Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 510.67

ВЛАСТНЫЕ ОРГРАФЫ

С. В. Судоплатов

Аннотация: Определяется понятие властного орграфа и устанавливается, что структура властного орграфа содержится в насыщенной структуре любого неглавного властного типа p, обладающего глобальным свойством попарного пересечения и свойством подобия теорий графовых структур типа p и некоторых его формульных ограничений (такими свойствами обладают все властные типы в известных теориях с конечным (> 1) числом попарно неизоморфных счетных моделей). Описываются структуры транзитивных замыканий насыщенных властных орграфов, образующихся в моделях теорий с неглавными властными 1-типами при условии конечного числа неглавных 1-типов. Доказывается, что структура властного орграфа, рассматриваемая в модели простой теории, индуцирует бесконечный вес, откуда вытекает, что властные орграфы не встречаются в структурах известных классов простых теорий (таких, как суперпростые или конечно базируемые теории), не содержащих теории с конечным (> 1) числом счетных моделей.

Ключевые слова: властный тип, властный орграф, бесконечный вес.

В работе продолжается начатое в [1–3] изучение свойств структур *властных* (или *мощных*) типов, т. е. полных типов $p(\bar{x}) \in S(\varnothing)$ таких, что любая модель данной полной теории, реализующая тип $p(\bar{x})$, реализует любой тип из $S(\varnothing)$. Интерес к исследованию структур властных типов связан с тем, что властные типы присутствуют в любой эренфойхтовой теории (напомним [4], что *эренфойхтовой* называется любая полная теория, имеющая конечное, но большее единицы число попарно неизоморфных счетных моделей).

Отметим основные результаты, представленные в работе. Мы определим понятие властного орграфа, установим его «локальное» присутствие в структуре любого неглавного властного типа p, а также покажем, что при условии $(2, p)$-инвариантности теории структура властного орграфа содержится в ограничении насыщенной структуры на структуру реализаций любого неглавного властного типа, обладающего глобальным свойством попарного пересечения. Далее опишем структуры транзитивных замыканий насыщенных властных орграфов, образующихся в моделях теорий с неглавными властными 1-типами при условии конечного числа неглавных 1-типов. Кроме того, докажем, что структура властного орграфа, рассматриваемая в модели простой теории, индуцирует бесконечный вес. Это означает, что властные орграфы не встречаются в структурах известных классов простых теорий (таких, как суперпростые или конечно базируемые теории), не содержащих эренфойхтовых теорий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00258, 05–01–00411) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–4787.2006.1).

В работе без пояснений используются стандартная теоретико-модельная терминология из [5–7], аппарат теории графов [8], а также понятия и обозначения из работы [9].

Все рассматриваемые теории будут считаться полными и не имеющими конечных моделей.

Орграфом будет называться алгебраическая система $\Gamma = \langle X, Q\rangle$ с одним антисимметричным иррефлексивным двуместным отношением Q. При этом множество X называется множеством *вершин*, а отношение Q — *множеством дуг* орграфа Γ. *Маршрутом* в орграфе Γ называется любая непустая последовательность $S = (a_0, \dots, a_n)$ вершин, для которых выполняется $\Gamma \models Q(a_i, a_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-1$. При этом маршрут S будет также называться (a_0, a_n)-*маршрутом*, а число n — *длиной* маршрута S. *Контуром* в орграфе Γ называется любой (a, a)-маршрут ненулевой длины. Орграф, не имеющий контуров, называется *бесконтурным*.

Отношения Q^n, $n \in \mathbf{Z}$, определим по индукции следующими соотношениями: $Q^0 \rightleftharpoons \mathrm{i}\,d_X$, $Q^1 \rightleftharpoons Q$, $Q^{n+1} \rightleftharpoons Q^n \circ Q$, $Q^{-n} \rightleftharpoons (Q^n)^{-1}$, $n \in \omega$.

Счетный бесконтурный орграф $\Gamma = \langle X, Q\rangle$ называется *властным*, если выполняются следующие условия:

(а) группа автоморфизмов орграфа Γ транзитивна;

(б) формула $Q(x, y)$ эквивалентна в теории $\mathrm{Th}(\Gamma)$ дизъюнкции главных формул;

(в) $\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(\Gamma, a) = \{a\}$ для любой вершины $a \in X$;

(г) $\Gamma \models \forall x, y\, \exists z\, (Q(z, x) \wedge Q(z, y))$ (свойство *попарного пересечения*).

