Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 512.56

О РЕШЕТКАХ, ВЛОЖИМЫХ В РЕШЕТКИ ПОДПОЛУГРУПП. III. НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПОЛУГРУППЫ

М. В. Семёнова

Аннотация: Показано, что класс решеток, вложимых в решетки подполугрупп n-нильпотентных полугрупп, является конечно базируемым многообразием для любого $n < \omega$. В. Б. Репницкий показал, что любая решетка вложима в решетку подполугрупп некоторой коммутативной нильполугруппы индекса 2. В своем доказательстве он использовал результат Бредихина и Шайна, утверждающий, что любая решетка вложима в решетку подпорядков подходящего частичного порядка. Мы предлагаем прямое доказательство результата Репницкого, не использующее теорему Бредихина — Шайна, что дает ответ на один вопрос, поставленный в монографии Л. Н. Шеврина и А. Я. Овсянникова.

Ключевые слова: решетка, полугруппа, подрешетка, многообразие.

1. Введение

Пусть $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа и $X \subseteq S$. Через $\langle X\rangle$ мы обозначаем подполугрупу в S, порожденную множеством X. Тогда нетрудно видеть, что

$$\langle X\rangle = \{s_0 \cdot \ldots \cdot s_n \mid n < \omega,\ s_i \in X \text{ для } i \leq n\}.$$

Полугруппа $\langle S, \cdot\rangle$ является нильполугруппой индекса 2, если $x^2 = 0$ для любого $x \in S$. Если $n < \omega$ положительно, то полугруппа $\langle S, \cdot\rangle$ называется *n-нильпотентной*, если $x_0 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} = 0$ для любых $x_0, \ldots, x_{n-1} \in S$. Если полугруппа $\langle S, \cdot\rangle$ содержит нулевой элемент 0, то через $\mathrm{Sub}_0(S)$ мы обозначаем решетку непустых подполугрупп $\langle S, \cdot\rangle$.

Настоящая работа является продолжением [1, 2]. Здесь мы приведем прямое доказательство результата В. Б. Репницкого [3, теорема 6.1] о том, что класс нильполугрупп индекса 2 решеточно универсален. В комбинации с результатами работ [1, 2] это дает положительный ответ на вопрос VIII.7, поставленный в монографии Л. Н. Шеврина и А. Я. Овсянникова [4].

Для фиксированного положительного натурального числа n пусть $\mathscr{L}_n$ обозначает класс решеток, вложимых в решетки подполугрупп n-нильпотентных полугрупп, а $(\mathscr{L}_n)_{\mathrm{Fin}}$ — класс решеток, вложимых в решетки подполугрупп конечных n-нильпотентных полугрупп. Проблема 28.14.2 в [4] связана с нахождением описания классов $\mathscr{L}_n$ и $(\mathscr{L}_n)_{\mathrm{Fin}}$. Легко видеть, что класс $\mathscr{L}_n$ замкнут

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2112.2003.1), ИНТАС (грант 03–51–4110), Минобразования РФ (грант Е 02–1.0–32), Фонда поддержки отечественной науки, а также молодежного проекта СО РАН № 11.

относительно подрешеток и прямых произведений для любого положительного $n < \omega$. В настоящей работе мы показываем (см. теорему 6.4), что класс $\mathscr{L}_{n+1}$ является конечно базируемым многообразием для любого $n < \omega$ (т. е. он также замкнут относительно гомоморфных образов), и указываем конкретный базис тождеств для $\mathscr{L}_{n+1}$, $n < \omega$, что класс $\mathscr{L}_{n+1} \cap \mathrm{Fin}$ конечных решеток, принадлежащих $\mathscr{L}_{n+1}$, совпадает с классом $(\mathscr{L}_{n+1})_{\mathrm{Fin}}$ (см. следствие 6.5), а также что любая конечная решетка из класса $\mathscr{L}_{n+1}$ ограничена снизу. Более того, мы показываем, что многообразие $\mathscr{L}_{n+1}$ совпадает с многообразием решеток, вложимых в решетки подпорядков частично упорядоченных множеств длины не более чем n (последнее изучалось в работе [5]).

Основным средством при доказательстве упомянутых результатов вновь является техника раскрашенных деревьев.

2. Основные понятия

В этом пункте напомним решеточные понятия, которые будем использовать. Мы также отсылаем читателя к монографиям [6, 7]. Определения всех остальных понятий, используемых здесь, читатель может найти в [1, 2].

Для любого множества X пусть $\mathscr{P}(X)$ обозначает решетку всех подмножеств в X. Если $(P, \trianglelefteq)$ — частично упорядоченное множество, то $\triangleleft$ обозначает соответствующий строгий порядок на P, т. е. $a \triangleleft b$ в P, если $a \trianglelefteq b$ и $a \neq b$ в P. Пусть $\operatorname{Max} P$ обозначает множество всех максимальных элементов, а $\operatorname{Min} P$ — всех минимальных элементов в $(P, \trianglelefteq)$. Через $\operatorname{length}(P, \trianglelefteq)$ (или просто $\operatorname{length} P$) обозначаем длину множества $(P, \trianglelefteq)$, т. е.

$$\operatorname{length}(P, \trianglelefteq) = \sup\{|C| - 1 \mid C \text{ — максимальная цепь в } (P, \trianglelefteq)\}.$$

Для решетки L полагаем $L^- = L \setminus \{0_L\}$, если L содержит наименьший элемент 0_L, и $L^- = L$ в противном случае. Пусть $\mathrm{J}(L)$ обозначает множество всех неразложимых элементов L.

Будем говорить, что подмножество Σ решетки L $\vee$-*порождает* (соответственно *конечно* $\vee$-*порождает*) L, если каждый элемент в L есть объединение (конечное объединение) элементов из Σ. Известно, что в любой коалгебраической решетке L множество вполне неразложимых элементов $\vee$-порождает L (см. теорему I.4.22 в [8] или лемму 1.3.2 в [9]).

Если $a \in L^-$, то *нетривиальным покрытием* для a называется любое конечное подмножество X в L^- такое, что $a \leq \bigvee X$, но $a \nleq x$ для всех $x \in X$. Пусть $\mathscr{C}(a)$ — множество всех нетривиальных покрытий для a. Покрытие $a \leq \bigvee X$ *минимально*, если $a \leq \bigvee Y$ и условие $Y \ll X$ влечет $X \subseteq Y$ для любого $Y \subseteq L^-$. Через $\mathscr{M}(a)$ обозначаем множество всех минимальных покрытий для $a \in L^-$ и полагаем $\mathscr{M}_\Sigma(a) = \mathscr{M}(a) \cap \mathscr{P}(\Sigma)$ для любого $\Sigma \subseteq L$.

