Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 512.542

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РАЗРЕШИМЫХ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ ТОТАЛЬНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. Г. Сафонов

Аннотация: Доказано, что для τ-замкнутой тотально насыщенной формации конечных групп условие конечности длины решетки ее τ-замкнутых тотально насыщенных подформаций равносильно условию конечности этой решетки, а также разрешимости и однопорожденности такой формации.

Ключевые слова: формация конечных групп, тотально насыщенная формация, решетка формаций, τ-замкнутая формация, однопорожденная формация.

1. Введение

В теории формаций конечных групп хорошо известен следующий открытый вопрос: конечно ли число подформаций у однопорожденной формации $\operatorname{form} G$ (см. [1, проблема 2, с.18; 2, вопрос 9.59; 3, открытый вопрос, с. 482])? Открытым также является и аналогичный вопрос для n-кратно насыщенной однопорожденной формации $l_n \operatorname{form} G$ [4, проблема 3.51, с. 49; 5, проблема 22, с. 218].

В [6] Брайант, Брайс и Хартли показали, что для всякой разрешимой группы G формация $\operatorname{form} G$ ($l \operatorname{form} G$) содержит лишь конечное число подформаций (насыщенных подформаций). А. Н. Скибой [7] доказано, что данное утверждение справедливо для всякой группы G, у которой разрешимый корадикал $G^{\mathfrak{S}}$ не содержит фраттиниевых G-главных факторов. С другой стороны, Брайант и Фой [8] установили, что для всякой группы G, являющейся расширением разрешимой группы с помощью простой неабелевой группы, формация $\operatorname{form} G$ также содержит лишь конечное число подформаций.

Л. А. Шеметков и А. Н. Скиба [4] доказали, что однопорожденная n-кратно насыщенная формация $l_n \operatorname{form} G$ содержит лишь конечное число n-кратно насыщенных подформаций, если разрешимый корадикал $G^{\mathfrak{S}}$ группы G не содержит фраттиниевых G-главных факторов. Там же установлено, что для разрешимой группы G однопорожденная тотально насыщенная формация $l_\infty \operatorname{form} G$ содержит конечное число тотально насыщенных подформаций.

В работе автора [9] показано, что в общем случае для однопорожденной тотально насыщенной формации $l_\infty \operatorname{form} G$ аналогичное утверждение неверно.

Наряду с отмеченными выше вопросами в теории формаций остается также открытым вопрос о равносильности условия конечности решетки подформаций кратно насыщенной формации и условия конечности длины этой решетки (см., например, [10, проблема 9]).

Развивая результаты работы [9], мы докажем, что справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *решетка $L^{\tau}_{\infty}(\mathfrak{F})$ имеет конечную длину;*

2) *решетка $L^{\tau}_{\infty}(\mathfrak{F})$ конечна;*

3) *$\mathfrak{F}$ — разрешимая однопорожденная тотально насыщенная формация.*

2. Определения и обозначения

Все рассматриваемые группы конечны. Мы придерживаемся терминологии, принятой в монографиях [4, 11]. Здесь напомним лишь некоторые из используемых определений и обозначений.

Пусть A, B — группы, $\varphi : A \to B$ — эпиморфизм, Ω и Σ — некоторые системы подгрупп в A и B соответственно. Тогда через Ω^{φ} обозначается множество $\{H^{\varphi} \mid H \in \Omega\}$, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ — множество $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех групп из Σ.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс групп и всякой группе $G \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — *подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор* в смысле А. Н. Скибы [11] (или, иначе, τ — подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\varphi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутым*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Непустую систему формаций θ называют *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ и в множестве θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \theta$. Формации из θ называют *θ-формациями*.

Всякую формацию называют *0-кратно насыщенной*. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют *n-кратно насыщенной*, если она имеет такой локальный экран, все непустые значения которого — $(n-1)$-кратно насыщенные формации. Формацию, n-кратно насыщенную для любого целого неотрицательного n, называют *тотально насыщенной*. Если при этом формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой, то $\mathfrak{F}$ называют *τ-замкнутой n-кратно насыщенной* и соответственно *τ-замкнутой тотально насыщенной формацией*.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая совокупность групп. Через $l^{\tau}_{\infty} \operatorname{form} \mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Формацию $l^{\tau}_{\infty} \operatorname{form} \mathfrak{X}$ называют *τ-замкнутой тотально насыщенной формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$*. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то $l^{\tau}_{\infty} \operatorname{form} \mathfrak{X} = l^{\tau}_{\infty} \operatorname{form} G$ называют *однопорожденной τ-замкнутой тотально насыщенной формацией*.