Очевидно, что в классических примерах эренфойхтовых теорий (см., например, [9]) властным является счетный граф с отношением $x < y$, задающим плотный линейный порядок.

В следующем примере теории с тремя счетными моделями, близком к примеру из работы [10], властный орграф также включает отношение $<$.

Пример 1. Пусть $\mathscr{M} = \langle M, \leq\rangle$ — нижняя полурешетка без наименьшего и максимальных элементов такая, что

а) никакие два несравнимых элемента не имеют верхней грани;

б) между любыми двумя различными сравнимыми элементами имеется промежуточный;

в) для любого элемента a существует бесконечное множество попарно несравнимых бóльших элементов, инфимум которого равен a.

Обогатим систему $\mathscr{M}$ константами c_n, $n \in \omega$, такими, что $c_n < c_{n+1}$, $n \in \omega$. Теория T полученной системы имеет ровно три счетные модели: простую, насыщенную, а также простую над реализацией властного типа $p_\infty(x)$, изолируемого множеством формул $\{c_n < x \mid n \in \omega\}$. $\square$

Следующий пример, представленный в работах [11, 12], определяет стабильную теорию *ациклической парной функции* со структурой властного орграфа.

Пример 2. Пусть M — множество с двумя функциями $f_1, f_2 : M \to M$ такими, что $(f_1, f_2) : M \to M \times M$ — биекция, для которой не существует непустой последовательности $i_1, \dots, i_n$ и элемента $a \in M$ с условием $f_{i_n}(\dots f_{i_1}(a)\dots) = a$. Теория $T \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\langle M; f_1, f_2\rangle)$ стабильна. Рассмотрим *свободный* 1-тип $p \in S^1(T)$, т. е. тип элементов a, для которых

$$f_{i_n}(\dots f_{i_1}(a)\dots) = f_{j_m}(\dots f_{j_1}(a)\dots) \Leftrightarrow i_1 \dots i_n = j_1 \dots j_m.$$

Непосредственно проверяется, что некоторое счетное множество реализаций типа p с отношением, определяемым формулой $(y = f_1(x)) \vee (y = f_2(x))$, образует властный орграф. $\square$

Кроме приведенных примеров достаточно богатый класс властных орграфов образуют бесконтурные орграфы вида $\langle P, Q\rangle = \langle P, \{(p, p') \mid p' = pg_0$ на некоторой линии$\}\rangle$, соответствующие полигонометриям $\mathrm{pm}(G, \langle P, L, \in\rangle, g_0)$ на проективной плоскости (см. [13, теорема 2.1]).

Пусть $\mathscr{M}$ — модель теории T, $p(\bar{x})$ — полный тип теории T над пустым множеством, $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула теории T, $l(\bar{x}) = l(\bar{y})$. Обозначим через $p(M)$ множество реализаций типа $p(\bar{x})$ в модели $\mathscr{M}$, а через $R^p_\psi(\mathscr{M})$ — бинарное отношение $\{(\bar{a}, \bar{b}) \in (p(M))^2 \mid \mathscr{M} \models \psi(\bar{a}, \bar{b})\}$.

Следующее утверждение показывает, что властные орграфы «локально» присутствуют в структуре любого неглавного властного типа.

Предложение 1. *Если $p(\bar{x})$ — неглавный властный тип теории T и $\mathscr{M}$ — счетная насыщенная модель теории T, то для любой формулы $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ существует формула $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ теории T* (где $l(\bar{x}) = l(\bar{y})$), *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *для любого $\bar{a} \in p(M)$ формула $\psi(\bar{a}, \bar{x})$ эквивалентна дизъюнкции главных формул $\psi_i(\bar{a}, \bar{x})$, $i \leq n$, таких, что $\psi_i(\bar{a}, \bar{x}) \vdash p(\bar{x})$ и из $\models \psi_i(\bar{a}, \bar{b})$ следует, что $\bar{b}$ не полуизолирует $\bar{a}$;*

