка p.

Докажем теперь, что M — дополнение к $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ в G, т. е. $G = MG^{\mathscr{F}}$ и $M \cap G^{\mathscr{F}} \leq \Phi(G^{\mathscr{F}})$. Действительно, так как $G = MG^{\mathscr{F}}$, достаточно показать, что $M \cap G^{\mathscr{F}} \leq \Phi(G^{\mathscr{F}})$. Для $M \cap G^{\mathscr{F}} \trianglelefteq M$ будет $(M \cap G^{\mathscr{F}})\Phi(G^{\mathscr{F}})/\Phi(G^{\mathscr{F}}) \trianglelefteq G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$. Из минимальности $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ получаем, что $M \cap G^{\mathscr{F}} = G^{\mathscr{F}}$ или $M \cap G^{\mathscr{F}} \leq \Phi(G^{\mathscr{F}})$. Если $M \cap G^{\mathscr{F}} = G^{\mathscr{F}}$, то $G^{\mathscr{F}} \leq M$, откуда $G = G^{\mathscr{F}}M = M$; противоречие. Тем самым $M \cap G^{\mathscr{F}} \leq \Phi(G^{\mathscr{F}})$.

Согласно [1, A, (15.5)] имеем $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}}) \cong \mathrm{Soc}(G/M_G) = \overline{H}$ и $C_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{H}$, где $\overline{G} = G/M_G$. Следовательно, $\overline{H}$ — циклическая подгруппа порядка p и $\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{G}/\overline{H} \lesssim \mathrm{Aut}(\overline{H})$ — циклическая подгруппа, порядок которой делит $p-1$. Таким образом, $G/M_G \in \mathscr{U} \subseteq \mathscr{F}$, откуда $G/M_G \cap G^{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$. Значит, $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Следствие 3.4. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа N в G такая, что G/N сверхразрешима, каждая минимальная подгруппа в N вполне c-полуперестановочна в G и каждая силовская 2-подгруппа в N абелева.*

Теорема 3.5. *Пусть p — нечетный простой делитель порядка группы G и P — силовская p-подгруппа в G. Если $N_G(P)$ p-нильпотентна и каждая максимальная подгруппа в P вполне c-полуперестановочна в G, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Допустим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка. Докажем следующие утверждения.

(1) $O_{p'}(G) = 1$.

В самом деле, если $O_{p'}(G) \neq 1$, то можно рассмотреть фактор-группу $G/O_{p'}(G)$. Ясно, что $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ — силовская p-подгруппа в $G/O_{p'}(G)$ и

$$N_{G/O_{p'}(G)}(PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)) = N_G(P)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$$

нильпотентна. Пусть $P_1O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ — максимальная подгруппа в группе $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ такая, что P_1 — максимальная подгруппа в P. Так как P_1 вполне c-полуперестановочна в G, ввиду леммы 2.3 $P_1O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ вполне c-полуперестановочна в $G/O_{p'}(G)$. Тем самым предположения выполнены для $G/O_{p'}(G)$. Из минимальности порядка G заключаем, что $G/O_{p'}(G)$ p-нильпотентна. Значит, G p-нильпотентна; противоречие.

(2) Если M — собственная подгруппа в G и $P \leq M < G$, то M p-нильпотентна.

Легко увидеть, что $N_M(P) \leq N_G(P)$ и тем самым $N_M(P)$ p-нильпотентна. Применяя лемму 2.3, немедленно выводим, что M удовлетворяет предположениям. В силу выбора G получаем, что M p-нильпотентна.

(3) $G = PQ$, где Q — некоторая силовская q-подгруппа в G с $q \neq p$.