Для любых τ-замкнутых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\infty} \mathfrak{H} = l^{\tau}_{\infty} \operatorname{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

Частично упорядоченное по включению $\subseteq$ множество всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций l^{τ}_{∞} вместе с операциями $\vee^{\tau}_{\infty}$ и $\cap$ образует полную решетку.

Для любой l^{τ}_{∞}-формации $\mathfrak{F}$ через $L^{\tau}_{\infty}(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций, содержащихся в формации $\mathfrak{F}$.

Экран, все непустые значения которого суть l^{τ}_{∞}-формации, называется l^{τ}_{∞}-значным.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая система l_∞^τ-значных экранов. Тогда через $\vee_\infty^\tau(f_i \mid i \in I)$ обозначается такой экран f, что $f(p) = l_\infty^\tau \operatorname{form}\big(\bigcup\limits_{i\in I} f_i(p)\big)$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(p)$ непустая. В противном случае полагают $f(p) = \varnothing$.

τ-Замкнутую тотально насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{H}_\infty^\tau$-*критической* (или, иначе, минимальной τ-замкнутой тотально насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные τ-замкнутые тотально насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Группа G называется τ-минимальной не $\mathfrak{H}$-группой, или $\mathfrak{H}^\tau$-критической группой, если $G \notin \mathfrak{H}$, но классу групп $\mathfrak{H}$ принадлежит каждая собственная τ-подгруппа группы G.

Произведением формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ называют формацию $\mathfrak{F}\mathfrak{M} = (G \mid G^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{F})$, где $G^{\mathfrak{M}}$ — $\mathfrak{M}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп K группы G, для которых $G/K \in \mathfrak{M}$.

Будем говорить, что τ-замкнутая тотально насыщенная формация $\mathfrak{F}$ имеет l_∞^τ-*длину*, равную n, если существует такая совокупность формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_0 = (1)$ — формация всех единичных групп и $\mathfrak{F}_{i-1}$ — максимальная τ-замкнутая тотально насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. В противном случае будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ имеет *бесконечную* l_∞^τ-*длину*.

Корректность данного определения основана на установленной в [12, 13] модулярности решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций.

Непосредственно из определения l_∞^τ-длины τ-замкнутой тотально насыщенной формации $\mathfrak{F}$ следует, что она равна длине решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$.

3. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций конечных групп, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 1 [4, следствие 7.19]. *Пусть f_1 — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, и пусть $\mathfrak{H}$ — непустая формация такая, что $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран f, что для любого простого числа p справедливы утверждения:*

1) *$f(p) = f_1(p)\mathfrak{H}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$;*
2) *$f(p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.*

Лемма 2 [4, следствие 7.15]. *Множество тотально насыщенных формаций является подполугруппой в полугруппе формаций.*

Лемма 3 [11, теорема 1.3.14]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \operatorname{form} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда если f — минимальный l_∞^τ-значный экран формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) *$\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;*
2) *$f(p) = \mathfrak{X}_\infty^\tau(p) = \mathfrak{F}_\infty^\tau(p)$ при всех простых числах p;*
3) *если h — произвольный l_∞^τ-значный экран формации $\mathfrak{F}$, то при любом $p \in \pi(\mathfrak{X})$ имеет место $f(p) = l_\infty^\tau \operatorname{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(A) = 1)$.*

Лемма 4 [11, теорема 1.3.13]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация. Тогда формация $\mathfrak{F}$ тотально насыщена в том и только в том случае, когда для любого простого числа p имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}_\infty^\tau(p) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Лемма 5 [11, лемма 2.1.6]. *Пусть A — монолитическая группа с монолитом $R \not\subseteq \Phi(A)$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \tau\operatorname{form} A$ τ-неприводима и в ней имеется единственная максимальная τ-замкнутая подформация $\mathfrak{M} = \tau\operatorname{form}(\{A/R\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы A.*

Лемма 6 [4, лемма 8.2]. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, G — конечная группа. Тогда если найдется такое простое число p, что $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, то группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$.*

Лемма 7 [11, лемма 5.1.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая тотально насыщенная формация. Тогда если $\pi(\mathfrak{F})$ — конечное множество и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^r$ для некоторого натурального r, то решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ конечна.*

Лемма 8 [12, теорема 1; 13, теорема 1]. *Решетка всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций l_∞^τ модулярна.*

Лемма 9 [1, лемма 4.2]. *Пусть f — однородный экран формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$ и $\pi = \{p \mid f(p) \neq \varnothing\}$.*

Лемма 10 [9, лемма 8; 14, следствие]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая l_∞-формация такая, что $|\pi(\mathfrak{F})| < \infty$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *$\mathfrak{F}$ — однопорожденная l_∞-формация;*
2) *$\mathfrak{F}$ содержит по крайней мере одну подформацию вида $\mathfrak{S}_\pi$, где $|\pi| = 2$.*

4. Основной результат

Лемма 11. *Пусть $\mathfrak{M}$ — непустая наследственная формация, $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$, $H \in \tau(G)$. Покажем, что $H \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$. В силу наследственности формации $\mathfrak{M}$ и τ-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ утверждение очевидно, если $G \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{F}$. Пусть $G \notin \mathfrak{M} \cup \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$, то $K = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$.