2) *для любых $\bar{a}, \bar{b} \in p(M)$ существует такой набор $\bar{c}$, что $\models \varphi(\bar{c}) \wedge \psi(\bar{c}, \bar{a}) \wedge \psi(\bar{c}, \bar{b})$.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — реализации типа $p(\bar{x})$ в модели $\mathscr{M}_{\bar{a}}$ такие, что $\bar{b}$ не полуизолирует $\bar{a}$. Поскольку $\mathscr{M}_{\bar{b}} \prec \mathscr{M}_{\bar{a}}$, то для любой реализации $\bar{c} \in M_{\bar{b}}$ найдется главная формула $\chi_{\bar{c}}(\bar{a}, \bar{y})$ такая, что $\models \chi_{\bar{c}}(\bar{a}, \bar{c})$. Перенумеруем все реализации типа $p(\bar{x})$ в модели $\mathscr{M}_{\bar{b}}$: $p(M_{\bar{b}}) = \{\bar{c}_n \mid n \in \omega\}$. Положим $\chi_n(\bar{a}, \bar{y}) \rightleftharpoons \chi_{\bar{c}_n}(\bar{a}, \bar{y})$, $n \in \omega$.

Зафиксируем формулу $\varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ и покажем, что некоторую формулу $\bigvee\limits_{i=0}^{m} \chi_i(\bar{x}, \bar{y})$ можно взять в качестве формулы $\psi(\bar{x}, \bar{y})$. Очевидно, что любая из этих формул удовлетворяет условию 1. Предполагая, что ни одна из указанных формул не удовлетворяет условию 2, по теореме компактности получаем совместность множества

$$\begin{aligned} r(\bar{x}, \bar{y}) \rightleftharpoons\ & p(\bar{x}) \cup p(\bar{x}) \\ & \cup \left\{ \neg\exists\bar{z} \left(\left(\bigvee_{i=0}^{m} \chi_i(\bar{z}, \bar{x}) \right) \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{m} \chi_i(\bar{z}, \bar{y}) \right) \wedge \varphi(\bar{z}) \right) \mid m \in \omega \right\}. \end{aligned}$$

В силу властности типа $p(\bar{x})$ тип $r(\bar{x}, \bar{y})$ реализуется в модели $\mathscr{M}_{\bar{b}}$ посредством некоторых кортежей $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$: $\mathscr{M}_{\bar{b}} \models r(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$. Значит, найдутся формулы $\chi_{\bar{d}_1}(\bar{x}, \bar{y})$ и $\chi_{\bar{d}_2}(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что $\models \chi_{\bar{d}_1}(\bar{a}, \bar{d}_1) \wedge \chi_{\bar{d}_2}(\bar{a}, \bar{d}_2)$, а это противоречит совместности множества $r(\bar{x}, \bar{y})$. Таким образом, множество $r(\bar{x}, \bar{y})$ несовместно, откуда для некоторого m_0 следует несовместность множества

$$p(\bar{x}) \cup p(\bar{x}) \cup \left\{ \neg\exists\bar{z} \left(\left(\bigvee_{i=0}^{m_0} \chi_i(\bar{z}, \bar{x}) \right) \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{m_0} \chi_i(\bar{z}, \bar{y}) \right) \wedge \psi_n(\bar{z}) \right) \mid n \in \omega \right\}.$$

Полагая $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \rightleftharpoons \bigvee\limits_{i=0}^{m_0} \chi_i(\bar{x}, \bar{y})$, получаем требуемое. $\square$

Свойство 2, приведенное в предложении 1, будем называть *локальным свойством попарного пересечения.* Если же для формулы $\psi(\bar{x},\bar{y})$ выполняется более сильное свойство:

$2'$) для любых $\bar{a},\bar{b}\in p(M)$ существует такой набор $\bar{c}\in p(M)$, что $\models \psi(\bar{c},\bar{a})\wedge \psi(\bar{c},\bar{b})$,

то это свойство будем называть *глобальным свойством попарного пересечения* для типа $p(\bar{x})$ относительно формулы $\psi(\bar{x},\bar{y})$.