Пусть $\Sigma \subseteq L^-$. Следующее определение введено в работе [10]. Решетка L имеет *слабое свойство* Σ-*минимальности*, если для каждого элемента $p \in \Sigma$ любое покрытие из $\mathscr{C}(p)$ утончается до некоторого покрытия из $\mathscr{M}_\Sigma(p)$. Говорят, что решетка L имеет *свойство* Σ-*минимальности*, если она имеет слабое свойство Σ-минимальности и, кроме того, множество $\mathscr{M}_\Sigma(p)$ конечно для любого $p \in \Sigma$. В частности, L имеет *свойство минимальности*, если она имеет свойство L^--минимальности. Отметим, что для любого $a \in L$ каждое покрытие из $\mathscr{M}_\Sigma(a)$ является антицепью в $\Sigma \cap \mathrm{J}(L)$.

Удобное эквивалентное определение отношения $\mathscr{D}$-зависимости на Σ дает

Лемма 2.1. *Пусть $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$, где решетка L имеет слабое свойство Σ-минимальности. Тогда для любых $a, b \in \Sigma$ выполняется $a\mathscr{D}b$ в том и только том случае, когда $b \in X$ для некоторого $X \in \mathscr{M}_\Sigma(a)$.*

Пусть L — решетка, а $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$. Следующее определение также введено в работе [10]. Решетка L называется (*слабо*) *$\mathscr{D}$-нётеровой относительно* Σ, если L имеет (слабое) свойство Σ-минимальности, Σ $\vee$-порождает L и L не содержит бесконечных $\mathscr{D}$-последовательностей, составленных из элементов Σ. Будем говорить, что решетка L является (*слабо*) *$\mathscr{D}$-нётеровой*, если L (слабо) $\mathscr{D}$-нётерова относительно некоторого $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$.

3. Тождества, выполняющиеся на решетках подполугрупп нильпотентных полугрупп

Здесь приведем тождества, которые были рассмотрены в работе [5]. Один из основных результатов работы [5] утверждает, что эти тождества образуют базис для многообразия решеток, вложимых в решетки подпорядков частично упорядоченных множеств ограниченной длины.

Зафиксируем конечное дерево $(T, \trianglelefteq)$, обладающее тем свойством, что любой немаксимальный элемент имеет по крайней мере два верхних покрытия. Пусть $\operatorname{Min} T = \{a\}$. Построим решеточные полиномы U_T и V_T от переменных из множества $\{x_t \mid t \in T\}$ индукцией по длине дерева $(T, \trianglelefteq)$. Если $\operatorname{length}(T) = 1$, то

$$U_T = x_a \wedge \bigvee\{x_b \mid a \prec b \text{ в } T\}, \quad V_T = \bigvee_{a \prec b}\Bigl(x_a \wedge \bigvee\{x_c \mid a \prec c, c \neq b\}\Bigr);$$

если же $\operatorname{length}(T) > 1$, то

$$U_T = x_a \wedge \bigvee\{U_{\uparrow b} \mid a \prec b\},$$

$$V_T = \bigvee_{a \prec b, b \in \operatorname{Max} T}\Bigl(x_a \wedge \bigvee\{U_{\uparrow c} \mid a \prec c, c \neq b\}\Bigr) \vee \bigvee_{a \prec b, b \notin \operatorname{Max} T}\Bigl(x_a \wedge (V_{\uparrow b} \vee \bigvee\{U_{\uparrow c} \mid a \prec c, c \neq b\})\Bigr).$$

Следующий результат непосредственно вытекает из определения.

Лемма 3.1. *Пусть в конечном дереве $(T, \trianglelefteq)$ любой немаксимальный элемент имеет по крайней мере два верхних покрытия. Тогда $V_T \leq U_T$.*

Если дерево $(T, \trianglelefteq)$ обладает тем свойством, что любой немаксимальный элемент имеет по крайней мере два верхних покрытия, то, следуя [5], говорим, что решетка L *T-дистрибутивна*, если L удовлетворяет тождеству $U_T = V_T$. В силу леммы 3.1 последнее тождество равносильно неравенству термов $U_T \leq V_T$.

Согласно работе Хуна [11] решетка L называется *n-дистрибутивной*, если она удовлетворяет тождеству

$$a \wedge \Bigl(\bigvee_{i \leq n} x_i\Bigr) = \bigvee_{i \leq n}\Bigl(a \wedge \bigvee_{j \neq i} x_j\Bigr).$$

В частности, свойство 1-дистрибутивности совпадает со свойством дистрибутивности. Отметим, что n-дистрибутивность есть частный случай древесной дистрибутивности. Следует лишь взять дерево $T = \{a, b_0, \ldots, b_n\}$, в котором $a \prec b_i$ для всех $i \leq n$.

Конечное дерево $(T, \trianglelefteq)$ называем *n-деревом*, если $|\operatorname{Max} T| = n+1$ и каждый элемент $a \in T \setminus \operatorname{Max} T$ имеет по крайней мере два верхних покрытия. Теорема 3.3 указывает один класс T-дистрибутивных решеток подполугрупп. Для доказательства этой теоремы нам понадобится одна вспомогательная

Лемма 3.2. *Пусть T — n-дерево, $n > 0$, и пусть $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа. Пусть также $\gamma : \{x_t \mid t \in T\} \to \operatorname{Sub}(S)$ — произвольное отображение. Если элемент $s \in S$ таков, что $s \in U_T[\gamma]$, но $s \notin V_T[\gamma]$, то s представляется в виде произведения по крайней мере $n+1$ элементов S.*

Доказательство. Предположим, что $\gamma(x_t) = S_t$, $t \in T$. Доказательство ведем индукцией по $\operatorname{length} T$.

Если $\operatorname{length} T = 1$, то $T = \{a, b_0, \ldots, b_n\}$, где $a \prec b_i$ для всех $i \leq n$. Пусть $s \in U_T[\gamma]$, но $s \notin V_T[\gamma]$. Это означает, что $s \in S_a$ и существуют элементы $s_0, \ldots, s_m \in S_{b_0} \cup \cdots \cup S_{b_n}$ с условием $s = s_0 \cdot \ldots \cdot s_m$. Если $m < n$, то найдется $k \leq n$ такое, что $s \in S_a \cap \bigcup \{S_{b_i} \mid k \neq i \leq n\} \subseteq V_T[\gamma]$; противоречие. Поэтому $m \geq n$.