Поскольку G не является p-нильпотентной, согласно [10, следствие] существует характеристическая подгруппа H в P такая, что $N_G(H)$ не будет p-нильпотентной. Так как $N_G(P)$ p-нильпотентна, можно выбрать характеристическую подгруппу H в P такую, что $N_G(H)$ не будет p-нильпотентной, хотя $N_G(K)$ p-нильпотентна для всякой характеристической подгруппы K в P с $H < K \leq P$. Поскольку $N_G(H) \geq N_G(P)$ и $N_G(H)$ не будет p-нильпотентной, получим $N_G(P) < N_G(H)$. Из утверждения (2) заключаем, что $N_G(H) = G$, откуда $O_p(G) \neq 1$ и $N_G(K)$ p-нильпотентна для всякой характеристической подгруппы K в P такой, что $O_p(G) < K \leq P$. Вновь используя результат Томпсона [10, следствие], находим, что $G/O_p(G)$ p-нильпотентна, поэтому G p-разрешима со следующим верхним $p'p$-рядом:

$$1 < O_p(G) < O_{pp'}(G) < O_{pp'p}(G) = G.$$

Так как G p-разрешима, для любого $q \in \pi(G)$ такого, что $q \neq p$, существует силовская q-подгруппа Q группы G такая, что $G_1 = PQ$ — подгруппа в G. Привлекая утверждение (2), получаем, что G_1 p-нильпотентна, если $G_1 < G$. Отсюда $Q \leq C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$; противоречие. Итак, доказано, что $G = PQ$. Это доказывает утверждение (3). Следовательно, G — разрешимая группа.

(4) Теперь используем предыдущие утверждения для доказательства теоремы. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G с $N \leq O_p(G)$. Известно, что фактор-группа G/N удовлетворяет условиям теоремы. Для P/N, силовской p-подгруппы в G/N, и p-нильпотентной $N_{G/N}(P/N) = N_G(P)N/N$ имеем, что G/N p-нильпотентна.

Так как класс всех p-нильпотентных групп является насыщенной формацией, можно считать, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G) \nsubseteq \Phi(G)$. Далее, согласно [11, III, лемма 3.3] для каждой максимальной подгруппы M в P имеем $P = NM$. Ввиду предположения для некоторого $x \in G$ будет $E = MQ^x = Q^xM$ и тем самым $NE = G$. Из минимальности N вытекает, что $|N| = p$. Так как $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$, видим, что

$$G/N = N_G(N)/C_G(N) \lesssim \mathrm{Aut}(N),$$

а значит, G/N циклическая. Следовательно, $N = P$, т. е. P нормальна в G. Отсюда $N_G(P) = G$ p-нильпотентна. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 3.6. *Пусть N — нормальная подгруппа в G и p — нечетный простой делитель порядка группы N. Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая класс $\mathscr{G}_{p'}\mathscr{N}_p$ всех p-нильпотентных групп. Тогда $G \in \mathscr{F}$ в том и только в том случае, если $G/N \in \mathscr{F}$, $N_G(P)$ p-нильпотентна и каждая максимальная подгруппа в P вполне c-полуперестановочна в G, где P — силовская p-подгруппа в N.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Ясно, что $N_N(P)$ p-нильпотентна и всякая максимальная подгруппа в P вполне c-полуперестановочна в N. По теореме 3.5 N p-нильпонтентна. Пусть теперь H — нормальная холлова p'-подгруппа в N. Если $H \neq 1$, то, поскольку $H \operatorname{char} N \trianglelefteq G$, имеем $H \triangleleft G$. Покажем, что G/H удовлетворяет всем условиям следствия. Действительно, $N/H \trianglelefteq G/H$, $(G/H)/(N/H) \cong G/N \in \mathscr{F}$ и $N_{G/H}(HP/H) = N_G(P)H/H$ p-нильпотентна. Пусть P_1H/H — максимальная подгруппа в PH/H, где P_1 — максимальная подгруппа в P. Так как P_1 вполне c-полуперестановочна в G, то по лемме 2.3 P_1H/H вполне c-полуперестановочна в G/H. По индукции выводим, что $G/H \in \mathscr{F}$.