При наличии формулы $\psi(\bar{x},\bar{y})$, удовлетворяющей свойствам 1 и $2'$, будем называть орграф $\langle p(M), R^p_\psi(\mathscr{M})\rangle$ *предвластным.*

В дальнейшем для простоты будем считать, что p — 1-тип.

Напомним, что теории T_0 и T_1 сигнатур Σ_0 и Σ_1 соответственно называются *подобными*, если для любой модели $M_i\models T_i$, $i=0,1$, существуют формулы теории T_i, определяющие в M_i предикаты, функции и константы сигнатуры Σ_{1-i} таким образом, что соответствующая алгебраическая система сигнатуры Σ_{1-i} является моделью теории T_{1-i}.

Пусть $\mathscr{M}$ — счетная насыщенная модель теории T, имеющей предикатную сигнатуру. Рассмотрим индуцированную системой $\mathscr{M}$ подсистему $p(\mathscr{M})=\langle p(M),\Sigma(T)\rangle$ сигнатуры $\Sigma(T)$ теории T с носителем $p(M)$ и отношениями $R(p(\mathscr{M}))=R(\mathscr{M})\cap(p(M))^{\mu(R)}$, $R\in\Sigma(T)$. Обозначим через T_p теорию $\mathrm{Th}(p(\mathscr{M}))$.

Теория T называется (n,p)-*инвариантной*, если для любой формулы $\psi(\bar{x})$ (где $l(\bar{x})=n$) теории T_p обеднение морлизации теории T_p на сигнатуру $\{R_\psi\}$ подобно обеднению морлизации теории структуры некоторого формульного множества $\varphi(\mathscr{M})$ (где $\varphi\in p$) на ту же самую сигнатуру.

Покажем, что из существования предвластной структуры на множестве реализаций неглавного властного типа p $(2,p)$-инвариантной теории следует существование формулы, определяющей структуру властного орграфа на этом множестве.

Предложение 2. *Если $p(x)$ — неглавный властный тип $(2,p)$-инвариантной теории T и $\langle p(M), R^p_\psi(\mathscr{M})\rangle$ — предвластный орграф, то для некоторой формулы $\theta(x,y)$ с условием $T\vdash\theta(x,y)\to\psi(x,y)$ орграф $\langle p(M), R^p_\theta(\mathscr{M})\rangle$ является властным.*

Доказательство. Из $(2,p)$-инвариантности теории T следует, что можно выбрать главными формулы $R^p_{\chi'_i}(x,y)$, соответствующие в T формулам $\chi_i(x,y)$ таким, что $\psi(a,x)=\bigvee\limits_{i=0}^{m}\chi_i(a,x)$ и формулы $\chi_i(a,x)$ являются главными для любого $a\in p(M)$ и любого $i=1,\ldots,m$. Действительно, элемент a принадлежит простой модели $\mathscr{M}_0$ обеднения морлизации теории T_p на сигнатуру $\{R_\psi\}$. Этой же модели принадлежат некоторые реализации d_i главных формул, соответствующих формулам $\chi_i(a,y)$, $i=0,\ldots,m_0$. Рассмотрим формулы $\chi'_i(x,y)$ сигнатуры $\{R_\psi\}$, соответствующие полным формулам типов $\mathrm{tp}(a\,\hat{}\,d_i)$, $i=0,\ldots,m$. Возьмем в качестве $\theta(x,y)$ формулу теории T, для которой выполняются следующие условия:

1) обеднение морлизации теории структуры некоторого формульного множества $\varphi(\mathscr{M})$ (где $\varphi\in p$) на сигнатуру $\{R_\theta\}$ подобно обеднению морлизации теории T_p на ту же самую сигнатуру;

2) $\vdash(\varphi(x)\wedge\varphi(y))\to\left(\theta(x,y)\leftrightarrow\bigvee\limits_{i=0}^{m}\chi'_i(x,y)\right)$;

3) $\vdash\theta(\bar{x},\bar{y})\to\psi(\bar{x},\bar{y})$.

В силу насыщенности модели $\mathscr{M}$ группа автоморфизмов орграфа $\Gamma = \langle p(M), R^p_\theta(\mathscr{M})\rangle$ транзитивна.

Заметим, что для любого $a \in p(M)$ из $\models \theta(a,b)$ следует $b \in p(M)$ и b не полуизолирует a. Тогда в силу транзитивности отношения полуизолированности орграф Γ является бесконтурным.

