Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 515.16

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ОПИСАНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ЗЕЙФЕРТА

А. А. Перфильев

Аннотация: Полностью решена проблема Хайа-Легран, Вонга и Цишанга состоящая в следующем: требуется перечислить множество минимальных (в смысле отображений степени 1) многообразий Зейферта.

Ключевые слова: многообразие Зейферта, степень отображения.

§ 1. Введение и основные теоретические сведения

Вопрос существования отображения степени 1 между двумя данными многообразиями Зейферта M и P поставлен в [1] и решен там для всех пар M, P, кроме случая, когда M — многообразие Зейферта с базой «сфера» и тремя особыми слоями или с базой «тор» и одним особым слоем, а P — пространство додекаэдра S^3/P_{120} (гомологическая сфера Пуанкаре). В данной работе, основываясь на технике вычисления степени отображения, предложенной Хайа-Легран, Матвеевым и Цишангом, мы исследуем проблемные случаи и покажем, что ни в одном из них не возникает отображений степени 1.

1.1. Степень отображения. Пусть M и P — замкнутые связные ориентированные трехмерные многообразия. Тогда любое отображение $f : M \to P$ индуцирует гомоморфизм групп гомологий $\varphi : H_3(M) \to H_3(P)$. Так как $H_3(M) \cong H_3(P) \cong \mathbb{Z}$, то гомоморфизм φ есть умножение на целое число.

Определение 1. *Степенью отображения* f называется целое число $\deg f = \varphi(1)$.

Степень является гомотопическим инвариантом отображения, т. е. степени гомотопных отображений равны. Степень также обладает мультипликативным свойством: степень суперпозиции отображений равна произведению их степеней, причем степень тождественного отображения всегда равна 1, а степень отображения в точку равна 0.

1.2. Минимальные многообразия Зейферта. Напомним, что *многообразием Зейферта* называется трехмерное многообразие, разбитое на слои (гомеоморфные окружностям) так, что каждый слой имеет окрестность, послойно гомеоморфную тривиально расслоенному полноторию (полноторию $D^2 \times S^1$, разбитому на слои вида $\{*\} \times S^1$). Конструктивное определение многообразия Зейферта $M(F; (\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, n)$, где F — замкнутая ориентируемая

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Челябинской области, INTAS (грант 03–51–3663) и РФФИ-Урал (код проекта 04–01–96014).

поверхность и (α_i, β_i) — пары взаимно простых чисел, можно дать следующим образом. Удалим из поверхности F внутренности n непересекающихся дисков (полученную поверхность обозначим через F'). Многообразие $F' \times S^1$ имеет на краю n торов. Выберем на каждом из них систему координат: параллель — кривая $\{*\} \times S^1$, меридиан — соответствующая компонента края поверхности F'. Приклеим к i-й $(i = 1, \dots, n)$ компоненте края полноторие по такому гомеоморфизму края, чтобы край меридионального диска полнотория переходил в кривую (p_i, q_i) на краевом торе многообразия $F' \times S^1$. Полученное таким образом замкнутое многообразие и есть многообразие Зейферта $M(F; (\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, n)$. Осевые окружности вклеенных полноториев называются *особыми слоями*, а числа (α_i, β_i) — *параметрами особых слоев*. Более подробную информацию о многообразиях Зейферта можно найти, например, в [2].

Хайа-Легран, Вонг и Цишанг рассматривают следующее отношение частичного порядка на множестве замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий (см. [1]). Пусть M и P — два таких многообразия. Будем считать, что $M \geq P$, если существует отображение степени 1 из M в P.

Замечание 1. Любое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие M допускает отображение степени 1 на себя и на сферу S^3, т. е. $M \geq M$ и $M \geq S^3$.

Определение 2 [1]. Многообразие Зейферта M называется *минимальным многообразием Зейферта*, если оно допускает отображения степени 1 только на те многообразия Зейферта, которые гомеоморфны M или S^3.

В работе [1] приведен набор многообразий Зейферта, среди которых содержатся все минимальные, причем для всех многообразий из этого набора, кроме перечисленных в следующей теореме, доказана минимальность. Открытой осталась проблема минимальности этих многообразий.

Теорема 1 [1]. *Многообразия следующих четырех серий не допускают отображений степени* 1 *ни на какие другие многообразия Зейферта, кроме себя,* S^3 *и, возможно, гомологической сферы Пуанкаре* S^3/P_{120}*:*

(d1) *многообразия Зейферта* $M(T^2; (\alpha, \pm 1))$, *где* α *делится на* $3, 4$ *или* 5*;*

(d2) *многообразия Зейферта* $M(S^2; (2^k\alpha_1; \beta_1); (2^k\alpha_2; \beta_2); (2^k\alpha_3; \beta_3))$, *где* $k>1$, *все* α_i *нечетны,* $\alpha_1\alpha_2\beta_3 + \alpha_1\alpha_3\beta_2 + \alpha_2\alpha_3\beta_1 = \pm 1$, *и есть пара* i, j $(1 \leq i \neq j \leq 3)$ *такая, что* $3|\alpha_i, 5|\alpha_j$*;*

(d3) *многообразия Зейферта* $M(S^2; (2\alpha_1; \beta_1); (2\alpha_2; \beta_2); (2\alpha_3; \beta_3))$ *с теми же ограничениями, что в* (d2), *и следующим условием: если* $n > 1$ *— делитель числа* $2\alpha_i$, *то уравнение* $2x^2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 4n)$ *не имеет решений в целых числах;*

(d4) *гомологические сферы* $M(S^2; (2\alpha_1; \beta_1); (3\alpha_2; \beta_2); (5\alpha_3; \beta_3))$, *где* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq \pm 1 (\mathrm{mod}\, 120)$ *и* $49\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq \pm 1 (\mathrm{mod}\, 120)$.

Проблема 1. *Являются ли многообразия серий* (d1)–(d4) *минимальными многообразиями Зейферта?*

В 1999 г. Хайа-Легран, Матвеев и Цишанг в ходе компьютерного эксперимента (см. [3]) заметили периодическую зависимость между параметрами особых слоев многообразий Зейферта и множествами возможных степеней их отображений на сферу Пуанкаре. В работах [4] (для случая многообразий Зейферта с базой «сфера») и [5] (для случая многообразий Зейферта с базой «тор») впервые сформулированы и доказаны теоремы о периодичности. Сами по себе эти теоремы позволяют свести решение проблемы 1 к перебору конечного (хотя и очень большого) числа случаев. В настоящей работе на основе способа вычисления степеней отображений, предложенного Хайа-Легран, Матвеевым и Цишангом, и техники, использованной для доказательства периодичности степеней отображений (см. [4, 5]), мы решаем проблему 1 положительно с помощью конечного компьютерного перебора в случаях (d1) и (d3) и явно в случаях (d2) и (d4), причем для случая (d4) выведена явная арифметическая формула зависимости степени отображения от параметров многообразия-прообраза.

1.3. Краткая структура работы. В § 2 описывается идея алгоритма вычисления степени отображения, используемого для решения проблемы 1. В п. 2.1 подробно излагается построение модульной структуры на группах цепей накрывающего пространства. В пп. 2.2 и 2.3 даются определения необходимых для построения алгоритма понятий (граничный цикл, индуцированное отображение двумерных цепей, характеристическая коцепь) и приводится формула степени отображения (теорема 2) согласно [3].

В § 3 (теоремы 3, 4) даны формулы граничных циклов многообразий Зейферта с базой «сфера», «тор» (п. 3.1). В п. 3.2 приводится алгоритм вычисления индуцированного отображения двумерных цепей. В пп. 3.3 и 3.4 с помощью конструкции двойственного копредставления фундаментальной группы объясняется схема вычисления характеристической коцепи (утверждение 1) и доказывается ее полезное свойство (утверждение 2).

В § 4 описывается гомологическая сфера Пуанкаре S^3/P_{120}, ее фундаментальная группа (п. 4.1), построение ее характеристической коцепи (п. 4.2) и операция вычисления индуцированного отображения цепей для нее (п. 4.3).