Предположим, что $\operatorname{length} T = k > 1$ и что утверждение леммы справедливо для любого дерева T' с условием $\operatorname{length} T' < k$. Пусть $T = \{a\} \cup \bigcup\limits_{i \leq m} {\uparrow} b_i$, где $a \prec b_i$, для всех $i \leq m$. Поскольку $s \in U_T[\gamma]$, имеем $s \in S_a$. Поэтому найдутся $m' > 0$ и $s_0, \ldots, s_{m'} \in U_{\uparrow b_0}[\gamma] \cup \cdots \cup U_{\uparrow b_m}[\gamma]$ такие, что $s = s_0 \cdot \ldots \cdot s_{m'}$. Для каждого $i \leq m$ рассмотрим множество

$$S(i) = \{s_j \mid j \leq m' \text{ и } s_j \in U_{\uparrow b_i}[\gamma]\}.$$

Так как $s \notin V_T[\gamma]$, заключаем, что $S(i) \neq \varnothing$ для любого $i \leq m$, откуда $m' \geq m$. Более того, для каждого $i \leq m$ существует $j(i) \in S(i)$ с условием $s_{j(i)} \notin V_{\uparrow b_i}[\gamma]$, ибо в противном случае $s \in V_T[\gamma]$.

Так как $\operatorname{length} {\uparrow} b_i < k$ для каждого $i \leq m$, согласно индукционному предположению найдутся положительные целые числа $m(i) \geq |\operatorname{Max}({\uparrow} b_i)|$, $i \leq m$, а также элементы $s(1, m(i)), \ldots, s(m(i), m(i)) \in S$, $i \leq m$, такие, что $s_{j(i)} = s(1, m(i)) \cdot \ldots \cdot s(m(i), m(i))$. Таким образом, $s = r_0 \cdot \ldots \cdot r_{m'}$, где для каждого $j \leq m$

$$r_j = \begin{cases} s_j, \text{ если } j \neq j(i), & \text{для всех } i \leq m; \\ s(1, m(i)) \cdot \ldots \cdot s(m(i), m(i)), \text{ если } j = j(i), & \text{для некоторого } i \leq m. \end{cases}$$

Поскольку $m' \geq m$, то s является произведением

$$(m' - m) + \sum_{i \leq m} m(i) \geq \sum_{i \leq m} m(i) \geq \sum_{i \leq m} |\operatorname{Max}({\uparrow} b_i)| = |\operatorname{Max} T| = n + 1$$

элементов из S, что доказывает утверждение. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть $n < \omega$, а $\langle S, \cdot \rangle$ является $(n+1)$-нильпотентной полугруппой. Тогда решетка $\operatorname{Sub}(S)$ T-дистрибутивна для любого n-дерева T.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное отображение $\gamma : \{x_t \mid t \in T\} \to \operatorname{Sub}(S)$. Пусть $\gamma(x_t) = S_t \in \operatorname{Sub}(S)$ для $t \in T$. По лемме 3.1 имеем $V_T[\gamma] \subseteq U_T[\gamma]$. Покажем, что $U_T[\gamma] \subseteq V_T[\gamma]$. Действительно, пусть $s \in U_T[\gamma]$. Без ограничения общности мы можем считать, что $s \neq 0$. Согласно лемме 3.2 либо $s \in V_T[\gamma]$, либо s является произведением по крайней мере $n+1$ элементов из S. Так как полугруппа S $(n+1)$-нильпотентна, $s=0$ в последнем случае, что противоречит предположению. Таким образом, $U_T[\gamma] \subseteq V_T[\gamma]$, т. е. $U_T[\gamma] = V_T[\gamma]$, и решетка $\mathrm{Sub}(S)$ T-дистрибутивна. $\square$

Из теоремы 3.3 немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 3.4. *Для любого $n<\omega$ и любой $(n+1)$-нильпотентной полугруппы $\langle S,\cdot\rangle$ решетка $\mathrm{Sub}(S)$ n-дистрибутивна.*

Отметим, что В. Б. Репницкий в работе [12] нашел серию тождеств $(\Phi_n, n<\omega)$ такую, что многообразие полугрупп $\mathscr{V}$ является n-нильпотентным тогда и только тогда, когда для любой полугруппы $S \in \mathscr{V}$ решетка подполугрупп $\mathrm{Sub}(S)$ удовлетворяет тождеству Φ_n, где $n<\omega$. Нетрудно показать, что тождество Φ_n (для фиксированного $n<\omega$) является следствием совокупности тождеств T-дистрибутивности, где T пробегает класс n-деревьев.

Отметим еще одно следствие теоремы 3.3 и предложения 4.4 из работы [5].

Следствие 3.5. *Для любого $n<\omega$ и любой $(n+1)$-нильпотентной полугруппы $\langle S,\cdot\rangle$ любая конечная подрешетка L в $\mathrm{Sub}(S)$ ограничена снизу.*

4. Отношения выводимости и основная конструкция

В этом пункте введем одну вспомогательную конструкцию, которая позволит строить полугруппы, имеющие заданные свойства.

Следуя работе [5], назовем *окрашенной ветвью* раскрашенного леса $(T,\trianglelefteq,\sim)$ любое подмножество B в T, которое удовлетворяет следующим условиям:

(i) $\mathrm{Min}\,B \subseteq \mathrm{Min}\,T$ и $|\mathrm{Min}\,B|=1$;
(ii) если $[p]_\sim \cap B \neq \varnothing$, то $[p]_\sim \subseteq B$ для любого $p \in T$;
(iii) если $p,\ q \in B$ и $p_* = q_*$, то $p \sim q$;
(iv) если $p \in B$ и $p \notin \mathrm{Max}\,T$, то $p \notin \mathrm{Max}\,B$.

Отметим, что любая окрашенная ветвь раскрашенного леса $(T,\triangleleft,\sim)$ является раскрашенным деревом относительно индуцированного порядка и индуцированной раскраски. Для любого $a \in \mathrm{Min}\,T$ через $T(a)$ обозначаем множество всех окрашенных ветвей в $(T,\triangleleft,\sim)$, для которых a является (единственным) минимальным элементом. Пусть T — раскрашенный лес, и пусть $S_T = \{F \subseteq T \mid 0<|F|<\omega\}$.