Пусть f_i $(i = 1, 2)$ — канонические формационные функции такие, что $\mathscr{G}_{p'}\mathscr{N}_p = LF(f_1)$ и $\mathscr{F} = LF(f_2)$ соответственно. Тогда ясно, что $G/C_G(K_1/K_2) \in f_1(q)$ для каждого главного фактора K_1/K_2 в G с $K_1 \leq H$ и каждого простого q, делящего порядок $|K_1/K_2|$ (см. [9, с. 98, пример 2]). Поскольку $\mathscr{G}_{p'}\mathscr{N}_p \subseteq \mathscr{F}$, по [9, следствие 3.1.16] находим, что всякий главный фактор K_1/K_2 с $K_1 \leq H$ является f_2-центральным. Поэтому так как $G/H \in \mathscr{F}$, получаем, что $G \in \mathscr{F}$. Тем самым можно считать, что $H = 1$ и $N = P$. В таком случае согласно предположениям $N_G(P) = G$ p-нильпотентна и, следовательно, $G \in \mathscr{F}$. Доказательство закончено.

4. Группы, в которых максимальные подгруппы или максимальные подгруппы силовских подгрупп c-полуперестановочны

Теорема 4.1. *Пусть $N \trianglelefteq G$. Предположим, что каждая максимальная подгруппа в G, не содержащая N, c-полуперестановочна в G. Тогда N сверхразрешима.*

Доказательство. Допустим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка.

Пусть H — минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в подгруппе N, и пусть M/H — максимальная подгруппа в G/H такая, что $N/H \nsubseteq M/H$. Тогда M — максимальная подгруппа в G такая, что $N \nsubseteq M$. Отсюда согласно предположениям M c-полуперестановочна в G. Используя лемму 2.3, видим, что M/H c-полуперестановочна в G/H. Ввиду выбора G заключаем, что N/H сверхразрешима. Допустим, что N содержит минимальную нормальную подгруппу L в G, отличную от H. Тогда $N \cong N/1 \cong N/(L \cap H)$ — сверхразрешимая группа. Однако это противоречит выбору G. Отсюда H — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в N. Очевидно, $H \nsubseteq \Phi(G)$.

Покажем, что H — абелева группа. Допустим, что это не так. Поскольку $H \nsubseteq \Phi(G)$, существует максимальная подгруппа M в G такая, что $H \nsubseteq M$. Отсюда $N \nsubseteq M$ и тем самым M c-полуперестановочна в G согласно предположению. По лемме 2.3 $|G : M| = p$ для некоторого простого p. Используя лемму 2.5, находим, что H — простая группа и $|H : M \cap H| = p$. Пусть H_p — силовская

p-подгруппа в H и $N_1 = N_G(H_p)$. Тогда, используя аргумент Фраттини, имеем $G = HN_1$. Так как H — неабелева минимальная нормальная подгруппа в G, то $H_p \neq H$ и $N_1 \neq G$. Пусть K — максимальная подгруппа в G такая, что $N_1 \subseteq K$. Тогда $H \nsubseteq K$ и, значит, K c-полуперестановочна в G согласно предположению. Пусть P — силовская p-подгруппа в G такая, что $H_p \subseteq P$. Тогда $H_p = H \cap P \lhd P$ и $P \subseteq N_1$. Тем самым $p \nmid |G : K|$. Если q — простое число такое, что $q \mid |G : K|$, то $q \neq p$ и $|G : K| = q$ по лемме 2.3. Из леммы 2.5 следует, что $|H : K \cap H| = q$. Однако согласно лемме 2.6 H — не простая группа. Полученное противоречие показывает, что H — абелева p-группа для какого-то простого p.

Докажем теперь, что $|H| = p$. Действительно, пусть $MH = G$, где M — максимальная подгруппа в G. Тогда, очевидно, $M \cap H = 1$, так что $|H| = |G : M|$. Однако, как и выше, можно заметить, что $|G : M|$ простое. Отсюда $|H| = p$. Иначе говоря, H циклическая, а значит, Nсверхразрешима; противоречие. Теорема доказана.