В § 5 (п. 5.1) доказывается (на основе утверждения 2) важный вспомогательный результат (лемма 4, следствие 1) и дается определение аналогичных отображений. Проблема 1 решается в пп. 5.2–5.5. Для доказательства используются теоремы 2–4 и лемма 4. В п. 5.2 доказывается минимальность многообразий серии (d1) (лемма 5, утверждение 3), в п. 5.3 — минимальность многообразий серии (d2) (теорема 5). П. 5.4 посвящен доказательству минимальности многообразий серии (d3) (следствие 2), а п. 5.5 — минимальности многообразий серии (d4) (теорема 10).

§ 2. Вычисление степени отображения

2.1. Модульная структура на группах цепей накрывающего пространства. Пусть M — замкнутое ориентированное связное трехмерное многообразие, снабженное клеточным разбиением, в котором присутствует ровно одна вершина v, все клетки ориентированы. Тогда универсальное накрытие $p : \widetilde{M} \to M$ индуцирует клеточное разбиение многообразия $\widetilde{M}$, в котором клетками являются компоненты связности прообразов клеток многообразия M. Таким образом, каждой клетке многообразия M соответствуют столько клеток в накрывающем пространстве $\widetilde{M}$, каков порядок фундаментальной группы $\pi_1(M)$, причем имеет место изоморфизм групп цепей:

$$C_*(\widetilde{M};\mathbb{Z}) \cong C_*(M;\mathbb{Z}[\pi_1(M)]).$$

Вершины многообразия $\widetilde{M}$ можно сопоставить элементам фундаментальной группы $\pi_1(M)$ так, что путь из вершины, соответствующей единичному элементу, в вершину, соответствующую некоторому элементу g, отображается накрытием в петлю, соответствующую элементу g. Ребра клеточного разбиения многообразия $\widetilde{M}$, являющиеся прообразами одного и того же ребра a, будем сопоставлять элементам группы $\pi_1(M)$ по следующему правилу: прообраз ребра соответствует тому же элементу фундаментальной группы, что и его начальная вершина. Если для каждой двумерной клетки R многообразия M фиксирован порядок обхода ребер ее граничной кривой, то прообразом клетки R, соответствующим элементу g, будем считать тот прообраз, обход граничной кривой которого начинается из вершины, соответствующей элементу g.

Пусть $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid R_1, R_2, \ldots, R_m \rangle$ — геометрическое копредставление группы $\pi_1(M)$, соответствующее заданному на многообразии M клеточному разбиению. Это означает следующее.

1. Задано биективное соответствие между образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и ребрами многообразия M.

2. Задано биективное соответствие между соотношениями $R_1, R_2, \ldots, R_m$ и двумерными клетками многообразия M.

3. На граничной кривой каждой двумерной клетки задана такая базисная точка, что если начать в ней обход кривой, то последовательность ребер (с учетом направления прохода) будет совпадать с последовательностью образующих в соответствующем соотношении.

В дальнейшем мы не будем различать клетки и соответствующие им элементы геометрических копредставлений. Клетки же накрывающего многообразия будем обозначать следующим образом: ga_i (или $g\bar{a}_i$, чтобы не путать элементы и образующие) — прообраз ребра a_i, соответствующий элементу g фундаментальной группы; gR_i — прообраз клетки R_i, соответствующий элементу g фундаментальной группы.

Лемма 1. *Пусть γ_1 и γ_2 — петли в многообразии M, начинающиеся в вершине и проходящие по ребрам, и пусть петля γ_1 представляет некоторый элемент g_1 фундаментальной группы. Обозначим через $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma \in C_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z})$ одномерные цепи, отвечающие поднятиям петель $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1\gamma_2$ соответственно из вершины, отвечающей единичному элементу группы $\pi_1(M)$. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 + g_1\Gamma_2$.*

Доказательство. Петля γ_1 реализует элемент g_1 фундаментальной группы. По нашему построению это означает, что, пройдя по ее поднятию, мы окажемся в вершине, соответствующей элементу g_1. Если из этой вершины пройти вдоль ребер по пути, реализующему некоторый элемент g, то мы окажемся в вершине, соответствующей элементу g_1g; это значит, что цепь, соответствующая поднятию петли γ_2 из вершины с номером g_1, будет иметь вид $g_1\Gamma_2$, а вся цепь — вид $\Gamma = \Gamma_1 + g_1\Gamma_2$.

Пусть $w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$ — слово в образующих фундаментальной группы $\pi_1(M)$ (все ε_i равны ± 1). Обозначим через v_j, $j = 1, \ldots, l$, такие элементы группы $\pi_1(M)$, что

1) $v_1 = 1$, если $\varepsilon_1 = 1$, и $v_1 = a_{i_1}^{-1}$, если $\varepsilon_1 = -1$;

2) если $j > 1$, то

$$v_j = \prod_{k=1}^{j-1} a_{i_k}^{\varepsilon_k}, \text{ если } \varepsilon_j = 1, \text{ и } v_j = \prod_{k=1}^{j} a_{i_k}^{\varepsilon_k}, \text{ если } \varepsilon_j = -1.$$

Лемма 2. *Пусть путь γ в многообразии M с началом в вершине проходит по ребрам в последовательности, заданной словом $a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$ в образующих, и пусть $\Gamma \in C_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z})$ — одномерная цепь, соответствующая поднятию этого пути из вершины, соответствующей единичному элементу. Тогда $\Gamma = \sum\limits_{j=1}^{l} \varepsilon_{i_j} v_j \bar{a}_{i_j}$.*

Доказательство. Результат леммы непосредственно следует из леммы 1.

Теперь определим оператор d, отображающий множество слов в образующих группы $\pi_1(M)$ в группу цепей $C_1(M; \mathbb{Z}(\pi_1(M)))$ и сопоставляющий каждому слову $w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_l}^{\varepsilon_l}$ цепь $dw = \sum\limits_{j=1}^{l} \varepsilon_{i_j} v_j \bar{a}_{i_j}$. По лемме 2 этот оператор реализует поднятие пути, проходящего по ребрам многообразия M, как одномерную цепь из группы $C_1(\widetilde{M}; \mathbb{Z})$. Оператор d обладает следующими очевидными свойствами.

1. Пусть w_1 и w_2 — слова в образующих, причем слово w_1 реализует некоторый элемент g_1 фундаментальной группы, тогда $d(w_1 w_2) = d(w_1) + g_1 dw_2$.

2. Пусть слово w реализует некоторый элемент g фундаментальной группы. Тогда $d(w^{-1}) = -g^{-1} dw$.

В дальнейшем нам будет нужно сопоставление элементам фундаментальной группы прообразов трехмерных клеток многообразия M при накрытии. Сделаем это следующим образом; пусть B — трехмерная клетка многообразия M, и пусть x — точка внутри клетки B. Пусть дуга γ (без самопересечений) с началом в вершине v и концом в точке x пересекает двумерный скелет многообразия M только в точке v. Прообраз по накрытию клетки B, соответствующий элементу g фундаментальной группы, — это трехмерная клетка многообразия $\widetilde{M}$, которая содержит точку $\tilde{x}$, являющуюся концом поднятия дуги γ из начала в прообразе вершины v, соответствующим элементу g.

Итак, каждой клетке многообразия $\widetilde{M}$ мы поставили в соответствие элемент группы $\pi_1(M)$.

Замечание 2. По построению элементы, поставленные в соответствие каждой клетке, полностью определяются тем, какой из вершин многообразия $\widetilde{M}$ сопоставлен единичный элемент.

Далее, говоря о модульной структуре на группах $C_*(M; \mathbb{Z}[\pi_1(M)])$, мы будем иметь в виду, что каждый элемент g группы $\pi_1(M)$ действует на цепь, умножая все ее коэффициенты на элемент g слева. Очевидно, такое действие группы задает на группах цепей структуру левого модуля, причем указанное левое действие группы $\pi_1(M)$ коммутирует с ее общепринятым стандартным правым действием: $f(gR) = (gf)R$, где $f, g \in \pi_1(M)$.

2.2. Определения основных понятий. Авторами работы [3] разработан алгоритм вычисления степени отображения одного замкнутого трехмерного многообразия на другое, использующий понятия *граничный цикл*, *характеристическая коцепь* и *индуцированное отображение цепей*.