Если $H \subseteq K$, то, поскольку $K \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ — наследственная формация, $H \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{F}$.

Пусть $H \not\subseteq K$. Если при этом $H \in \mathfrak{M}$, то $H \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$. Следовательно, $H \notin \mathfrak{M}$. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi : G \to G/K$. Так как $H^\varphi = HK/K$ и $(\tau(G))^\varphi \subseteq \tau(G/K)$, то $HK/K \in \tau(G/K) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $HK/K \in \mathfrak{F}$. Ввиду изоморфизма $HK/K \simeq H/H \cap K$ имеем $H/H \cap K \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $H^{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap K$. Поскольку $K \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ — наследственная формация, то $H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$. Значит, $H \in \mathfrak{M}\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая τ-замкнутая формация, π — множество простых чисел такое, что $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$. Тогда произведение $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тотально насыщенной формацией.*

Доказательство. Покажем, что формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ тотально насыщена. Как известно (см., например, [4, пример 2.31]), формация $\mathfrak{S}_\pi$ имеет такой локальный экран k, что $k(p) = \mathfrak{S}_\pi$ при любом $p \in \pi$ и $k(p) = \varnothing$ при $p \notin \pi$. Так как по условию $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то в силу леммы 1 формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран m, что $m(p) = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi$ и $m(p) = \varnothing$ для любого $p \notin \pi$. Тогда по определению формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ является n-кратно насыщенной для любого натурального числа n. Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ — тотально насыщенная формация.

Поскольку $\mathfrak{S}_\pi$ является наследственной формацией, то τ-замкнутость формации $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ следует из леммы 11. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть G — монолитическая группа, $R = \mathrm{Soc}(G)$ — неабелева группа. Тогда $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \operatorname{form} G$ имеет единственную максимальную l_∞^τ-подформацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty^\tau \operatorname{form}(\{G/R\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы G. В частности, $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Поскольку формация $\mathfrak{S}_{\pi(R)}$ тотально насыщена и наследственна, в силу лемм 2 и 11 имеем $\mathfrak{M} \in l_\infty^\tau$.

Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{F}$, и пусть M — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда M — монолитическая τ-минимальная группа. Обозначим $N = \mathrm{Soc}(M)$. Если теперь N — неабелева или абелева $\pi'(R)$-группа, то, поскольку

$$M \in \mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty^\tau \operatorname{form}(\{G/R\} \cup \mathfrak{X}),$$

получим, что $M \in l_\infty^\tau \operatorname{form}(\{G/R\} \cup \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{F}$. Последнее противоречит выбору группы M. Поэтому N — абелева p-группа, где $p \in \pi(R)$. В силу того, что $N \not\subseteq \Phi(M)$, имеем $N = O_p(M) = F_p(M)$ и $M = [N]K$ для некоторой максимальной в M подгруппы K. Так как $p \in \pi(R)$, то $F_p(G) = 1$. Ввиду леммы 3 значение на p минимального l_∞^τ-значного локального экрана $\mathfrak{F}_\infty^\tau$ формации $\mathfrak{F}$ такое, что

$$\mathfrak{F}_\infty^\tau(p) = l_\infty^\tau \operatorname{form}(G/F_p(G)) = l_\infty^\tau \operatorname{form} G = \mathfrak{F}.$$