Несимметричность отношения полуизолированности SI_p, обусловленная формулой θ, влечет равенство

$$\mathrm{acl}(\{b\}) \cap \bigcup_{n\in\omega} \big(R^p_\theta(\mathscr{M})\big)^n(\Gamma, b) = \{b\}$$

для любого $b \in p(\mathscr{M})$. Действительно, предполагая, что существует элемент

$$d \in \mathrm{acl}(\{b\}) \cap \bigcup_{n\in\omega} \big(R^p_\theta(\mathscr{M})\big)^n(\Gamma, b) \setminus \{b\},$$

получаем, что b полуизолирует d в модели $\mathscr{M}$. Значит, в силу транзитивности отношения полуизолированности элемент b будет полуизолировать a, где $\models \theta(a,b)$ и $a \in p(M)$; противоречие.

Из глобального свойства попарного пересечения для типа $p(\bar{x})$ относительно формулы $\psi(x,y)$ следует это же свойство относительно формулы $\theta(x,y)$, а значит, и свойство попарного пересечения для орграфа Γ. Таким образом, Γ — властный орграф. $\square$

Заметим, что в условиях предложения 2 конечное число неглавных 1-типов влечет соотношение

$$\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup_{n\in\omega} \big(R^p_\theta(\mathscr{M})\big)^n(a, \Gamma) = \{a\} \tag{1}$$

для любой вершины a из орграфа $\Gamma = \langle p(M), R^p_\theta(\mathscr{M})\rangle$.

Действительно, в предположении, что тип $\mathrm{tp}(b/a)$ алгебраичен для некоторого $b \in \big(R^p_\theta(\mathscr{M})\big)^n(\bar{a}, \Gamma)$, $b \neq a$, в исходной теории найдется полуизолирующая формула $\theta(a,y)$ такая, что $\models \theta(a,b) \wedge \exists^{=k}\bar{y}\,\theta(a,y)$ для некоторого $k \in \omega$. Из того, что b не полуизолирует a и число неглавных 1-типов конечно, следует существование кортежа c, реализующего главный тип и такого, что $\models \theta(c,b) \wedge \exists^{=k}\bar{y}\,\theta(c,y)$. Это означает, что в простой модели реализуется неглавный тип $p(x)$; противоречие.

В предположении, что число неглавных $l(\bar{x})$-типов бесконечно, соотношение (1) может не выполняться. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример ω-стабильной теории с неглавным 1-типом $p_0(x)$, имеющим несимметричное отношение полуизолированности посредством формулы $Q(x,y)$ с условием $\mathrm{acl}(\{a\}) = \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(a, \mathscr{M})$ для любой реализации a типа $p_0(x)$.

Пример 3. Обозначим через Ω множество непустых конечных последовательностей $\bar{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$ таких, что $\alpha_i \in \omega$, $i \leq n$, $l(\bar{\alpha}) = \alpha_0 + 2$.

Пусть T_0 — теория сигнатуры $\langle P^{(1)}_{\bar{\alpha}}, Q^{(2)}\rangle_{\bar{\alpha}\in\Omega}$ со следующими аксиомами:

1) если $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'\,\hat{}\,m \in \Omega$, то

$$\vdash (P_{\bar{\alpha}'\,\hat{}\,(m+1)}(x) \to P_{\bar{\alpha}'\,\hat{}\,m}(x)) \wedge \exists^{\geq\omega} x\,(P_{\bar{\alpha}'\,\hat{}\,m}(x) \wedge \neg P_{\bar{\alpha}'\,\hat{}\,(m+1)}(x));$$

2) если $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}'_1\,\hat{}\,0$, $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}'_2\,\hat{}\,0$ — кортежи из Ω и $\bar{\alpha}'_1 \neq \bar{\alpha}'_2$, то

$$\vdash \neg\exists x\,(P_{\bar{\alpha}_1}(x) \wedge P_{\bar{\alpha}_2}(x));$$

3) отношение Q образует график свободного (без циклов) унара с бесконечным числом прообразов у каждого элемента;