Следствие 4.2. *Если группа G имеет максимальную подгруппу, не являющуюся c-полуперестановочной в G, то пересечение всех таких подгрупп сверхразрешимо.*

Доказательство. Пусть Ω — множество всех максимальных подгрупп в G, не c-полуперестановочных в G. Пусть $N = \bigcap\limits_{M \in \Omega} M$. Тогда $N \operatorname{char} G$ и тем самым $N \trianglelefteq G$. Если M — максимальная подгруппа в G, не содержащая N, то, очевидно, M c-полуперестановочна в G. По теореме 4.1 N должна быть сверхразрешима. Следствие доказано.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая класс $\mathscr{U}$ всех сверхразрешимых групп. Группа G входит в $\mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда G имеет разрешимую нормальную подгруппу H такую, что $G/H \in \mathscr{F}$ и каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы в H c-полуперестановочна в G.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность.

Допустим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка.

(1) Если R — минимальная нормальная подгруппа в G, то $G/R \in \mathscr{F}$.

Действительно, RH/R — нормальная разрешимая подгруппа в G/R такая, что фактор-группа

$$(G/R)/(RH/R) \cong G/RH \cong (G/H)/RH/H$$

принадлежит $\mathscr{F}$. Пусть P/R — силовская p-подгруппа в RH/R и M/R — максимальная подгруппа в P/R. Если P_p — силовская p-подгруппа в $P \cap H$, то по лемме 2.7 P_p — силовская p-подгруппа в H, $L = M \cap H \cap P_p$ — максимальная подгруппа в P_p и $M = RL$. Тем самым согласно предположению L c-полуперестановочна в G. По лемме 2.3 $M/R = LR/R$ c-полуперестановочна в G/R. Это показывает, что условия теоремы наследуются группой G/R. Отсюда выбор G влечет $G/R \in \mathscr{F}$.

(2) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу R, и

$$R = C_G(R) = O_p(G) = F(G) \nsubseteq \Phi(G).$$

Так как $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, исходя из (1) находим, что (2) выполнено.

(3) $|R| = p$. Допустим, что $|R| = p^\alpha$ для некоторого натурального α. Пусть P — силовская p-подгруппа в G. Так как $R \nsubseteq \Phi(G)$, имеем $R \nsubseteq \Phi(P)$. Поэтому

существует максимальная подгруппа P_1 в P такая, что $R \nsubseteq P_1$. Для $R \subseteq H$ имеем, что $P_1 \cap H$ — максимальная подгруппа некоторой силовской p-подгруппы в H. Тем самым согласно предположениям найдется минимальное добавление T к $P_1 \cap H$ в G такое, что для любого $q \in \pi(G)$ такого, что $q \neq p$ и $Q \in \mathrm{Syl}_q(T)$, будет $(P_1 \cap H)Q^x = Q^x(P_1 \cap H)$ для некоторого $x \in T$. Очевидно, что Q также является силовской q-подгруппой в G. Пусть $Q_1 = Q^x$. Тогда $(P_1 \cap H)Q_1 = Q_1(P_1 \cap H)$ и $P_1 \cap H$ — силовская q-подгруппа в $(P_1 \cap H)Q_1$. Отсюда

$$R \cap P_1 = R \cap (P_1 \cap H)Q_1 \lhd (P_1 \cap H)Q_1.$$

Имеем также $R \cap P_1 \lhd P$. Это показывает, что $R \cap P_1 \lhd G$. Однако R — минимальная нормальная подгруппа в G, так что $R \cap P_1 = 1$. Итак, $|R| = p$.

(4) Окончательное противоречие.