2.2.1. Граничный цикл. Пусть M — замкнутое ориентированное связное трехмерное многообразие, в клеточном разбиении которого присутствует ровно одна вершина, и пусть $p : \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрытие. Как было отмечено, накрытие p индуцирует клеточное разбиение многообразия $\widetilde{M}$, в котором клетками являются компоненты связности прообразов клеток многообразия M.

Пусть $B \subset M$ — трехмерная клетка многообразия M, тогда ее *граничным циклом* $\partial\widetilde{B} \in C_2(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ называется граница одного из ее прообразов $\widetilde{B} \subset \widetilde{M}$.

Замечание 3. Граничный цикл трехмерной клетки вычисляется неоднозначно с точностью до умножения слева на любой элемент фундаментальной группы, так как позволяется выбрать любой прообраз клетки в накрывающем пространстве.

Определение 3. *Граничным циклом* $\partial\tilde{\beta}_M \in C_2(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ многообразия M называется сумма граничных циклов всех его трехмерных клеток, взятых с коэффициентом 1, если ориентация клетки совпадает с ориентацией многообразия M, и с коэффициентом -1 в противном случае.

2.2.2. Характеристическая коцепь.

Определение 4. Пусть в клеточном разбиении многообразия M есть ровно одна трехмерная клетка. *Характеристическая коцепь* $\xi_M : C^2(\widetilde{M};\mathbb{Z}_n) \to \mathbb{Z}_n$ есть линейный функционал, принимающий значение 1 на каждом граничном цикле $\partial\tilde{\beta}_M$.

Другими словами, ξ_M — коцепь такая, кограница которой $\delta\xi_M$ равна 1 на каждой 3-клетке.

2.2.3. Индуцированное отображение цепей. Отображение двумерных цепей, индуцированное отображением f, — это модульный гомоморфизм $\tilde{f}_* : C_2(M;\mathbb{Z}[\pi_1(M)]) \to C_2(P;\mathbb{Z}[\pi_1(P)])$ (естественно, отображение f должно быть клеточным).

В силу линейности индуцированное отображение цепей задается образами всех 2-клеток многообразия M. Индуцированное отображение цепей нужно для того, чтобы найти образ граничного цикла $\partial\tilde{\beta}_M$ в $\widetilde{P}$ как двумерную цепь.

2.3. Вычисление степени отображения. Пусть $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(P)$ — гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный отображением $f : M \to P$. Тогда степень отображения f, взятая по модулю n, где $n = |\pi_1(P)|$, зависит только от гомоморфизма f_*. В то же время любое отображение можно изменить внутри некоторого шара так, что степень отображения изменится на $\pm n$. Поэтому в дальнейшем нас будет интересовать не сама степень, а ее вычет по модулю n.

Пусть $f : M \to P$ — клеточное отображение между двумя замкнутыми трехмерными многообразиями, причем фундаментальная группа $\pi_1(P)$ конечна и имеет порядок n.

В работе [3] доказана следующая формула для вычисления степени такого отображения.

Теорема 2 [4, теорема 2.1]. *Степень отображения $f : M \to P$ можно вычислить по формуле* $\deg f \equiv \xi_P(\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_M))(\mathrm{mod}\, n)$.

§ 3. Алгоритм вычисления степени отображения

3.1 Граничный цикл многообразия Зейферта. Для вычисления граничного цикла многообразия Зейферта, следуя работе [3], сначала рассмотрим клеточный комплекс, реализующий копредставление $\langle a, t \mid R_1, R_2\rangle$. Здесь $R_1 = at^{-1}a^{-1}t$, $R_2 = w_{\alpha,\beta}(a, t)$, где α и β — пара взаимно простых чисел ($\alpha \geq 0$), а $w_{\alpha,\beta}(a,t)$ — слово в образующих a и t, реализующее замкнутую кривую без самопересечений на торе, образованном клеткой R_1, проходящую α раз вдоль ребра a и β раз вдоль ребра t. В общем случае мы не можем сказать, что $w_{\alpha,\beta}(a,t) = a^\alpha t^\beta$, так как копредставление может оказаться негеометрическим.

Для вычисления слова $w_{\alpha,\beta}$ можно использовать следующее рекурсивное правило:

$$w_{1,0}(a,t) = a; w_{0,\pm 1}(a,t) = t^{\pm 1}; \quad w_{\alpha+\beta,\beta}(a,t) = w_{\alpha,\beta}(a,at);$$

$$w_{\alpha,\alpha+\beta}(a,t) = w_{\alpha,\beta}(at,t).$$

Лемма 3 [3]. *Пусть K — клеточный комплекс, реализующий копредставление $\langle a,t \mid R_1, R_2\rangle$, где $R_1 = at^{-1}a^{-1}t$, $R_2 = w_{\alpha,\beta}(a,t)$. Пусть M — полноторие, полученное приклеиванием трехмерной клетки B к комплексу K, тогда $\partial\tilde{\beta}_M = -R_1 + (1 - a^x t^y)R_2$, где $\alpha y - \beta x = -1$.*

Мы будем считать, что многообразие Зейферта M с базой «сфера» и тремя особыми слоями разбито на клетки в соответствии с геометрическим копредставлением: $\pi_1(M) \cong \langle a_1, a_2, a_3, t \mid R_j, 1 \le j \le 7\rangle$, где $R_{2i-1} = a_i t^{-1} a_i^{-1} t$, $R_{2i} = w_{\alpha_i,\beta_i}(a,t)$, $i = 1,2,3$, $R_7 = a_1 a_2 a_3$. В таком разбиении присутствуют одна вершина и четыре трехмерные клетки, три из которых соответствуют окрестностям особых слоев и устроены так же, как клетка B в лемме 3, а одна — окрестности регулярного слоя. Образующая t соответствует регулярному слою.

В работе [3] получена следующая формула для вычисления граничного цикла (мы приводим ее с доказательством, чтобы по аналогии доказать теорему 4).

Теорема 3. *Пусть M — многообразие Зейферта с базой «сфера» и тремя особыми слоями: $M = M(S^2; (\alpha_1,\beta_1); (\alpha_2,\beta_2); (\alpha_3,\beta_3))$. Тогда его граничный цикл равен*

$$\partial\tilde{\beta}_M = \sum_{i=1}^{3} \bigl(-R_{2i-1} + \bigl(1 - a_i^{x_i} t^{y_i}\bigr) R_{2i}\bigr) + (R_1 + a_1 R_3 + a_1 a_2 R_5 - (1 - t^{-1}) R_7)$$

(целые числа x_i и y_i таковы, что $\alpha_i y_i - \beta_i x_i = -1$).

Доказательство. Граничный цикл многообразия M по определению равен сумме граничных циклов его трехмерных клеток. Первые три слагаемых — это граничные циклы клеток, соответствующих окрестностям особых слоев, вычисленные в соответствии с леммой 3. Четвертое слагаемое — граничный цикл клетки, соответствующей окрестности регулярного слоя.

Рассмотрим теперь многообразие Зейферта с базой «тор» и одним особым слоем: $M = M(T^2; (\alpha_1, \beta_1))$. Клеточное разбиение, которое мы будем использовать, соответствует геометрическому копредставлению $\langle a_1, t, u, h \mid R_j, 1 \le j \le 5\rangle$, где $R_1 = a_1 t^{-1} a_1^{-1} t$, $R_2 = w_{\alpha_1,\beta_1}(a_1,t)$, $R_3 = ht^{-1}h^{-1}t$, $R_4 = ut^{-1}u^{-1}t$, $R_5 = hu^{-1}h^{-1}ua_1$. В таком разбиении присутствуют одна вершина и две трехмерные клетки, одна из которых соответствует окрестности особого слоя, а другая — окрестности регулярного: $(T^2 \backslash D^2) \times S^1$. Более точно, ребро a_1 — меридиан тора $\partial D^2 \times S^1$, t — регулярный слой $\{*\} \times S^1$, u и h — параллель и меридиан проколотого тора $(T^2 \backslash D^2) \times \{*\}$. Из клетки R_1 склеивается тор $\partial D^2 \times S^1$, клетка R_2 — меридиональный диск вклеиваемого полнотория, из клетки R_3 склеивается тор $h \times S^1$, из R_4 — тор $u \times S^1$, из R_5 — проколотый тор $(T^2 \backslash D^2) \times \{*\}$.