4) выполняется

$$\vdash \forall x, y\,((P_{\langle 0,m\rangle}(x) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1\rangle}(x) \wedge Q(x,y)) \to (P_{\langle 0,m\rangle}(y) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1\rangle}(y))),$$

$m \in \omega$;

5) если $\models P_{\langle 0,m\rangle}(a) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1\rangle}(a)$, то множество реализаций формулы $Q(x,a)$ состоит из бесконечного числа реализаций формулы $P_{\langle 0,m\rangle}(x) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1\rangle}(x)$, а также бесконечного числа реализаций формул $P_{\langle 1,k,m\rangle}(x) \wedge \neg P_{\langle 1,k,m+1\rangle}(x)$ для каждого $k \in \omega$;

6) если $\bar{\alpha} = k\,\hat{}\,\bar{\alpha}'\,\hat{}\,l\,\hat{}\,m$ — кортеж из Ω, $k \geq 1$, то

$$\vdash \forall x, y\,((P_{k\,\hat{}\,\bar{\alpha}'\,\hat{}\,l\,\hat{}\,m}(x) \wedge \neg P_{k\,\hat{}\,\bar{\alpha}'\,\hat{}\,l\,\hat{}\,(m+1)}(x) \wedge Q(x,y)) \\ \to (P_{(k-1)\,\hat{}\,\bar{\alpha}'\,\hat{}\,m}(y) \wedge \neg P_{(k-1)\,\hat{}\,\bar{\alpha}'\,\hat{}\,(m+1)}(y))), \quad m \in \omega;$$

7) если $k \neq 0$ и $\models P_{k\,\hat{}\,\bar{\alpha}\,\hat{}\,m}(a) \wedge \neg P_{k\,\hat{}\,\bar{\alpha}\,\hat{}\,(m+1)}(a)$, то множество реализаций формулы $Q(x,a)$ состоит из бесконечного числа реализаций формул

$$P_{(k+1)\,\hat{}\,\bar{\alpha}\,\hat{}\,l\,\hat{}\,m}(x) \wedge \neg P_{(k+1)\,\hat{}\,\bar{\alpha}\,\hat{}\,l\,\hat{}\,(m+1)}(x)$$

для каждого $l \in \omega$.

Построение насыщенной модели, удовлетворяющей аксиомам 1–7, позволяет проверить полноту теории T_0. Ее ω-стабильность вытекает из того, что каждая формула со свободными переменными и без параметров эквивалентна булевой комбинации формул вида $P_{\bar{\alpha}}(x)$, $\bar{\alpha} \in \Omega$, и $\exists z\,(Q^{n_1}(x,z) \wedge Q^{n_2}(y,z))$, $n_1, n_2 \in \omega$. Для типа $p_0(x) \in S^1(\varnothing)$, определяемого множеством формул $\{P_{\langle 0,m\rangle} \mid m \in \omega\}$, отношение полуизолированности несимметрично посредством формулы $Q(x,y)$. Для любого $a \models p_0$ множество реализаций формулы $Q(x,a)$ исчерпывается реализациями типа p_0, а также реализациями неглавных типов $p_{\langle 1,k\rangle}(x) \in S^1(\varnothing)$, определяемых множествами формул $\{P_{\langle 1,k,m\rangle} \mid m \in \omega\}$, $k \in \omega$. В силу того, что отношение Q образует график свободного унара с бесконечным числом прообразов у каждого элемента, для любого элемента a модели $\mathscr{M} \models T_0$ выполняется $\mathrm{acl}(\{a\}) = \mathrm{dcl}(\{a\}) = \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(a, \mathscr{M})$. $\square$

В связи с приведенными выше рассуждениями представляется перспективной проблема описания властных орграфов, обогащаемых до структур неглавных властных 1-типов как в случае конечного числа неглавных 1-типов, так и в случае их бесконечного числа.

Напомним, что частично упорядоченное множество $\langle X, \leq\rangle$ называется *направленным вниз*, если для любых $x, y \in X$ существует $z \in X$ с условиями $z \leq x$ и $z \leq y$.

Укажем основные возможности, которыми исчерпываются структуры транзитивных замыканий властных орграфов, полученных из структур неглавных властных типов $p(\bar{x})$, для которых число неглавных $l(\bar{x})$-типов конечно.