Так как $\mathscr{F}$ является насыщенной формацией, содержащей $\mathscr{U}$, она имеет формационную функцию такую, что $\mathscr{A}(p-1) \subseteq f(p)$ для любого простого p. Поскольку $G/R = G/C_G(R) \in \mathscr{A}(p-1) \subseteq f(p)$ и $G/N \in \mathscr{F}$, то $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Следствие 4.4. *Пусть G — разрешимая группа. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы в G c-полуперестановочна в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.5. *Пусть G — группа. Если производная группа G' группы G разрешима и каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы в G' c-полуперестановочна в G, то G сверхразрешима.*

Теорема 4.6. *Пусть G — разрешимая группа. Если для любого $p \in \pi(G)$ существует $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ такое, что*

(i) *$N_G(P)/C_G(P)$ — p-группа,*

(ii) *любая максимальная подгруппа в P c-полуперестановочна в G,*

то G нильпотентна.

Доказательство. Допустим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка. Докажем следующие утверждения.

(1) Для любой силовской p-подгруппы P^* в G выполнены оба условия (i) и (ii).

Действительно, по теореме Силова найдется элемент $x \in G$ такой, что $P^* = P^x$. Так как

$$N_G(P^*) = N_G(P^x) = N_{G^x}(P^x) = (N_G(P))^x$$

и

$$C_G(P^*) = C_G(P^x) = C_{G^x}(P^x) = (C_G(P))^x,$$

то $N_G(P^*)/C_G(P^*) \cong N_G(P)/C_G(P)$ — p-группа. Допустим, что $P_1^* < \cdot P^* = P^x$. Тогда $(P_1^*)^{x^{-1}} < \cdot P$. По условию теоремы $(P_1^*)^{x^{-1}}$ c-полуперестановочна в G, тем самым P_1^* c-полуперестановочна в G по лемме 2.3.

(2) G сверхразрешима по следствию 4.4. Отсюда если q — наибольший простой множитель $|G|$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, то $Q \trianglelefteq G$.

(3) Если N — минимальная нормальная подгруппа в G, то G/N удовлетворяет условиям и, значит, G/N нильпотентна.

Рассмотрим $\overline{G} = G/N$. Пусть $\overline{P} \in \mathrm{Syl}_p(\overline{G})$. Существует силовская p-подгруппа P в G такая, что $\overline{P} = PN/N$. Тогда $N_{\overline{G}}(\overline{P}) = N_G(P)N/N$. Поскольку $C_{\overline{G}}(\overline{P}) \geq C_G(P)N/N$, находим, что $N_{\overline{G}}(\overline{P})/C_{\overline{G}}(\overline{P})$ — p-подгруппа. Предположим, что N — r-группа и $P_1/N < \cdot PN/N$. Если $r = p$, то $N \leq P$.

Значит, P_1/N — максимальная подгруппа в $PN/N = P/N$, и, следовательно, $P_1 < \cdot P$. Ввиду (ii) P_1 c-полуперестановочна в G. По лемме 2.3 P_1/N c-полуперестановочна в G/N. Если $r \neq p$, то $P_1 = P_1 \cap PN = (P_1 \cap P)N$. Легко видеть, что $P_1 \cap P < \cdot P$. Тем самым $P_1 \cap P$ c-полуперестановочна в G, а тогда P_1/N c-полуперестановочна в G/N по лемме 2.3. Поэтому G/N удовлетворяет условиям. В силу выбора G получаем, что G/N нильпотентна.

(4) $N = Q$.

Так как класс всех нильпотентных групп является насыщенной формацией, N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Следовательно, $F(G) = N = C_G(N)$. Поскольку $Q \leq F(G) = N$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, получаем, что $N = Q$ и $Q \leq C_G(Q)$. В силу условия (i) $N_G(Q)/C_G(Q)$ является q-группой, поэтому $N_G(Q) = C_G(Q) = G$. Значит, $Q \leq Z(G)$. Так как G/Q нильпотентна, то $G/Z(G) \cong (G/Q)/(Z(G)/Q)$ нильпотентна. Отсюда G нильпотентна. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 4.7. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая класс $\mathscr{U}$ всех сверхразрешимых групп, и G — группа. Тогда $G \in \mathscr{F}$ в том и только в том случае, если G имеет разрешимую нормальную подгруппу H такую, что $G/H \in \mathscr{F}$ и каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы в $F(H)$ c-полуперестановочна в G.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность.