Теорема 4. *Пусть M — многообразие Зейферта с базой «тор» и одним особым слоем: $M = M(T^2; (\alpha_1, \beta_1))$. Тогда его граничный цикл равен*

$$\partial\tilde{\beta}_M = \bigl(-R_1 + \bigl(1 - a_1^x t^y\bigr)R_2\bigr) + (R_1 + (a_1 - u^{-1})R_3 + (u^{-1} - u^{-1}h)R_4 - (1 - t^{-1})R_5)$$

(целые числа x и y таковы, что $\alpha_1 y - \beta_1 x = -1$).

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы первое слагаемое граничного цикла получается по лемме 3, а второе — граничный цикл клетки, соответствующей окрестности регулярного слоя.

Небольшие отличия формул в лемме 3 и теоремах 3, 4 от аналогичных формул в работах [3–5] обусловлены некоторой разницей в обозначениях: разным выбором ориентации ребер и двумерных клеток. Обозначения, принятые в настоящей работе, представляются автору наиболее последовательными.

В дальнейшем, говоря о копредставлении фундаментальной группы многообразия Зейферта, мы будем придерживаться обозначений, введенных в двух предыдущих теоремах: $\pi_1(M) \cong \langle a_1, a_2, a_3, t \mid R_j,\ 1 \le j \le 7\rangle$, где $R_{2i-1} = a_i t^{-1} a_i^{-1} t$, $R_{2i} = w_{\alpha_i,\beta_i}(a,t)$, $i = 1, 2, 3$, $R_7 = a_1 a_2 a_3$ для многообразия Зейферта с базой «сфера» и тремя особыми слоями, и $\pi_1(M) \cong \langle a_1, t, u, h \mid R_j,\ 1 \le j \le 5\rangle$, где $R_1 = a_1 t^{-1} a_1^{-1} t$, $R_2 = w_{\alpha_1,\beta_1}(a_1, t)$ $R_3 = ht^{-1}h^{-1}t$, $R_4 = ut^{-1}u^{-1}t$, $R_5 = hu^{-1}h^{-1}ua_1$ для многообразия Зейферта с базой «тор» и одним особым слоем.

3.2. Вычисление индуцированного отображения двумерных цепей. Пусть $\langle a_1, \ldots a_q \mid R_1, \ldots R_r\rangle$ и $\langle b_1, \ldots b_s \mid Q_1, \ldots Q_t\rangle$ — геометрические представления фундаментальных групп $\pi_1(M)$ и $\pi_1(P)$ соответственно. Предположим, что гомоморфизм $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(P)$ задан набором слов h_i в образующих b_j, представляющих элементы $f_*(a_i)$ группы $\pi_1(P)$, $1 \le i \le r$. Пусть R — одно из соотношений R_i. Чтобы вычислить образ $f_*(R) \in C_2(P, \mathbb{Z}[\pi_1(P)])$ соответствующей 2-клетки, можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. Заменим в R каждое a_i на h_i и a_i^{-1} на h_i^{-1}. Получим некоторое слово w в образующих b_j, представляющее нейтральный элемент.

2. Представим w в виде $w = \prod\limits_k v_k Q_{i_k}^{\varepsilon_k} v_k^{-1}$, где $\varepsilon_k = \pm 1$, v_k — слова в свободной группе, порожденной образующими b_j.

3. $f_*(R)$ получим в виде «логарифма»

$$\log(w) = \sum_k \varepsilon_k \hat{v}_k Q_{i_k},$$

где $\hat{v}_k$ — образ слова v_k в группе $\pi_1(P)$.

Второй шаг алгоритма, вообще говоря, неоднозначен, так как слово w можно представить в виде указанного произведения разными способами.

3.3. Двойственные образующие фундаментальной группы. Пусть замкнутое ориентированное многообразие M с конечной фундаментальной группой $\pi_1(M)$ порядка n снабжено клеточной структурой, в которой присутствуют ровно одна вершина v и ровно одна трехмерная клетка B. Пусть $\langle a_1, \ldots, a_k \mid R_1, \ldots, R_k\rangle$ — геометрическое копредставление фундаментальной группы $\pi_1(M)$, соответствующее данному клеточному разбиению. Зафиксируем точку x внутри клетки B и рассмотрим такие проходящие через нее петли u_i, $i = 1, \ldots, k$, что каждая петля u_i пересекает двумерный скелет многообразия M в единственной точке, лежащей внутри двумерной клетки R_i, причем пересечение положительно.

Замечание 4. Петли u_i порождают фундаментальную группу $\pi_1(M;x)$.

Действительно, рассмотрим петлю, представляющую произвольный элемент группы $\pi_1(M;x)$ и приведенную в общее положение по отношению к клеточному разбиению многообразия M. Каждый участок петли между двумя ее последовательными пересечениями с двумерными клетками можно изотопно продеформировать так, чтобы он проходил через точку x. После этого данную петлю можно представить как произведение петель, каждая из которых проходит через точку x и пересекает двумерный скелет многообразия M в единственной точке, лежащей внутри одной из двумерных клеток, а все такие петли реализуют элементы u_i или u_i^{-1}.

Петли u_i, $i = 1, \ldots, k$, и соответствующие им элементы фундаментальной группы $\pi_1(M;v)$ будем называть *двойственными образующими*. Если такая петля положительно пересекает двумерную клетку R_i, то будем говорить, что она *двойственна к клетке* R_i.

3.4. Вычисление характеристической коцепи. Характеристическую коцепь можно построить, например, следующим образом. Пусть на трехмерном многообразии P с конечной фундаментальной группой $\pi_1(P)$ порядка n задана клеточная структура с одной 3-клеткой, и пусть $p : \widetilde{P} \to P$ — универсальное накрытие, тогда единственной 3-клетке в P соответствуют n 3-клеток в $\widetilde{P}$. Возьмем одну точку x внутри единственной 3-клетки многообразия P. В накрывающем пространстве ей соответствуют n прообразов. Один из них (назовем его *базисной точкой*) соединим со всеми остальными прообразами дугами, трансверсальными к двумерному скелету многообразия $\widetilde{P}$. Получившаяся «метелка» (объединение дуг) задает функционал на 2-клетках $\widetilde{P}$, равный на каждой клетке индексу пересечения «метелки» и данной клетки. Продолжив этот функционал по линейности на всю группу двумерных цепей $C_2(\widetilde{P})$, получим характеристическую коцепь ξ_P, так как легко показать, что на каждом граничном цикле в $\widetilde{P}$ он принимает значение 1. Действительно, для каждой 3-клетки, кроме содержащей базисную точку, только одна из дуг заканчивается внутри нее, а все остальные либо вообще не пересекают ее, либо пересекают с индексом 0 (т. е. входят и выходят). Из базисной клетки выходит $n-1$ дуг, т. е. значение функционала на ее границе равно $-(n-1) \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$.

Заметим, что «метелка» может быть аппроксимирована одномерной цепью в двойственном клеточном разбиении $\widetilde{P}$. Обозначим ребра двойственного клеточного разбиения многообразия P (и соответствующие им двойственные образующие группы $\pi_1(P)$) через u_i, $i = 1, \ldots, s$, где u_i — двойственное ребро, пересекающее клетку Q_i с индексом 1.

Замечание 5. Двойственное клеточное разбиение мы понимаем в следующем смысле. Исходному клеточному разбиению многообразия соответствует разбиение на ручки (каждой клетке размерности i соответствует ручка индекса i, $0 \le i \le 3$). В этом разбиении заменяем каждую ручку индекса i ручкой индекса $3-i$, $0 \le i \le 3$. Фактически само разбиение не меняется, меняются только индексы ручек. Теперь от полученного нового разбиения на ручки переходим снова к разбиению на клетки, которое считаем двойственным к исходному. Естественно, ребра двойственного клеточного разбиения реализуют двойственные образующие фундаментальной группы многообразия. Конструкция двойственного клеточного разбиения может быть найдена, например, в [6, гл. X].