Теорема. *Пусть $\Gamma = \langle X, Q\rangle$ — насыщенный властный орграф, в котором $\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(a,\Gamma) = \{a\}$ для любого $a \in X$. Тогда его транзитивное замыкание $\mathrm{TC}(\Gamma) = \left\langle X, \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n\right\rangle$ изоморфно направленному вниз множеству с транзитивной группой автоморфизмов, имеющему один из следующих порядков:*

(1_α) плотный частичный порядок с максимальными антицепями, содержащими α элементов, $\alpha \in (\omega+1) \setminus \{0\}$;

(2) *частичный порядок с бесконечным числом покрывающих элементов для любого элемента.*

Доказательство. Рефлексивность и транзитивность отношения $\leq$ орграфа $\mathrm{TC}(\Gamma) = \langle X, \leq \rangle$ очевидны. Антисимметричность отношения $\leq$ вытекает из бесконтурности орграфа Γ. Существование в частично упорядоченном множестве $\mathrm{TC}(\Gamma)$ нижних граней для любых двух элементов вытекает из свойства попарного пересечения. Если порядок $\leq$ не является плотным, то бесконечность числа покрывающих элементов для любого элемента $a \in X$ вытекает из условия $\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(a,\Gamma) = \{a\}$, поскольку в этой ситуации совместная формула $a < x \wedge \neg\exists y\,(a < y \wedge y < x)$ не принадлежит алгебраическому типу над элементом a. $\square$

Заметим, что указанные плотные частичные порядки с максимальными антицепями мощности α реализуются заменой каждого элемента в плотном линейном порядке без концевых элементов классом эквивалентности, содержащим α попарно несравнимых элементов.

Отметим, что частичный порядок с бесконечным числом покрывающих элементов над каждым элементом получается лишь из властных орграфов, у которых формула $Q(x, y)$ не является главной.

Действительно, если $Q(x, y)$ — главная формула, то из истинности

$$\models Q(a,b) \wedge Q(a,c) \wedge Q(c,b)$$

для любого элемента a и некоторых элементов b, c и существования a-автоморфизмов, связывающих любые элементы из $Q(a,\Gamma)$, следует, что для любого элемента b из $Q(a,\Gamma)$ найдется элемент c, принадлежащий $Q(a,\Gamma) \cap Q(\Gamma,b)$. Следовательно, в графе $\mathrm{TC}(\Gamma)$ между любыми двумя различными элементами имеется промежуточный элемент.

Таким образом, справедливо

Следствие 1. *Если $\Gamma = \langle X, Q \rangle$ — властный орграф с главной формулой $Q(x, y)$, то отношение $\bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n$ является плотным частичным порядком.*

Заметим, что если отношение $\leq$ в транзитивном замыкании насыщенного властного орграфа $\Gamma = \langle X, Q \rangle$ не является формульно определимым в языке графа Γ (т. е. если длины кратчайших маршрутов не ограничены), то по теореме компактности в $\mathrm{TC}(\Gamma)$ над каждым элементом a имеется бесконечная антицепь, принадлежащая $Q(a,\Gamma)$. Таким образом, из теоремы вытекает

Следствие 2. *Пусть $\Gamma = \langle X, Q \rangle$ — насыщенный властный орграф с неограниченными длинами кратчайших маршрутов и такой, что*

$$\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup_{n\in\omega} Q^n(a,\Gamma) = \{a\}$$

для любого $a \in X$. Тогда его транзитивное замыкание $\mathrm{TC}(\Gamma) = \Big\langle X, \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n \Big\rangle$ изоморфно направленному вниз множеству с транзитивной группой автоморфизмов, имеющему один из следующих порядков:

(1) *плотный частичный порядок с бесконечными антицепями;*

(2) *частичный порядок с бесконечным числом покрывающих элементов для любого элемента.*

Отметим, что наряду с доказанной необходимостью локального наличия властных орграфов в структурах неглавных властных типов открытым является вопрос о достаточности, т. е. о возможности обогащения любого властного орграфа до структуры властного типа. Также открытым остается вопрос о существовании властного орграфа Γ, теория которого $\mathrm{Th}(\Gamma)$ проста и мала.