Предположим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть P — произвольная силовская p-подгруппа в $F(H)$. Тогда $P \operatorname{char} F(H) \lhd G$, так что $P \lhd G$. Разобьем доказательство на несколько шагов.

(1) $P \cap \Phi(G) = 1$.

Если это не так, то $1 \neq P \cap \Phi(G) = R \lhd G$. Ясно, что G/R удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, $(G/R)/(H/R) \cong G/H \in \mathscr{F}$. Пусть $F(H/R) = T/R$. Тогда $F(H) \subseteq T$. С другой стороны, так как $R \subseteq \Phi(G)$, то T нильпотентна. Отсюда $T \subseteq F(H)$ и $F(H)/R = F(H/R)$. Пусть P_1/R — максимальная подгруппа в P/R. Тогда P_1 — максимальная подгруппа в P. Согласно предположениям P_1 c-полуперестановочна в G. По лемме 2.3 P_1/R c-полуперестановочна в G/R. Пусть Q/R — максимальная подгруппа силовской q-подгруппы в $F(H)/R$, где $q \neq p$. Тогда $Q = Q_1R$, где Q_1 — максимальная подгруппа силовской q-подгруппы в $F(H)$. Согласно предположениям Q_1 c-полуперестановочна в G и тем самым $Q/R = Q_1R/R$ c-полуперестановочна в G/R по лемме 2.3. В силу выбора G имеем $G/R \in \mathscr{F}$. Поскольку $G/\Phi(G) \cong (G/R)/(\Phi(G)/R)$ и $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, то $G \in \mathscr{F}$; противоречие.

(2) $P = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_m$, где R_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ — минимальная нормальная подгруппа в G простого порядка.

Так как $P \lhd G$ и $P \cap \Phi(G) = 1$, легко увидеть, что $P = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_m$, где R_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ — минимальная нормальная подгруппа в G. Следовательно, P — абелева группа. Докажем, что R_i порядка p.

Поскольку $R_i \nsubseteq \Phi(G)$, найдется максимальная подгруппа M в G такая, что $G = MR_i$ и $M \cap R_i = 1$. Допустим, что M_p — силовская p-подгруппа в M. Тогда $G_p = M_pR_i = M_pP$ — силовская p-подгруппа в G. Пусть H_1 — максимальная подгруппа в G_p, содержащая M_p, тогда $P_1 = H_1 \cap P$ — максимальная подгруппа в P. Согласно предположениям P_1 c-полуперестановочна в G. Значит, существует $T \in T(P_1)$ такое, что $G = P_1T$ и для любого $q \in \pi(T)$ с $q \neq p$ существует $Q \in \operatorname{Syl}_q(T)$ такая, что $P_1Q = QP_1$. Так как $P_1 = P_1(P \cap Q) = P \cap P_1Q \trianglelefteq P_1Q$, имеем $Q \leq N_G(P_1)$. С другой стороны, поскольку P абелева и $P_1 = P \cap H_1 \trianglelefteq H_1$, то $P_1 \triangleleft PH_1 = G_p$. Это показывает, что $P_1 \triangleleft G$ и тем самым $P_1 M = MP_1$. Так как $M < \cdot G$, получаем $P_1 M = G$ или $P_1 M = M$.