Утверждение 1. *Пусть слова* $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ *в двойственных образующих* u_i *реализуют без повторения все элементы группы* $\pi_1(P)$. *Тогда* $\xi_P = \sum\limits_{i=0}^{n-1} dw_i$.

Доказательство. Каждая дуга построенной выше «метелки» является поднятием композицией петель, соответствующих двойственным образующим группы $\pi_1(P)$. Чтобы перечислить все дуги «метелки», достаточно представить все элементы фундаментальной группы в виде слов в двойственных образующих.

Объединение дуг, задаваемых словами w_i, и есть построенная выше «метелка», а $\sum\limits_{i=0}^{n-1} dw_i$ — ее клеточная аппроксимация в двойственном разбиении (по лемме 2).

Утверждение 2. *Если* L — *граница в* $C_2(\widetilde{P})$, *то* $\xi_P(vL) = \xi_P(L)$ *для всех* $v \in \pi_1(P)$.

Доказательство. Пусть K — граница некоторой 3-клетки многообразия $\widetilde{P}$. Тогда по определению характеристической коцепи $\xi_P(vK) = \xi_P(K) = 1$. Таким образом, в силу аддитивности функционала ξ_P на группе цепей $C_2(P; \mathbb{Z}_n[\pi_1(P)])$ для любой границы L выполняется равенство $\xi_P(vL) = \xi_P(L)$.

§ 4. Гомологическая сфера Пуанкаре

4.1. Фундаментальная группа. Напомним, что гомологическая сфера Пуанкаре S^3/P_{120} — это фактор-пространство сферы по действию группы движений додекаэдра и, кроме того, многообразие Зейферта $M(S^2; (2,-1); (3,1); (5,1))$. Его фундаментальная группа есть $P_{120} \cong SL_2(\mathbb{Z}_5) \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^5 \rangle$. Нас будет интересовать геометрическое копредставление $P_{120} \cong \langle a, c \mid Q_1, Q_2 \rangle$, где $Q_1 = c^5a^{-2}$, $Q_2 = aca^{-1}ca^{-1}c$. Таким же копредставлением пользуются авторы работы [3]; в частности, они приводят соответствующую диаграмму Хегора многообразия S^3/P_{120}. Двойственные образующие: $u_1 = c$ (соответствует соотношению Q_1) и $u_2 = c^{-1}a$ (соответствует соотношению Q_2). Все вычисления в этой группе легко выполняются, если рассматривать ее как $SL_2(\mathbb{Z}_5)$, причем $a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (в дальнейшем мы будем придерживаться таких обозначений). Порядок элемента a равен 4, а порядок элемента c равен 10. В группе присутствуют элементы порядков 1, 2 (только один), 3, 4, 5, 6 и 10. Центр группы состоит из двух элементов (единичный и элемент порядка 2). Все элементы группы как слова в образующих можно перечислить, например, так: c^i, c^iac^j, $c^iac^2ac^j$, $c^iac^2ac^{-2}a$, где $i = 0, \ldots, 9$, $j = 0, \ldots, 4$.

4.2. Характеристическая коцепь для S^3/P_{120}. В соответствии с утверждением 1 характеристическую коцепь можно найти по формуле $\xi = \xi_{S^3/P_{120}} = \sum\limits_{i=0}^{119} dw_i$, где w_i — слова в двойственных образующих u_1 и u_2, представляющие все элементы группы P_{120}. Слова w_i можно выбрать следующим образом:

1) $w_i = u_1^i$, $i = 1, \ldots, 10$;

2) $w_{10+5i+j} = u_1^{i+1}u_2u_1^j$, $i = 0, \ldots, 9$, $j = 0, \ldots, 4$;
3) $w_{60+5i+j} = u_1^{i+1}u_2u_1^3u_2u_1^j$, $i = 0, \ldots, 9$, $j = 0, \ldots, 4$;
4) $w_{110+i} = u_1^{i+1}u_2u_1^3u_2u_1^{-1}u_2$, $i = 0, \ldots, 9$.

4.3. Операция логарифмирования в случае S^3/P_{120}. Напомним, что операция логарифмирования слова в образующих некоторой группы, представляющего единичный элемент, — это сопоставление слову $w = \prod\limits_k v_k Q_{i_k}^{\varepsilon_k} v_k^{-1}$ ($\varepsilon_k = \pm 1$), представленному в виде произведения сопряженных соотношений группы, суммы $\log(w) = \sum\limits_k \varepsilon_k \hat{v}_k Q_{i_k}$ где $\hat{v}_k$ — значение слова v_k в группе.

В работе [3] построен алгоритм логарифмирования произвольного слова, представляющего единичный элемент в группе P_{120} с образующими a, c и соотношениями $Q_1 = c^5a^{-2}$, $Q_2 = aca^{-1}ca^{-1}c$. Алгоритм основан на использовании следующего набора правил:

1) $\log(v_1acav_2) = \log(v_1c^4ac^{-1}v_2) + \hat{v}_1\lambda_0$, где $\lambda_0 = \log(aca(c^4ac^{-1})^{-1})$;
2) $\log(v_1ac^{-1}av_2) = \log(v_1cacv_2) + \hat{v}_1\lambda_1$, где $\lambda_1 = \log(ac^{-1}a(cac)^{-1})$;
3) $\log(v_1ac^{-2}av_2) = \log(v_1c^{-4}ac^2acv_2) + \hat{v}_1\lambda_2$, где $\lambda_2 = \log(ac^{-2}a(c^{-4}ac^2ac)^{-1})$;
4) $\log(v_1ac^2ac^2av_2) = \log(v_1c^4ac^2ac^{-1}v_2) + \hat{v}_1\lambda_3$,
где $\lambda_3 = \log(ac^2ac^2a(c^4ac^2ac^{-1})^{-1})$;
5) $\log(v_1ac^2ac^{-2}ac^{-1}v_2) = \log(v_1cac^2ac^{-2}av_2) + \hat{v}_1\lambda_4$,
где $\lambda_4 = \log(ac^2ac^{-2}ac^{-1}(cac^2ac^{-2}a))^{-1})$;
6) $\log(c^{10}) = \lambda_5$, $\log(c^{-10}) = -\lambda_5$.

Здесь v_1, v_2 — слова в образующих a и c, $\hat{v}_1$ — значение слова v_1.

Алгоритм заключается в следующем: с помощью последовательного применения преобразований, описанных в правилах 1–5, исходное слово приводится к виду c^{10n}, $n \in \mathbb{Z}$. Это всегда возможно; после каждого преобразования слово продолжает представлять единичный элемент. Порядок элемента c в группе равно 10, поэтому в конце концов получается слово c^{10n}. Логарифм слова c^{10n} вычисляется как $n\lambda_5$. В результате логарифм исходного слова w находится как $\sum\limits_{i=0}^{5} n_i e_i \lambda_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, $e_i \in P_{120}$, $i = 0, \ldots, 5$.

§ 5. Минимальность многообразий Зейферта

5.1. Вспомогательные результаты. Напомним, что для доказательства минимальности многообразий Зейферта серий (d1)–(d4) (см. теорему 1) достаточно доказать для них отсутствие отображений степени 1 на гомологическую сферу Пуанкаре.

Для доказательства свойств степеней отображений многообразий серий (d1) и (d2) потребуются несколько вспомогательных результатов.

Лемма 4. *Пусть v — некоторый элемент порядка k в группе $\pi_1(P)$, и пусть слово ω в образующих той же группы реализует элемент v. Тогда значение $\xi_P((v-1)\log(\omega^k))$ кратно числу $\frac{|\pi_1(P)|}{k}$.*

Доказательство. Вначале покажем, что цепь $(v-1)\log(\omega^k)$ является циклом. Напомним, что если представить замкнутый путь, реализующий слово ω и проходящий по ребрам многообразия $\widetilde{P}$, как одномерную цепь $l \in C_1(\widetilde{P})$, то логарифм слова ω — это некоторая двумерная цепь, границей которой является цепь l. Зафиксируем цепь $L = \log(\omega^k)$ и вычислим логарифм другим способом: $\log(\omega^k) = \log(\omega \cdot \omega^k \cdot \omega^{-1}) = v\log(\omega^k) = vL$. Таким образом, $(v-1)L = vL - L$ —

разность двух цепей, являющихся логарифмами одного и того же слова, а значит, имеющих одинаковые границы. Поэтому $\partial((v-1)L) = 0$ и цепь $(v-1)L$ является циклом.