Следуя работе [1], введем бинарное отношение $\to$ на множестве S. Если $(p,I) \in \mathscr{M}_T$ и $p \triangleleft q$ в T, то определим бинарные отношения $\underset{(p,I)}{\longrightarrow}$ и $\underset{(p,q)}{\longrightarrow}$ на S_T следующим образом:

$$F \underset{(p,I)}{\longrightarrow} G \iff I \subseteq F \text{ и } G = (F \backslash I) \cup \{p\},$$

$$F \underset{(p,q)}{\longrightarrow} G \iff p,q \in F \text{ и } G = F \backslash \{q\}.$$

Полагаем $F \to^1 G$, если существует пара $(p,I) \in \mathscr{M}_T$ такая, что $F \underset{(p,I)}{\longrightarrow} G$; полагаем $F \to^2 G$, если существуют $p \triangleleft q$ в T такие, что $F \underset{(p,q)}{\longrightarrow} G$. Пусть $F \to G$ тогда и только тогда, когда $F \to^1 G$ или $F \to^2 G$, и пусть $\twoheadrightarrow$ обозначает рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\to$.

Следующая несложная лемма доказана в [1].

Лемма 4.1. *Пусть F, G_0, $G_1 \in S_T$.*

(1) *Если $F \longrightarrow G_0$ и $F \longrightarrow G_1$, то найдется $H \in S_T$ такое, что $G_0 \twoheadrightarrow H$ и $G_1 \twoheadrightarrow H$.*

(2) *Если $F \twoheadrightarrow G_0$ и $F \twoheadrightarrow G_1$, то найдется $H \in S_T$ такое, что $G_0 \twoheadrightarrow H$ и $G_1 \twoheadrightarrow H$.*

Лемма 4.2. *Пусть F, $G \in S_T$, и пусть $F \to G$. Тогда $G \ll F$. Более того, для каждого $p \in F$ существует $q \in G$ такой, что $q \trianglelefteq p$ в T.*

Доказательство. Утверждение о том, что $G \ll F$, очевидно. Докажем второе утверждение. Если $p \in G$, то доказывать нечего. Предположим, что $p \notin G$. Имеется две возможности.

Случай 1. $F \underset{(r,I)}{\longrightarrow} G$ для некоторой пары $(r, I) \in \mathscr{M}_T$. В этом случае $p \in I$ и $r \prec p$. Поскольку $r \in G$, мы можем взять $q = r$;

Случай 2. $F \underset{(r,p)}{\longrightarrow} G$ для некоторых $r \lhd p$. Поскольку $r \in G$, в этом случае возьмем $q = r$. $\square$

Конечное подмножество F в T называем *нормальным*, если условие $F \twoheadrightarrow G$ влечет равенство $F = G$. Из определения нормального множества следует, что если F нормально и $G \subseteq F$, то G также нормально. Отметим, что элементы нормального множества образуют антицепь в T. Следующее утверждение доказано в работе [1].

Лемма 4.3. *Для любого множества $F \in S_T$ существует единственное нормальное множество $G \in S_T$ такое, что $F \twoheadrightarrow G$.*

Для любого $F \in S_T$ через $F^\sharp$ мы обозначаем то единственное нормальное множество, к которому F может быть приведено. Из леммы 4.2 немедленно получаем

Следствие 4.4. *Для всякого $F \in S_T$ и всякого $p \in F$ существует $q \in F^\sharp$ такой, что $q \trianglelefteq p$ в T.*

Конечное подмножество F в T мы называем *специальным*, если F нормально и $F \subseteq B$ для некоторой окрашенной ветви B в T. Из определения вновь немедленно следует, что всякое подмножество специального множества само является специальным.

Лемма 4.5. *Пусть F и G — специальные подмножества T и $F \cup G \subseteq B$ для некоторой окрашенной ветви $B \subseteq T$. Тогда множество $(F \cup G)^\sharp$ также специальное.*

Доказательство. Пусть специальные множества F и G удовлетворяют всем требованиям леммы. Непосредственно видно, что если $F \cup G \to H$, то $H \subseteq B$. Поэтому $(F \cup G)^\sharp \subseteq B$. Более того, множество $(F \cup G)^\sharp$ нормально, поэтому оно специально. $\square$

Полагаем

$$\mathbb{S}_T = \{F \in S_T \mid F \text{ специально в } T\} \cup \{T\}.$$

Введем бинарную операцию $\circ$ на $\mathbb{S}_T$ следующим образом:

$$F \circ G = \begin{cases} (F \cup G)^\sharp, & \text{если } F \cap G = \varnothing \text{ и } F \cup G \text{ —} \\ & \quad \text{антицепь в некоторой окрашенной ветви } T; \\ T & \text{иначе,} \end{cases}$$

для любых F, $G \in \mathbb{S}_T$. Согласно лемме 4.5 операция $\circ$ определена корректно. Более того, она, очевидно, коммутативна. Мы можем утверждать даже больше.

Лемма 4.6. *Система $\langle \mathbb{S}_T, \circ \rangle$ является коммутативной нильполугруппой индекса 2.*

Доказательство. Покажем сначала, что операция $\circ$ ассоциативна. Пусть $F, G, H \in \mathbb{S}_T$. Без ограничения общности можно предполагать, что ни одно из трех множеств не равно T. В противном случае (если, скажем, $F = T$) имеем

$$(T \circ G) \circ H = T \circ H = T = T \circ (G \circ H).$$

(i) Предположим сначала, что $F \circ G = T$. Так как $F, G \neq T$, имеется две возможности.

Случай 1. Есть два сравнимых элемента $p \in F$ и $q \in G$. Поскольку $q \in G$, по следствию 4.4 существует $r \in G \circ H$ со свойством $r \trianglelefteq q$. Если $p \trianglelefteq q$ в T, то так как оба элемента p и r лежат в $\downarrow q$, они сравнимы. Если же $q \trianglelefteq p$, то $r \trianglelefteq q \trianglelefteq p$. В любом случае элементы $p \in F$ и $r \in G \circ H$ сравнимы, откуда получаем $F \circ (G \circ H) = T$.