По лемме 4 имеем $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_\infty^\tau(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Но $M \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$. Значит, $M \in \mathfrak{F}$; противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная l_∞^τ-подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная собственная l_∞^τ-подформация формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{M}$ и A — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда A — монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{M}$-группа. Пусть $P = \mathrm{Soc}(A)$. Понятно, что $P \not\subseteq \Phi(A)$. Допустим, что P — неабелева группа. В силу леммы 12 формация $\mathfrak{S}_{\pi(G)} \tau \operatorname{form} G$ принадлежит l_∞^τ. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi(G)} \tau \operatorname{form} G$. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то $A \in \mathfrak{S}_{\pi(G)} \tau \operatorname{form} G$. Но P — неабелева группа. Поэтому $A \in \tau \operatorname{form} G$. Согласно лемме 5 формация $\tau \operatorname{form} G$ имеет единственную максимальную τ-замкнутую подформацию $\tau \operatorname{form}(\{G/R\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы G. Если $\tau \operatorname{form} A = \tau \operatorname{form} G$, то $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$; противоречие. Поэтому $\tau \operatorname{form} A \subset \tau \operatorname{form} G$. Значит, $A \in \tau \operatorname{form}(\{G/R\} \cup \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{M}$. Но тогда $A \in \mathfrak{M}$; снова получили противоречие. Значит, P — абелева p-группа. Так как при этом $P \not\subseteq \Phi(A)$, то $P = O_p(A) = F_p(A)$ и $A = [P]H$ для некоторой максимальной подгруппы H из A. Поскольку $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, то $p \notin \pi(R)$. Поэтому $R \subseteq F_p(G)$ и

$$(G/R)/F_p(G/R) = (G/R)/F_p(G)/R \simeq G/F_p(G).$$

Ввиду того, что $A \in \mathfrak{F}$, имеем $H \simeq A/F_p(A) \in \mathfrak{F}_\infty^\tau(p) = l_\infty^\tau \operatorname{form}(G/F_p(G))$. Далее, поскольку $G/R \in \mathfrak{M}$, то $G/F_p(G) \simeq (G/R)/F_p(G/R) \in \mathfrak{M}_\infty^\tau(p)$. Тогда $A/O_p(A) \simeq H \in \mathfrak{F}_\infty^\tau(p) \subseteq \mathfrak{M}_\infty^\tau(p)$. Значит, согласно лемме 6 группа A принадлежит формации $\mathfrak{M}$; противоречие. Тем самым $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная l_∞^τ-подформация формации $\mathfrak{F}$.

Поскольку $\mathfrak{S}_{\pi(R)}$ — наследственная формация, то $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, имеет место включение $\mathfrak{S}_{\pi(R)} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $\mathfrak{F}$ — l_∞^τ-формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая тотально насыщенная неразрешимая формация, когда*

$\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \operatorname{form} G$, *где* G *— монолитическая* τ*-минимальная неразрешимая группа с неабелевым монолитом* P *такая, что группа* G/P *разрешима.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}_\infty^\tau$-критическая формация. Выберем в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$ группу минимального порядка G. Тогда G — монолитическая τ-минимальная неразрешимая группа с неабелевым монолитом $R = G^{\mathfrak{S}}$. Понятно, что $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \operatorname{form} G$. Таким образом, группа G удовлетворяет требованиям теоремы.

Достаточность. Пусть формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда ввиду леммы 13 формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную l_∞^τ-подформацию $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(R)} l_\infty^\tau \operatorname{form}(\{G/R\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — совокупность всех собственных τ-подгрупп группы G. Поскольку G — τ-минимальная неразрешимая группа и $G/R \in \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S}$. При этом так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}_\infty^\tau$-критическая формация. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— неразрешимая* l_∞^τ*-формация. Тогда в* $\mathfrak{F}$ *найдется по меньшей мере одна* $\mathfrak{S}_\infty^\tau$*-критическая подформация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация из условия леммы. Обозначим через G группу минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$. Тогда G — монолитическая τ-минимальная неразрешимая группа с неабелевой минимальной нормальной подгруппой $R = G^{\mathfrak{S}}$. В силу леммы 14 $\mathfrak{L} = l_\infty^\tau \operatorname{form} G$ является искомой минимальной τ-замкнутой тотально насыщенной неразрешимой формацией. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть* π *— некоторое множество простых чисел,* $|\pi| \geq 2$*. Тогда длина решетки* $L_\infty^\tau(\mathfrak{S}_\pi) = L_\infty(\mathfrak{S}_\pi)$ *бесконечна.*

Доказательство. Пусть p и q — различные простые числа из π и $\mathfrak{L}_n = (\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q)^n$ для любого натурального n. Поскольку $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_q$ — тотально насыщенные формации, согласно лемме 2 формация $\mathfrak{L}_n$ тотально насыщенна. Так как $\mathfrak{L}_n$ разрешима, она является наследственной формацией и, следовательно, τ-замкнута для любого подгруппового функтора τ. Ввиду леммы 8 решетка $L_\infty^\tau(\mathfrak{L}_n)$ конечна и поэтому имеет конечную длину. Однако $\mathfrak{L}_i \subset \mathfrak{L}_{i+1}$ для любого натурального i. Следовательно, длина решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{L}_{i+1})$ строго больше длины ее подрешетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{L}_i)$. Таким образом, $\mathfrak{S}_\pi$ содержит бесконечную цепь тотально насыщенных подформаций вида $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q)^n$, длины которых неограниченно возрастают. Ввиду леммы 8 заключаем, что длина решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{S}_\pi)$ не может быть конечной. Лемма доказана.