Так как универсально накрывающее пространство $\widetilde{P}$ — гомологическая сфера, то цепь $(v-1)L$, будучи циклом, является и границей. По утверждению 2 $\xi_P(v^i(v-1)L) = \xi_P((v-1)L), i = 0, \dots, k-1$. В то же время

$$\sum_{i=0}^{k-1} \xi_P(v^i(v-1)L) = \xi_P\left(\sum_{i=0}^{k-1} v^i(v-1)L\right) = \xi_P((v^k-1)L) = 0.$$

Напомним, что вычисления производятся по модулю $|\pi_1(P)|$. Таким образом, $k\xi_P((v-1)L \equiv 0(\mathrm{mod}\,|\pi_1(P)|)$, поэтому $\xi_P((v-1)L)$ кратно $\frac{|\pi_1(P)|}{k}$.

Следствие 1. *Пусть v — некоторый элемент порядка k в группе $\pi_1(P)$, и пусть слово ω в образующих той же группы реализует элемент v; $x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Тогда значение $\xi_P((v^x-1)\log(\omega^k))$ кратно числу $\frac{|\pi_1(P)|}{k}$.*

Доказательство. Результат легко следует из леммы 4, если представить $v^x - 1$ как $\sum\limits_{i=0}^{x-1} v^i(v-1)$.

Определение 5. Пусть фундаментальные группы многообразий M_1 и M_2 имеют фиксированные копредставления с одинаковым числом образующих:

$$\pi_1(M_1) = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \mid R_1, R_2, \dots\rangle, \quad \pi_1(M_2) = \langle x'_1, x'_2, \dots, x'_k \mid Q_1, Q_2, \dots\rangle$$

(наборы образующих упорядочены.) Будем говорить, что отображения $f_1 : M_1 \to P$ и $f_2 : M_2 \to P$ в некоторое многообразие P *аналогичны*, если $(f_1)_*(x_i) = (f_2)_*(x'_i)$ для всех $i = 1, \dots, k$.

5.2. Минимальность многообразий серии (d1).

Лемма 5. *Пусть многообразия Зейферта $M = M(T^2; (\alpha_1, \varepsilon))$, $M' = M'(T^2; (\alpha'_1, \varepsilon))$ таковы, что α_1 и α'_1 делятся на k, где $k = 3$ или 5, и $\varepsilon = \pm 1$. Пусть отображения $f : M \to S^3/P_{120}$ и $f' : M' \to S^3/P_{120}$ аналогичны. Тогда разность $\deg f' - \deg f$ четна.*

Будем считать, что для каждого многообразия Зейферта $M = M(T^2; (\alpha_1; \beta_1))$ зафиксировано геометрическое копредставление его фундаментальной группы: $\pi_1(M) = \langle a_1, h, u, t \mid R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\rangle$, где $R_1 = a_1 t^{-1} a_1^{-1} t$, $R_2 = w_{\alpha_1,\beta_1}(a_1, t)$, $R_3 = ht^{-1}h^{-1}t$, $R_4 = ut^{-1}u^{-1}t$, $R_5 = a_1 h u^{-1} h^{-1} u$ (см. п. 3.1).

Доказательство. Вычислим степень отображения f:

$$\begin{aligned}
&\deg f = \xi_{S^3/P_{120}}[\tilde{f}_*(\partial\tilde{\beta}_{1M})] \\
&= \xi_{S^3/P_{120}}[\tilde{f}_*((1 - a_1^x t^y)R_2 + (u^{-1} - a_1)R_3 + (u^{-1} - u^{-1}h)R_4 - (1 - t^{-1})R_5)] \\
&\qquad = \xi_{S^3/P_{120}}[(f_*(1 - a_1^x t^y))\tilde{f}_*(R_2) + (f_*(u)^{-1} - f(a_1))\tilde{f}_*(R_3) \\
&\qquad\qquad + (f_*(u)^{-1} - f_*(u^{-1}h))\tilde{f}_*(R_4) - (1 - f_*(t)^{-1})\tilde{f}_*(R_5)].
\end{aligned}$$

Числа x и y должны удовлетворять условию $\alpha_1 y - \varepsilon x = -1$. Можно, например, выбрать решение $x = \varepsilon$, $y = 0$, тогда $f(a_1^x t^y) = f_*(a_1)^\varepsilon$. Теперь, чтобы вычислить все $\tilde{f}_*(R_i)$, нужно для каждого из элементов $f_*(a_1)$, $f_*(u)$, $f_*(h)$, $f_*(t)$ выбрать слово в образующих группы P_{120}, реализующее данный элемент. Сделаем это следующим образом:

1) для элементов $f_*(u)$, $f_*(h)$ выберем произвольные реализующие их слова v_u и v_h;

2) для элемента $f_*(a_1)$ выберем слово $v_{a_1} = v_u^{-1}v_hv_uv_h^{-1}$;

3) для элемента $f_*(t)$ выберем тривиальное слово, если $f_*(t)=1$, или слово $v_t = v_{a_1}^{\varepsilon k}$ в противном случае.

При таком выборе

$$\tilde f_*(R_5) = \log\bigl(v_u^{-1}v_hv_uv_h^{-1}v_hv_u^{-1}v_h^{-1}v_u\bigr) = \log(1) = 0;$$

$$\tilde f_*(R_2) = \log\bigl(v_{a_1}^{\alpha_1+ks}\bigr) = \log\bigl(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha_1}{k}+s)}\bigr),$$

где $s = \begin{cases} 0, & f_*(a_1)^k = 1, \\ 1, & f_*(a_1)^k \neq 1, \end{cases}$ и тогда

$$\deg f = \xi_{S^3/P_{120}}\bigl[(1-f_*(a_1)^{\varepsilon})\log\bigl(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha_1}{k}+s)}\bigr) + (f_*(u)^{-1} - f(a_1))L_3 + (f_*(u)^{-1} - f_*(u^{-1}h))L_4\bigr],$$

где $L_3 = \log\bigl(v_hv_t^{-1}v_h^{-1}v_t\bigr)$, $L_4 = \log\bigl(v_hv_t^{-1}v_h^{-1}v_t\bigr)$.

Поскольку отображения f и f' аналогичны, то $f'_*(a'_1) = f_*(a_1)$, $f'_*(h') = f_*(h)$, $f'_*(u') = f_*(u)$, $f'_*(t') = f_*(t)$, и эти элементы мы можем представить теми же словами v_{a_1}, v_h, v_u и v_t соответственно. Тогда

$$\deg f' = \xi_{S^3/P_{120}}\bigl[(1-f_*(a_1)^{\varepsilon})\log\bigl(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha'_1}{k}+s)}\bigr) + (f_*(u)^{-1} - f(a_1))L_3 + (f_*(u)^{-1} - f_*(u^{-1}h))L_4\bigr]$$

и

$$\deg f' - \deg f = \xi_{S^3/P_{120}}[(1-f_*(a_1)^{\varepsilon})\log\bigl(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha'_1}{k}+s)}\bigr)] - \xi_{S^3/P_{120}}\bigl[(1-f_*(a_1)^{\varepsilon})\log(v_{a_1}^{k(\frac{\alpha_1}{k}+s)})\bigr].$$

По лемме 4 оба слагаемых делятся на $\frac{120}{\operatorname{ord}(f_*(a_1))}$, где $\operatorname{ord}(f_*(a_1))$ — порядок элемента $f_*(a_1)$ в группе P_{120}, который может быть равен либо k, либо $2k$. В обоих случаях число $\frac{120}{\operatorname{ord} f_*(a_1)}$ четное, следовательно, и вся разность четная.