Случай 2. $F \cup G$ не является подмножеством никакой окрашенной ветви в T. Если множества F и G лежат в различных компонентах связности T, то множества F и $G \circ H$ также лежат в различных компонентах связности T. Поэтому $F \circ (G \circ H) = T$. Если F и G лежат в одной компоненте связности T, то существуют элемент $p \in T$, элементы q_0, $q_1 \succ p$, а также элементы $r_0 \in F$, $r_1 \in G$ такие, что $q_0 \not\sim q_1$, $q_0 \trianglelefteq r_0$ и $q_1 \trianglelefteq r_1$ в T. Согласно следствию 4.4 найдется элемент $r \in G \circ H$ со свойством $r \trianglelefteq r_1$. Поскольку оба элемента r и q_1 принадлежат $\downarrow r_1$, они сравнимы. Если $q_1 \trianglelefteq r$, то элементы $r_0 \in F$ и $r \in G \circ H$ не лежат в одной окрашенной ветви, откуда следует, что $F \circ (G \circ H) = T$. Если $r \vartriangleleft q_1$, то $r \trianglelefteq (q_1)_* = p \trianglelefteq r_0$ и элементы $r_0 \in F$ и $r \in G \circ H$ сравнимы, откуда снова получаем $F \circ (G \circ H) = T$. В обоих случаях имеем

$$(F \circ G) \circ H = T \circ H = T = F \circ (G \circ H).$$

(ii) Предположим, что $F \circ G = (F \cup G)^\sharp$. Это означает, что существует цепь преобразований

$$F \cup G = M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_k = F \circ G,$$

где $M_i \in S_T$ для всех $i \leq k$. Поэтому множества F и G не содержат сравнимых элементов и $F \cup G$ является антицепью в некоторой окрашенной ветви B в T. В частности, согласно лемме 4.5 $M_i \subseteq B$ для каждого $i \leq k$. Если $G \circ H = T$, то, рассуждая точно так же, как в (i), можно показать, что $(F \circ G) \circ H = T$. Таким образом, мы можем считать, что $G \circ H = (G \cup H)^\sharp$. Предположим, что $(F \circ G) \circ H = T$. Возможны два случая.

Случай 1. Существует элемент $q \in H$, сравнимый с некоторым элементом $r \in F \circ G$. Пусть n является наименьшим числом из множества $\{0, \ldots, k\}$ с тем условием, что q сравним с некоторым элементом из M_n. Предположим, что $n = 0$. Тогда $r \in F \cup G$. Так как $G \circ H = (G \cup H)^\sharp$, получаем немедленно $r \in F$. Согласно следствию 4.4 найдется элемент $q' \in G \circ H$ со свойством $q' \trianglelefteq q$. Если $q \trianglelefteq r$, то $q' \trianglelefteq r$, откуда $F \circ (G \circ H) = T$. Если же $r \trianglelefteq q$, то, поскольку оба элемента r и q' принадлежат $\downarrow q$, они сравнимы. Отсюда вновь получаем $F \circ (G \circ H) = T$.

Предположим, что $n > 0$ и q сравним с некоторым $r \in M_n$. По выбору n элемент q не сравним ни с каким элементом из M_{n-1}. В частности, $r \notin M_{n-1}$, откуда $M_{n-1} \underset{(r,I)}{\longrightarrow} M_n$ для некоторой пары $(r, I) \in \mathscr{M}_T$ такой, что $I \subseteq M_{n-1} \subseteq B$.

Если $q \trianglelefteq r$, то $q \trianglelefteq r \prec i$ для любого $i \in I$, откуда следует, что q сравним с некоторым (в действительности, с любым) элементом i из $I \subseteq M_{n-1}$, что противоречит выбору n. Если же $r \triangleleft q$, то существует $t \in T$ такой, что $r \prec t \trianglelefteq q$. Имеется две возможности: либо $t \in B$, либо $t \notin B$. Если $t \in B$, то $t \in I$, откуда вытекает, что q сравним с некоторым элементом из M_{n-1}; противоречие. Если же $t \notin B$, то $q \notin B$ по определению окрашенной ветви, так что $H \nsubseteq B$ и поэтому $G \circ H = T$; противоречие. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

Случай 2. $(F \circ G) \cup H$ не является подмножеством никакой окрашенной ветви в T, т. е. найдутся элемент $p \in T$, элементы q_0, $q_1 \succ p$, а также элементы $r_0 \in F \circ G$, $r_1 \in H$ такие, что $q_0 \not\sim q_1$, $q_0 \trianglelefteq r_0$ и $q_1 \trianglelefteq r_1$ в T. По лемме 4.2 существуют элементы $p_0 \in F \cup G$, $p_1 \in G \circ H$ такие, что $r_0 \trianglelefteq p_0$ и $p_1 \trianglelefteq r_1$. Если $p_0 \in G$, то, поскольку $q_0 \not\sim q_1$, множество $G \cup H$ не является подмножеством никакой окрашенной ветви в T; противоречие с тем, что $G \circ H = (G \cup H)^\sharp$. Предположим, что $p_0 \in F$. Поскольку оба элемента p_1 и q_1 принадлежат $\downarrow r_1$, они сравнимы. Если $q_1 \trianglelefteq p_1$, то элементы $p_0 \in F$ и $p_1 \in G \circ H$ не принадлежат одной окрашенной ветви, откуда $F \circ (G \circ H) = T$. Если же $p_1 \triangleleft q_1$, то $p_1 \trianglelefteq (q_1)_* = p \trianglelefteq r_0 \trianglelefteq p_0$ и элементы $p_0 \in F$, $p_1 \in G \circ H$ сравнимы. Вновь получаем, что $F \circ (G \circ H) = T$. В обоих случаях имеем

$$(F \circ G) \circ H = T \circ H = T = F \circ (G \circ H).$$

Таким образом, равенство $(F \circ G) \circ H = T$ влечет равенство $F \circ (G \circ H) = T$. Используя симметричные рассуждения, можно показать, что равенство $F \circ (G \circ H) = T$ влечет равенство $(F \circ G) \circ H = T$.

Наконец, предположим, что $(F \circ G) \circ H = ((F \circ G) \cup H)^\sharp$ и $F \circ (G \circ H) = (F \cup (G \circ H))^\sharp$. Это означает, что

$$F \cup G \cup H \twoheadrightarrow (F \circ G) \cup H \twoheadrightarrow (F \circ G) \circ H$$

и

$$F \cup G \cup H \twoheadrightarrow F \cup (G \circ H) \twoheadrightarrow F \circ (G \circ H).$$

Поскольку оба множества $(F \circ G) \circ H$ и $F \circ (G \circ H)$ нормальны, получаем, что $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$ согласно лемме 4.3.