Лемма 17. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathfrak{S}_\infty^\tau$*-критическая формация. Тогда длина решетки* $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ *бесконечна.*

Доказательство. Согласно лемме 14 имеем $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \operatorname{form} G$, где G — монолитическая τ-минимальная группа с неабелевым монолитом P такая, что группа G/P разрешима. Пусть $\pi = \pi(P)$. Ввиду леммы 13 имеет место включение $\mathfrak{S}_\pi \subset \mathfrak{F}$. Так как P — неабелева группа, то $|\pi| \geq 3$. По лемме 16 длина решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{S}_\pi)$ бесконечна. При этом $L_\infty^\tau(\mathfrak{S}_\pi)$ — подрешетка решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$, тем самым длина решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ также бесконечна. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть имеет место утверждение 1 теоремы. Покажем, что тогда $|\pi(\mathfrak{F})| < \infty$. Допустим противное, т. е. что $\pi(\mathfrak{F}) = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ — бесконечное множество. В силу леммы 9 имеет место равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Рассмотрим следующую цепь l_∞^τ-формаций:

$$(1) = \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{N}_{p_1} = \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{N}_{\{p_1,p_2\}} = \mathfrak{F}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{N}_{\{p_1,\dots,p_n\}} = \mathfrak{F}_n \subset \dots .$$

Учитывая лемму 9, легко убедиться в том, что $\mathfrak{F}_i$ — максимальная l_∞^τ-подформация формации $\mathfrak{F}_{i+1}$ $(i = 1,\ 2, \dots)$. Но $\mathfrak{F}_i$ — l_∞^τ-подформация формации $\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}$ содержит бесконечную максимальную цепь l_∞^τ-подформаций

$$\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{F}_n \subset \dots .$$

Последнее в силу леммы 8 противоречит утверждению 1. Следовательно, $|\pi(\mathfrak{F})| < \infty$.

Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Допустим, что $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{S}$. Тогда по лемме 15 в формации $\mathfrak{F}$ найдется по меньшей мере одна $\mathfrak{S}_\infty^\tau$-критическая подформация $\mathfrak{L}$. Однако ввиду леммы 17 длина решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{L})$ бесконечна. Так как при этом $L_\infty^\tau(\mathfrak{L})$ — подрешетка решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$, снова получаем противоречие с утверждением 1. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$.

Согласно лемме 10 формация $\mathfrak{F}$ либо однопорождена, либо содержит в качестве подформации формацию $\mathfrak{S}_\pi$ для некоторого множества простых чисел π, где $|\pi| = 2$. Поскольку по лемме 16 длина решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{S}_\pi) = L_\infty(\mathfrak{S}_\pi)$ бесконечна, то $\mathfrak{F}$ — однопорожденная l_∞^τ-формация, т. е. $\mathfrak{F} = l_\infty^\tau \operatorname{form} G = l_\infty \operatorname{form} G$ для некоторой разрешимой группы G. Таким образом, для формации $\mathfrak{F}$ выполняется утверждение 3 теоремы.

Пусть теперь имеет место утверждение 3. Тогда согласно лемме 7 решетка $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ конечна, т. е. справедливо утверждение 2. Импликация $2 \Rightarrow 1$ очевидна. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. *Нерешенные* вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 15-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2002.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
5. *Wenbin Guo.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., 2000.
6. *Bryant R. M., Bryce R. A., Hartley B.* The formation generated by a finite group // Bull. Austral. Math. Soc. 1970. V. 2, N 3. P. 347–357.
7. *Скиба А. Н.* О формациях, порожденных классами групп // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1981. № 3. С. 33–39.
8. *Bryant R. M., Foy P. D.* The formation generated by a finite group // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. 1995. V. 94. P. 215–225.
9. *Сафонов В. Г.* О тотально насыщенных формациях конечной длины // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2004. № 6. С. 150–155.
10. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
11. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.
12. *Сафонов В. Г.* О свойствах решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций. Гомель, 2004. 26с. (Препринт / Гомельский гос. университет; № 3).
13. *Сафонов В. Г.* О двух задачах теории тотально насыщенных формаций // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49, № 5. С. 16–20.
14. *Сафонов В. Г.* Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 6. С. 727–736.

Статья поступила 30 ноября 2005 г.

Сафонов Василий Григорьевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
vsafonov@gsu.unibel.by