Следующее утверждение показывает, что властные орграфы не встречаются в структурах известных классов простых теорий, не содержащих эренфойхтовых теорий.

Напомним [6], что тип $p(\bar{x})$ *имеет бесконечный собственный вес*, если существуют реализация $\bar{a}$ типа $p(\bar{x})$ и бесконечная независимая последовательность $(\bar{a}_n)_{n\in\omega}$ реализаций типа $p(\bar{x})$ такая, что кортежи $\bar{a}$ и $\bar{a}_n$ зависимы для любого $n \in \omega$.

Предложение 3. *Если $T = \mathrm{Th}(\Gamma)$ — простая теория властного орграфа $\Gamma = \langle X, Q\rangle$, то (единственный) тип $p \in S^1(\varnothing)$ имеет бесконечный собственный вес.*

Доказательство. Покажем сначала, что если $\models Q^k(a,b)$ для некоторого $k > 0$, то элементы a и b зависимы. Для этого достаточно установить, что формула $Q^k(a,x)$ копируется над $\varnothing$. Действительно, существует такое число $m \in \omega$, что для любого элемента a_0 найдется не более m элементов $a_0, \ldots, a_m$, удовлетворяющих условиям $Q^k(a_i, a_j)$ для всех $0 \le i < j \le m$, поскольку в противном случае по теореме компактности и в силу бесконтурности орграфа Γ найдется бесконечная последовательность $(a_n)_{n\in\omega}$ с условием

$$\models Q^k(a_i, a_j) \Leftrightarrow i < j,$$

что противоречит простоте теории T.

Определим по индукции последовательность $(a_n)_{n\in\omega}$. Элемент a_0 выберем из множества X произвольно. Если элементы $a_0, \ldots, a_{n-1}$ уже выбраны, то в качестве элемента a_n выберем элемент с условием $\Gamma \models Q^k(a_{n-1}, a_n)$, принадлежащий максимально большому числу множеств $Q^k(a_i, \Gamma)$, $i < n$. Из замеченного выше следует, что множество $\{Q^k(a_n, x) \mid n \in \omega\}$ m-несовместно. Поскольку любые два элемента связаны автоморфизмом, то формула $Q^k(a,x)$ копируется над $\varnothing$.

Теперь заметим, что по свойству попарного пересечения для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in X$ существует элемент

$$a \in Q(\Gamma, a_1) \cap Q^2(\Gamma, a_2) \cap \cdots \cap Q^n(\Gamma, a_n)$$

и, в частности, любые n элементов, образующих независимую последовательность, зависят от некоторого элемента a. В силу того, что любые два элемента связаны автоморфизмом, а число n не ограничено, существует бесконечное число элементов, образующих независимую последовательность и зависящих от элемента a. $\square$

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту Е. А. Палютину за полезные замечания и конструктивную критику, а также Акито Цубои и Нобуаки Тамае за внимание к работе и указания на неточности в первоначальном варианте статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pillay A.* Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89, N 4. P. 666–672.

2. *Судоплатов С. В.* О мощных типах в малых теориях // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 118–128.

3. *Судоплатов С. В.* Типовая редуцированность и мощные типы // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 150–159.

4. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.

5. *Справочная* книга по математической логике. Ч. 1. Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса, Ю. Л. Ершова, Е. А. Палютина, А. Д. Тайманова. М.: Наука, 1982.

6. *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam: North-Holland, 1990.

7. *Wagner F. O.* Simple theories. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2000.

8. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

9. *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. I // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 1. С. 110–124.

10. *Перетятькин М. Г.* О полных теориях с конечным числом счетных моделей // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 5. С. 550–576.

11. *Мальцев А. И.* Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 729–743.

12. *Bouscaren E., Poizat B.* Des belles paires aux beaux uples // J. Symbolic Logic. 1988. V. 53, N 2. P. 434–442.

13. *Sudoplatov S. V.* Group polygonometries and related algebraic systems // Contributions to general algebra 11 / Proc. of the Olomouc Workshop '98 on General Algebra. Klagenfurt: Verl. Johannes Heyn, 1999. P. 191–210.

Статья поступила 6 июня 2003 г.

Судоплатов Сергей Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`sudoplat@math.nsc.ru,  sudoplat@ngs.ru`