Таким образом, ассоциативность операции $\circ$ установлена, т. е. $\langle \mathbb{S}_T, \circ \rangle$ является полугруппой. Согласно определению $\circ$ получаем, что $F \circ F = T$ и $F \circ T = T$ для любого $F \in \mathbb{S}_T$. Поэтому $\langle \mathbb{S}_T, \circ \rangle$ является коммутативной нильполугруппой индекса 2. $\square$

5. Теорема о вложении

Пусть $(T, \triangleleft, \sim)$ — раскрашенный лес, а L — $\vee$-полурешетка. Пусть O обозначает наименьший элемент L, если L имеет таковой; в этом случае мы также полагаем $L^\circ = L$. Если L не содержит наименьшего элемента, то полагаем $L^\circ = L \cup \{\mathrm{O}\}$, где $\mathrm{O} \notin L$ и $\mathrm{O} \leq x$ для всех $x \in L$. Продолжим e до отображения из $\mathbb{S}_T \backslash \{T\}$ в L°, которое будем также обозначать через e, полагая

$$e[F] = \bigvee \{e(p) \mid p \in F\} \text{ для всех } F \in \mathbb{S}_T \backslash \{T\}$$

и считая, что $\bigvee \varnothing = \mathrm{O}$. Основной целью настоящего пункта является доказательство следующей теоремы о вложении.

Теорема 5.1. *Пусть* $(T, \lhd, \sim)$ — *раскрашенный лес,* L — $\vee$*-полурешетка, а* $e : T \to L^-$ — *норма. Тогда отображение* $\varphi : L \to \mathrm{Sub}_0(\mathbb{S}_T)$*, определенное по правилу*

$$\varphi(x) = \{F \in \mathbb{S}_T \backslash \{T\} \mid e(F) \leq x\} \cup \{T\} \text{ для всех } x \in L,$$

является $\langle 0, 1\rangle$*-гомоморфизмом. Более того, если* e *является полной нормой, то* φ — *вложение.*

Доказательство. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. *Если* $F \to G$*, то* $e[G] \leq e[F]$ *для всех* $F, G \in \mathbb{S}_T \backslash \{T\}$.

Доказательство утверждения 1. Если $F \to^2 G$, то $G \subset F$, откуда следует требуемое утверждение. Предположим, что $F \to^1 G$. Существует пара $(p, I) \in \mathscr{M}_T$ такая, что

$$I \subset F \quad \text{и} \quad G = \{p\} \cup H.$$

Поскольку e является нормой, то $e(p) \leq e[I]$, откуда

$$e[G] = e(p) \vee e[F \backslash I] \leq e[I] \vee e[F \backslash I] = e[F]. \quad \square$$

Утверждение 2. *Множество* $\varphi(x)$ *принадлежит* $\mathrm{Sub}_0(\mathbb{S}_T)$ *для любого* $x \in L$.

Доказательство утверждения 2. Пусть $F, G \in \varphi(x)$. Покажем, что $F \circ G \in \varphi(x)$. Так как $F \circ T = T$ для всех $F \in \mathbb{S}_T$, мы можем полагать, что $F, G \neq T$. Также можем считать, что $F \circ G \neq T$. По выбору F и G имеем $e[F], e[G] \leq x$. Согласно определению $F \circ G = (F \cup G)^\sharp$, поэтому достаточно показать, что $e[(F \cup G)^\sharp] \leq x$. Но это следует из утверждения 1, поскольку $F \cup G \twoheadrightarrow (F \cup G)^\sharp$ и поэтому $e[(F \cup G)^\sharp] \leq e[F \cup G] = e[F] \vee e[G] \leq x$. $\square$

Так как $e(T)$ содержится в L^-, то $\varphi(\mathrm{O}) = \{T\}$, если L имеет наименьший элемент O. Если L имеет наибольший элемент 1, то $\varphi(1) = \mathbb{S}_T$. Поэтому φ сохраняет существующие границы.

Очевидно, φ сохраняет существующие пересечения. Покажем, что φ является $\vee$-гомоморфизмом. Достаточно проверить, что для любых x, $y \in L$ и любого $p \in T$ если $e(p) \leq x \vee y$, то $\{p\} \in \varphi(x) \vee \varphi(y)$ (объединение $\varphi(x) \vee \varphi(y)$ вычисляется в решетке $\mathrm{Sub}_0(\mathbb{S}_T)$). Если выполнено либо $e(p) \leq x$, либо $e(p) \leq y$, то $\{p\} \in \varphi(x) \cup \varphi(y)$. Предположим, что $e(p) \nleq x, y$. Тогда $\{x, y\}$ — нетривиальное покрытие элемента $e(p)$. Поскольку e является нормой, существует $I \in \mathscr{M}_T(p)$ такое, что $e(I) \ll \{x, y\}$. Таким образом, $\{q\} \in \varphi(x) \cup \varphi(y)$ для всех $q \in I$, и множество $\{p\} = \circ\{\{q\} \mid q \in I\}$ принадлежит $\varphi(x) \vee \varphi(y)$.

Наконец, предположим, что e является полной нормой, и покажем, что φ — вложение. Пусть x, $y \in L$ таковы, что $x \nleq y$. Поскольку норма e полна, найдется $p \in T$ такой, что $e(p) \leq x$ и $e(p) \nleq y$, откуда получаем $\{p\} \in \varphi(x) \backslash \varphi(y)$; поэтому $\varphi(x) \nsubseteq \varphi(y)$. Таким образом, φ является вложением L в $\mathrm{Sub}_0(\mathbb{S}_T)$. $\square$

6. Вложение решеток в решетки подполугрупп

Здесь мы применим результаты, полученные в предыдущих пунктах, чтобы получить описание решеток, вложимых в решетки подполугрупп полугрупп, обладающих определенными свойствами.

Теорема 6.1. *Для любой решетки L найдется коммутативная нильполугруппа S индекса 2 такая, что L $\langle 0,1\rangle$-вложима в $\mathrm{Sub}_0(S)$.*

Доказательство. Пусть T — множество всех конечных последовательностей вида

$$\alpha = \langle a_0, I_0, a_1, I_1, \dots, a_{m-1}, I_{m-1}, a_m\rangle, \tag{6.1}$$

где $m < \omega$, $a_0, \dots, a_m \in L^-$, I_k является нетривиальным покрытием для a_k, а $a_{k+1} \in I_k$ для всех $k < m$. Если последовательность α такая, как в (6.1), и β определена так:

$$\beta = \langle b_0, J_0, b_1, J_1, \dots, b_{n-1}, J_{n-1}, b_n\rangle, \tag{6.2}$$