Утверждение 3. *Для многообразий $M(T^2;(3,\pm1))$ и $M(T^2;(5,\pm1))$ все степени отображений на S^3/P_{120}, индуцирующих сюръективные гомоморфизмы фундаментальных групп, имеют четные степени.*

С помощью написанной автором компьютерной программы вычислены степени всех отображений многообразий $M(T^2;(3,\pm1))$ и $M(T^2;(5,\pm1))$ на гомологическую сферу Пуанкаре. Среди полученных степеней присутствуют все четные числа от 0 до 118 (по модулю 120), но нет ни одного нечетного, в том числе и единицы. Вместе с теоремой 5 это означает минимальность всех многообразий серии (d1).

5.3. Минимальность многообразий серии (d2).

Теорема 5. *Пусть M — многообразие Зейферта с базой S^2 и с тремя особыми слоями $((2^k\alpha_1,\beta_1);(2^k\alpha_2,\beta_2);(2^k\alpha_3,\beta_3))$, где $3|\alpha_2$ и $5|\alpha_3$, и $k>1$. Тогда степень любого отображения $f : M \to S^3/P_{120}$ четна.*

Доказательство. Будем пользоваться введенным ранее копредставлением фундаментальной группы многообразия M: $\pi_1(M) = \langle a_1, a_2, a_3, t \mid R_j, 1 \leq$

$j \le 7\rangle$, где $R_{2i-1} = a_i t^{-1} a_i^{-1} t$, $R_{2i} = w_{\alpha_i,\beta_i}(a,t)$, $i = 1,2,3$, $R_7 = a_1 a_2 a_3$. Вспомним, что $a_1^{2^k\alpha_1} t^{\beta_1} = 1$, а β_1 нечетно. Элемент t центральный, поэтому его образ $f_*(t)$ должен быть центральным. В группе P_{120} всего два центральных элемента: единица и $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, причем уравнение $x^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ решений не имеет. Поэтому $f_*(t) = 1$. Для представления элемента $f_*(t)$ мы выберем, естественно, тривиальное слово, для представления элементов $f_*(a_1)$, $f_*(a_2)$ и $f_*(a_3)$ — слова v_1, v_2 и v_3 соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \deg f = \xi_P\big((1 - f_*(a_1)^{x_1}) \log\big(v_1^{2^k\alpha_1}\big) + (1 - f_*(a_2)^{x_2}) \log\big(v_2^{2^k\alpha_2}\big) \\ + (1 - f_*(a_3)^{x_3}) \log\big(v_3^{2^k\alpha_3}\big)\big) = \xi_P\big((1 - f_*(a_1)^{x_1}) \log\big(v_1^{2^k\alpha_1}\big)\big) \\ + \xi_P\big((1 - f_*(a_2)^{x_2}) \log\big(v_2^{2^k\alpha_2}\big)\big) + \xi_P\big((1 - f_*(a_3)^{x_3}) \log\big(v_3^{2^k\alpha_3}\big)\big). \end{aligned}$$

По лемме 4 первое слагаемое делится на $\frac{120}{\operatorname{ord} f_*(a_1)}$, второе — на $\frac{120}{\operatorname{ord} f_*(a_2)}$, третье — на $\frac{120}{\operatorname{ord} f_*(a_3)}$. В группе P_{120} есть элементы порядков 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 10. В каждом из этих случаев числа $\frac{120}{\operatorname{ord} f_*(a_i)}$ четны ($i = 1,2,3$), следовательно, и вся сумма четна. Таким образом, степень любого отображения многообразия M на многообразие S^3/P_{120} четна, и, следовательно, M минимально.

5.4. Минимальность многообразий серии (d3).

Теорема 6. *Пусть M — многообразие Зейферта с базой S^2 и с тремя особыми слоями $((2\alpha_1,\beta_1);(2\alpha_2,\beta_2);(2\alpha_3,\beta_3))$, где $3|\alpha_2$, $5|\alpha_3$ и все α_i нечетны. Тогда для каждого отображения $f : M \to S^3/P_{120}$ верно по крайней мере одно из утверждений:*

1) *степень $\deg f$ четна;*

2) *гомоморфизм $f_* : \pi_1(M) \to P_{120}$ переводит образующие a_1, a_2 и a_3 в элементы порядка 4.*

Доказательство. Вспомним, что $\left(a_2^6\right)^{\frac{\alpha_2}{3}} t^{\beta_2} = 1$. Если $f_*(t) = 1$, то доказательство четности степени отображения в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы.

Рассмотрим случай, когда $f_*(t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Так как число α_2 нечетно, $f_*(a_2)^6 = f_*(t)$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что $f_*(a_3)^{10} = f_*(t)$ и $f_*(a_1)^2 = f_*(t)$. Это возможно только в том случае, если $\operatorname{ord} f_*(a_1) = \operatorname{ord} f_*(a_2) = \operatorname{ord} f_*(a_3) = 4$.

Попробуем вывести явную формулу для степеней отображений многообразий серии (d3) на гомологическую сферу Пуанкаре. Напомним, что все многообразия серии (d3) являются многообразиями Зейферта вида $M(S^2;(2p_1,\beta_1),(6p_2,\beta_2),(10p_3,\beta_3))$ с нечетными p_i и β_i, $i = 1,2,3$. Нас будут интересовать только те отображения, которые индуцируют гомоморфизмы фундаментальных групп, переводящие элементы a_1, a_2, a_3 в элементы порядка 4, так как в соответствии с теоремой 6 только они могут иметь нечетные степени.

Для каждого многообразия $M = M(S^2;(2p_1,\beta_1),(6p_2,\beta_2),(10p_3,\beta_3))$ (все p_i и β_i нечетны) зафиксируем такой гомоморфизм $f_* : \pi_1(M) \to P_{120}$, что $f_*(a_i) = e_i$, $i = 1,2,3$, и $\operatorname{ord} e_i = 4$, $i = 1,2,3$. Пусть отображение $f : M \to S^3/P_{120}$ индуцирует гомоморфизм f_*.

Лемма 6. *Имеет место соотношение*

$$\deg f \equiv \frac{p_1+\beta_1}{2}\xi\bigl(\bigl(1-e_1^{\beta_1}\bigr)\log\bigl(e_1^4\bigr)\bigr)+F(p_2,\beta_2,p_3,\beta_3)(\mathrm{mod}\,120),$$

где F — некоторая целочисленная функция.

Доказательство. Выберем слова в образующих группы P_{120}, реализующие элементы $f(t)$, $e_i=f(a_i)$, $i=1,2,3$, следующим образом: слова h_{a_1}, h_{a_2}, h_{a_3} выбираются произвольно, а $h_t=h_1^2$. Тогда из теоремы 2 следует, что

$$\deg f\equiv \xi\bigl(\bigl(1-e_1^{x+2y}\bigr)\log\bigl(h_1^{2p_1+2\beta_1}\bigr)\bigr)+F(p_2,\beta_2,p_3,\beta_3)(\mathrm{mod}\,120),$$

где $2p_1y-\beta_1x=-1$. Элемент e_1^{x+2y} определен однозначно: $x+2y\equiv\beta_1(\mathrm{mod}\,4)$ и $e_1^{x+2y}=e_1^{\beta_1}$. Слово h_1^4 реализует единичный элемент, поэтому

$$\xi\bigl(\bigl(1-e_1^{x+2y}\bigr)\log\bigl(h_1^{2p_1+2\beta_1}\bigr)\bigr)\equiv\frac{p_1+\beta_1}{2}\xi\bigl(\bigl(1-e_1^{\beta_1}\bigr)\log\bigl(h_1^4\bigr)\bigr)(\mathrm{mod}\,120).$$

Следующие две леммы аналогичны лемме 6, поэтому приводим их без доказательств.

Лемма 7. *Имеет место соотношение*

$$\deg f\equiv\frac{3p_2+\beta_2}{2}\xi\bigl(\bigl(1-e_2^{\beta_2}\bigr)\log\bigl(e_2^4\bigr)\bigr)+G(p_1,\beta_1,p_3,\beta_3)(\mathrm{mod}\,120),$$

где G — некоторая целочисленная функция.