Если $P_1 M = G$, то $G = H_1 M$. Поскольку $H_1 = H_1 \cap G_p = H_1 \cap M_p R_i = M_p(H_1 \cap R_i)$, имеем $G = (H_1 \cap R_i)M = MR_i$. Так как $M \cap R_i = 1$, то $H_1 \cap R_i = R_i$ и тем самым $R_i \subseteq H_1$. Следовательно, $G_p = M_p R_i \subseteq H_1$; противоречие. Итак, можно считать, что $P_1 M = M$. В таком случае $P_1 \subseteq M$. Поскольку $M \cap R_i = 1$, то $P_1 \cap R_i = 1$. Отсюда $|R_i| = |P : P_1| = p$. Значит, R_i — циклическая группа порядка p.

(3) $G/F(H) \in \mathscr{F}$ и окончательное противоречие.

Из утверждения (2) видим, что $F(H) = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$, где N_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — минимальная нормальная подгруппа в G простого порядка. Так как $G/C_G(N_i)$ изоморфна подгруппе $\mathrm{Aut}(N_i)$, то $G/C_G(N_i)$ циклическая. Отсюда $G/\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_G(N_i)\right) \in \mathscr{F}$. Очевидно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_G(N_i) = C_G(F(H))$. Значит, $G/C_G(F(H)) \in \mathscr{F}$. Следовательно, $G/C_H(F(H)) = G/(H \cap C_G(F(H))) \in \mathscr{F}$. Поскольку $F(H)$ абелева, то $F(H) = C_H(F(H))$. Поэтому $G/F(H) \in \mathscr{F}$ и тем самым по теореме 4.3 $G \in \mathscr{F}$; полученное противоречие завершает доказательство.

Следствие 4.8. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в G есть нормальная разрешимая подгруппа H такая, что G/H сверхразрешима и каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы в $F(H)$ c-полуперестановочна в G.*

Следствие 4.9. *Пусть G — разрешимая группа. Если все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы в $F(G')$ c-полуперестановочны в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.10. *Пусть G — разрешимая группа. Если все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы в $F(G)$ c-полуперестановочны в G, то G сверхразрешима.*

Замечание. В общем случае утверждения, обратные сформулированным в следствиях 4.4, 4.5, 4.9 и 4.10, неверны. Например, пусть G — прямое произведение группы S_3 и циклической группы Z_3 порядка 3. Эта группа сверхразрешима и некоторая подгруппа в G порядка 3 не перестановочна с любой 2-подгруппой в G.

Благодарности. Авторы признательны рецензенту за полезные советы. Некоторые формулировки и доказательства были изменены по предложению рецензента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. *Ore O.* Contributions to the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. V. 5, N 2. P. 431–460.
3. *Ito N., Szép J.* Uber die Quasinormalteiler endlicher Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. V. 23. P. 168–170.
4. *Guo W., Shum K. P., Skiba A.* Conditionally permutable подгруппы and supersolubility of finite groups // Southeast Asian Bull Math. 2005. V. 29, N 2. P. 493–510.
5. *Го В., Шам К. П., Скиба А. Н.* G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 433–442.

6. *Guo W., Shum K. P., Skiba A.* H-permutable подгруппы. 2004. P. 1–19. (Preprint / GGUim. F. Skoriny; 9).
7. *Guo W., Shum K. P., Skiba A.* X-Semipermutable subgroups. 2004. P. 1-16. (Preprint / GGUim. F. Skoriny; 10).
8. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
9. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press Kluwer Acad. Publ., 2000.
10. *Thompson J. G.* Normal p-complements for finite groups // J. Algebra. 1964. V. 1, N 1. P. 43–46.
11. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

Статья поступила 24 августа 2005 г.

Bin Hu (Ху Бин), Wenbin Guo (Го Вэнбинь)
Department of Mathematics,
University of Science and Technology of China,
Hefei, 230026, P.R.China
and
Department of Mathematics, Xuzhou Normal University,
Xuzhou, 221116, P.R.China
hubin118@sohu.com, wbguo@pub.xz.jsinfo.net