то полагаем $\alpha \trianglelefteq \beta$, если α является начальным сегментом β. Полагаем также $\alpha \sim \beta$, если $m = n$ и $(a_k, I_k) = (b_k, J_k)$ для всех $k < m$. Кроме того, положим $e(\alpha) = a_m$, если последовательность α определена равенством (6.1). Проверка того, что $(T, \trianglelefteq, \sim)$ является раскрашенным лесом, осуществляется непосредственно. Если α определена равенством (6.1), а β — равенством (6.2), то $\alpha \prec \beta$ в том и только том случае, когда $\alpha \trianglelefteq \beta$ и $n = m + 1$. Тогда множество $I = [\beta]$ состоит в точности из элементов T вида

$$\beta' = \langle a_0, I_0, a_1, I_1, \dots, a_{m-1}, I_{m-1}, a_m, I_m, x\rangle, \quad \text{где } x \in I_m.$$

В частности, $e(I) = I_m$ является нетривиальным покрытием для $e(\alpha) = a_m$. Так как любое нетривиальное покрытие a_m получается таким способом, e является полной нормой. Требуемое заключение следует из теоремы 5.1. $\square$

Как мы уже упоминали во введении, утверждение теоремы 6.1 впервые доказал В. Б. Репницкий в работе [3], используя результат из [13] о том, что любая решетка вложима в подходящую решетку подпорядков. Доказательство, представленное здесь, не использует решетки подпорядков; вместе с результатами работ [1, 2] это дает положительный ответ на вопрос VIII.7 из [4].

Теорема 6.3, представленная ниже, дает описание решеток, вложимых в решетки подполугрупп n-нильпотентных полугрупп для любого фиксированного $n < \omega$. Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующий вспомогательный результат, который вытекает из доказательства теоремы 5.6 в работе [5].

Предложение 6.2. *Пусть $n > 0$ и решетка L T-дистрибутивна для любого n-дерева T. Тогда решетка $\mathrm{Fil}^{\partial} L$, двойственная решетке фильтров L, имеет следующие свойства:*

(i) *$\mathrm{Fil}^{\partial} L$ T-дистрибутивна для любого n-дерева T;*

(ii) *$\mathrm{Fil}^{\partial} L$ имеет слабое свойство $\mathrm{J}(\mathrm{Fil}^{\partial} L)$-минимальности;*

(iii) *$\mathrm{Fil}^{\partial} L$ слабо $\mathscr{D}$-нётерова относительно $\mathrm{J}(\mathrm{Fil}^{\partial} L)$;*

(iv) *$\mathrm{Fil}^{\partial} L$ не содержит $(n+1)$-элементных $\mathscr{D}$-последовательностей.*

Мы готовы сформулировать теорему.

Теорема 6.3. *Пусть L — произвольная решетка.*

(i) *Если L является $\mathscr{D}$-нётеровой, то L $\langle 0,1\rangle$-вложима в решетку $\prod_{i\in I} \mathrm{Sub}_0(S_i)$, где S_i для любого $i \in I$ является конечной коммутативной нильполугруппой индекса 2.*

(ii) *Если L T-дистрибутивна для любого n-дерева T, то L $\langle 0,1\rangle$-вложима в решетку $\mathrm{Sub}_0(S)$, где S является коммутативной $(n+1)$-нильпотентной нильполугруппой индекса 2.*

(iii) *Если L конечна и ограничена снизу, то L $\langle 0,1\rangle$-вложима в решетку* $\mathrm{Sub}_0(S)$, *где S является конечной коммутативной нильпотентной нильполугруппой индекса* 2.

Замечание. Последний пункт был доказан В. Б. Репницким в работе [14].

Доказательство. Пусть решетка L является $\mathscr{D}$-нётеровой относительно $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$. Пусть T обозначает множество всех конечных последовательностей вида (6.1), где $m < \omega$, $a_0, \dots, a_m \in \Sigma$, I_k является минимальным покрытием для a_k и $a_{k+1} \in I_k$ для всех $k < m$. Отношения $\trianglelefteq$ и $\sim$, а также отображение e на T определим в точности, как в доказательстве теоремы 6.1. Тогда несложная проверка показывает, что $(T, \trianglelefteq, \sim)$ является раскрашенным деревом, а отображение e — полной L-нормой. Из теоремы 5.1 следует, что L вложима в решетку $\mathrm{Sub}_0(\mathbb{S}_T)$, где $\mathbb{S}_T$ является коммутативной нильполугруппой индекса 2.

(i) Пусть $T = \bigcup\{T_i \mid i \in I, T_i$ — связная компонента $T\}$. Поскольку решетка L $\mathscr{D}$-нётерова, любая связная компонента $(T_i, \trianglelefteq)$ конечна. Поэтому множество $\mathbb{S}_{T_i} \subseteq \mathscr{P}(T_i)$ также конечно. Согласно лемме 4.6 $\langle \mathbb{S}_{T_i}, \circ\rangle$ является конечной коммутативной нильполугруппой индекса 2. Более того, нетрудно видеть, что отображение $\pi_i : \mathrm{Sub}_0(\mathbb{S}_T) \to \mathrm{Sub}_0(\mathbb{S}_{T_i})$, определенное как

$$\pi_i(X) = X \cap \mathbb{S}_{T_i},$$

является гомоморфизмом. Таким образом, отображение $\pi(X) = (\pi_i(X), i \in I)$ определяет изоморфизм между решетками $\mathrm{Sub}_0(\mathbb{S}_T)$ и $\prod\limits_{i\in I} \mathrm{Sub}_0(\mathbb{S}_{T_i})$. Отсюда следует требуемое.

(ii) Предположим, что решетка L T-дистрибутивна для любого n-дерева T. Хорошо известно, что L вкладывается в решетку $\mathrm{Fil}^\partial L$, двойственную решетке фильтров L. Согласно предложению 6.2(i) решетка $\mathrm{Fil}^\partial L$ также T-дистрибутивна для любого n-дерева T, а также слабо $\mathscr{D}$-нётерова относительно $\Sigma = \mathrm{J}(\mathrm{Fil}^\partial L)$ по предложению 6.2(iii). Рассматривая решетку $\mathrm{Fil}^\partial L$ вместо L, мы можем полагать, что L слабо $\mathscr{D}$-нётерова относительно $\mathrm{J}(L)$, и поэтому можем определить дерево T, как в начале доказательства.

Покажем, что полугруппа $\langle \mathbb{S}_T, \circ\rangle$ является в этом случае $(n+1)$-нильпотентной, т. е.

$$F_0 \circ \dots \circ F_n = T$$

для любых $F_0, \dots, F_n \in \mathbb{S}_T$. Без ограничения общности можем считать, что $F_i \neq T$ для всех $i \leq n$. Мы также можем предполагать, что $F_0 \cup \dots \cup F_n \subseteq B$ для некоторой окрашенной ветви B дерева T, поскольку иначе равенство $F_0 \circ \dots \circ F_n = T$ следует из определения операции $\circ$. Для любого $i \leq n$ полагаем $M(i) = {\uparrow}F_i \cap \mathrm{Max}\, B$. Поскольку решетка L слабо $\mathscr{D}$-нётерова относительно $\mathrm{J}(L)$, любая окрашенная ветвь дерева T конечна, поэтому $M(i) \neq \varnothing$ для всех $i \leq n$. Из доказательства теоремы 5.6(iii) в [5] следует, что $|\mathrm{Max}\, B| \leq n$ для любой окрашенной ветви B в T при условии, что решетка L T-дистрибутивна для любого n-дерева T. Поскольку $M(i) \subseteq B$ для всех $i \leq n$, существуют $i, j \leq n$, $i \neq j$ такие, что $M(i) \cap M(j) \neq \varnothing$; пусть $p \in M(i) \cap M(j)$. Согласно определению найдутся элементы $q_i \in F_i$, $q_j \in F_j$ такие, что $q_i, q_j \in {\downarrow}p$. Отсюда заключаем, что q_i и q_j сравнимы, поэтому $F_i \circ F_j = T$, $F_0 \circ \dots \circ F_n = T$, и полугруппа $\langle \mathbb{S}_T, \circ\rangle$ $(n+1)$-нильпотентна.

(iii) Следует из (i), (ii), поскольку любая конечная ограниченная снизу решетка L является $\mathscr{D}$-нётеровой относительно $\mathrm{J}(L)$. Кроме того, найдется $n < \omega$

такое, что решетка L является T'-дистрибутивной для любого n-дерева T'. Таким образом, построенный лес T конечен, поэтому полугруппа $\langle \mathbb{S}_T, \circ \rangle$ конечна и $(n+1)$-нильпотентна. $\square$

Из теоремы 6.3(ii) получаем следующую характеризацию класса решеток, вложимых в решетки подполугрупп n-нильпотентных полугрупп.

Теорема 6.4. *Для решетки L и для $n > 0$ следующие условия равносильны:*

(i) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой коммутативной $(n+1)$-нильпотентной полугруппы индекса 2;*

(ii) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой коммутативной $(n+1)$-нильпотентной полугруппы;*

(iii) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой $(n+1)$-нильпотентной полугруппы;*

(iv) *L вложима в решетку подпорядков некоторого частичного порядка длины не более чем n;*

(v) *L является T-дистрибутивной для любого n-дерева T.*

Доказательство. Утверждение (i) очевидным образом влечет утверждение (ii), а утверждение (ii) — утверждение (iii). Утверждение (iii) влечет утверждение (v) согласно теореме 3.3, утверждение (v) — утверждение (i) по теореме 6.3(ii). Равносильность утверждений (iv) и (v) следует из теоремы 5.8 в [5]. $\square$

Теорема 6.4 дает решение проблемы 28.14.2 из [4]. Отметим также еще одно непосредственное следствие теоремы 6.4.

Следствие 6.5. *Для любого положительного целого числа n верны следующие утверждения.*

(i) *Класс $\mathscr{L}_n$ является конечно базируемым многообразием.*

(ii) *$\mathscr{L}_n \cap \mathrm{Fin}$ равно $(\mathscr{L}_n)_{\mathrm{Fin}}$, поэтому является псевдомногообразием.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из теоремы 6.4. Согласно теореме 3.3 и предложению 4.4 из [5] любая конечная подрешетка решетки подполугрупп n-нильпотентной полугруппы не содержит $\mathscr{D}$-циклов, поэтому является ограниченной снизу. Тем самым она вложима в решетку подполугрупп некоторой конечной n-нильпотентной полугруппы, что доказывает (ii). $\square$

Еще одним следствием теоремы 6.3 является следующий результат, доказанный В. Б. Репницким в работе [14].

Следствие 6.6. *Конечная решетка ограничена снизу тогда и только тогда, когда она вложима в решетку подполугрупп некоторой конечной коммутативной (нильпотентной) нильполугруппы индекса 2.*

Поскольку решетка $\mathrm{Sub}(S)$ ограничена снизу, для любой конечной нильполугруппы индекса 2 из теоремы 6.3 немедленно получаем

Следствие 6.7. *Любая $\mathscr{D}$-нётерова решетка вложима в прямое произведение конечных ограниченных снизу решеток.*

Замечание. Это утверждение доказано независимо в работах [10] и [5].

Автор признателен Веславу Антоновичу Дзебяку за внимание к работе и Владимиру Брониславовичу Репницкому за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Семёнова М. В.* О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. I. Полурешетки // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 2. С. 215–230.
2. *Семёнова М. В.* О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. II. Полугруппы с сокращением // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 436–446.
3. *Репницкий В. Б.* О представлении решеток решетками подполугрупп // Изв. вузов. Математика. 1996. Т. 40, № 1. С. 60–70.
4. *Shevrin L. N., Ovsyannikov A. Ja.* Semigroups and their subsemigroup lattices. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
5. *Семенова М. В.* О решетках, вложимых в решетки подпорядков // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 4. С. 483–511.
6. *Freese R., Ježek J., Nation J. B.* Free lattices. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1995. (Mathematical Surveys and Monographs; 42).
7. *Grätzer G.* General lattice theory. Basel: Birkhäuser, 1998.
8. *Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M., Scott D. S.* A Compendium of continuous lattices. Berlin; New York: Springer-Verl., 1980.
9. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Научная книга, 1999.
10. *Wehrung F.* Sublattices of complete lattices with continuity conditions // Algebra Universalis. 2005. V. 53, N 2–3. P. 149–173.
11. *Huhn A. P.* Schwach distributive Verbände. I // Acta Sci. Math. (Szeged). 1972. V. 33, N 1–4. P. 297–305.
12. *Repnitskiĭ V. B.* Nilpotency of algebras and identities on subalgebra lattices // Semigroups with applications, including semigroup rings (Eds. S. Kublanovsky, A. Mikhalev, J. Ponizovski). Berlin: Walter de Gruyter, 1998. P. 315–328.
13. *Bredikhin D., Schein B.* Representation of ordered semigroups and lattices by binary relations // Colloq. Math. 1978. V. 39, N 1. P. 1–12.
14. *Repnitskiĭ V. B.* On finite lattices embeddable in subsemigroup lattices // Semigroup Forum. 1993. V. 46, N 3. P. 388–397.

Статья поступила 18 октября 2005 г.

Семёнова Марина Владимировна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
semenova@math.nsc.ru