Лемма 8. *Имеет место соотношение*

$$\deg f\equiv\frac{5p_3+\beta_3}{2}\xi\bigl(\bigl(1-e_3^{\beta_3}\bigr)\log\bigl(e_3^4\bigr)\bigr)+H(p_1,\beta_1,p_2,\beta_2)(\mathrm{mod}\,120),$$

где H — некоторая целочисленная функция.

Утверждения трех предыдущих лемм можно объединить в одно.

Теорема 7. *Пусть $M=M(S^2;(2p_1,\beta_1),(6p_2,\beta_2),(10p_3,\beta_3))$ (все p_i и β_i нечетны) и отображение $f:M\to S^3/P_{120}$ таково, что элементы $e_i=f_*(a_i)$, $i=1,2,3$, имеют порядок 4 в группе P_{120}. Тогда*

$$\begin{aligned}\deg f\equiv{}&\frac{p_1+\beta_1}{2}\xi\bigl(\bigl(1-e_1^{\beta_1}\bigr)\log\bigl(e_1^4\bigr)\bigr)\\&+\frac{3p_2+\beta_2}{2}\xi\bigl(\bigl(1-e_2^{\beta_2}\bigr)\log\bigl(e_2^4\bigr)\bigr)+\frac{5p_3+\beta_3}{2}\xi\bigl(\bigl(1-e_3^{\beta_3}\bigr)\log\bigl(e_3^4\bigr)\bigr)+n(\mathrm{mod}\,120),\end{aligned}$$

где n — некоторая константа (вообще говоря, зависящая от e_1, e_2 и e_3, но не зависящая от параметров многообразия M).

Доказательство прямо следует из трех предыдущих лемм.

Утверждение 4. *Для любого элемента $e_i\in P_{120}$ порядка 4 число $\xi\bigl((1-e_i)\log\bigl(e_i^4\bigr)\bigr)$ делится на 30.*

В группе P_{120} тридцать элементов порядка 4, и простая проверка показывает справедливость этого утверждения.

Утверждение 5. *Существует ровно 120 корректно определенных сюръективных гомоморфизмов из $\pi_1(M)$ в P_{120}, обладающих свойством: все элементы $f_*(a_i)\in P_{120}$ имеют порядок 4.*

Небольшое количество возможных гомоморфизмов позволяет перебрать их все для какого-нибудь конкретного многообразия M. Этот перебор был проделан и дал следующий результат.

Утверждение 6. *Константа n из теоремы* 7 *делится на* 15 *для любых элементов e_1, e_2 и e_3, удовлетворяющих условию теоремы.*

Следствие 2. *Все многообразия серии* (d3) *не имеют отображений степени* 1 *на гомологическую сферу Пуанкаре.*

Доказательство. Все многообразия серии (d3) являются многообразиями вида $M = M(S^2; (2p_1, \beta_1), (6p_2, \beta_2), (10p_3, \beta_3))$. По теореме 6 степени их отображений на S^3/P_{120}, индуцирующих эпиморфизмы фундаментальных групп, либо четны, либо в соответствии с теоремой 7 и утверждением 6 делятся на 15.

5.5. Минимальность многообразий серии (d4). Будем рассматривать многообразия Зейферта вида $M(S^2; (2p_1, \beta_1); (3p_2, \beta_2); (5p_3, \beta_3))$, где все p_i и β_i нечетны (этим условиям удовлетворяют все многообразия серии (d4)). Отображениям таких многообразий на гомологическую сферу Пуанкаре посвящена работа [3], где, в частности, показано, что все сюръективные гомоморфизмы фундаментальных групп $\varphi : M \to P_{120}$ в некотором смысле сводятся к некоторому стандартному гомоморфизму.

Определение 6. Будем называть *стандартным гомоморфизмом* такой гомоморфизм $\varphi_0 : \pi_1(M) \to P_{120}$, что $\varphi_0(t) = a^2$, $\varphi_0(a_1) = a$, $\varphi_0(a_2) = a^{-1}c$, $\varphi_0(a_3) = c^{-1}$. Отображение из M в S^3/P_{120} будем называть *стандартным*, если оно индуцирует стандартный гомоморфизм фундаментальных групп.

«Универсальность» стандартного гомоморфизма, доказанную в [3], можно сформулировать следующим образом.

Теорема 8. *Любой сюръективный гомоморфизм $\varphi : \pi_1(M) \to P_{120}$ может быть представлен как $\varphi = \psi \circ \varphi_0$, где ψ — биективный автоморфизм группы P_{120}, а φ_0 — стандартный гомоморфизм.*

Замечание 6. Все отображения гомологической сферы Пуанкаре на себя, индуцирующие биективные автоморфизмы фундаментальной группы, имеют степени 1 или 49 $(\mathrm{mod}\, 120)$. Это означает, что для любого отображения степени n из M в S^3/P_{120} можно построить отображение степени $49n$. Знак степени отображения можно сменить, если сменить ориентацию многообразия-прообраза.

В той же работе предложена (но не доказана) сложная эмпирическая формула для степени стандартного отображения. Наша цель — вывести и доказать теоретическую формулу. Для этого сначала докажем три вспомогательные леммы.

Лемма 9. *Пусть многообразия $M(S^2; (2p_1, \beta_1); (3p_2, \beta_2); (5p_3, \beta_3))$ и $M'(S^2; (2p_1', \beta_1'); (3p_2, \beta_2); (5p_3, \beta_3))$ таковы, что все p_i, β_i, p_1', β_1' нечетны, $p_1 \equiv p_1' (\mathrm{mod}\, 8)$ и $\beta_1 \equiv \beta_1' (\mathrm{mod}\, 8)$. Пусть $f : M \to S^3/P_{120}$ и $f' : M' \to S^3/P_{120}$ — стандартные отображения. Тогда $\deg f \equiv \deg f' (\mathrm{mod}\, 120)$.*

Доказательство. Выберем слова в образующих группы P_{120}, реализующие элементы $f_*(t)$, $f_*(a_i)$, $i = 1, 2, 3$, $f_*'(t')$, $f_*'(a_i')$, $i = 1, 2, 3$, следующим образом: a^2 для $f_*(t)$ и $f_*'(t')$, a для $f_*(a_1)$ и $f_*'(a_1')$, $a^{-1}c$ для $f_*(a_2)$ и $f_*'(a_2')$, c для $f_*(a_3)$ и $f_*'(a_3')$. Тогда из теоремы 2 следует, что $\deg f - \deg f' \equiv \xi((1 - a^{x+2y})(\log(a^{2p_1+2\beta_1}))) - \xi((1 - a^{x'+2y'})(\log(a^{2p_1'+2\beta_1'}))) (\mathrm{mod}\, 120)$, где числа x, y, x', y' удовлетворяют условиям $2p_1 y - \beta_1 x = -1$ и $2p_1' y' - \beta_1' x' = -1$.

Сначала покажем, что $a^{x+2y} = a'^{(x'+2y')}$ (или, другими словами, $x + 2y \equiv x' + 2y' (\mathrm{mod}\, 4)$, так как порядок элемента a равен 4). Для этого просто переберем все возможные вычеты чисел p_1 и β_1 по модулю 4 (напомним, что оба числа нечетны). Результат этого перебора можно представить в виде сравнения: $x' + 2y' \equiv x + 2y \equiv \beta_1 (\operatorname{mod} 4)$.

Итак,

$$\deg f - \deg f' \equiv \xi((1 - a^{\beta_1 \operatorname{mod} 4})(\log(a^{2p_1 + 2\beta_1}))) \\ - \xi((1 - a^{\beta_1 \operatorname{mod} 4})(\log(a^{2p_1' + 2\beta_1'})))(\operatorname{mod} 120).$$

Так как $a^4 = 1$, то $\log(a^{4n}) = n \log(a^4)$ $(n \in \mathbb{Z})$, поэтому

$$\deg f - \deg f' \equiv \left(\frac{p_1 + \beta_1}{2}\right)\xi((1 - a^{\beta_1 \operatorname{mod} 4})(\log(a^4))) \\ - \left(\frac{p_1' + \beta_1'}{2}\right)\xi((1 - a^{\beta_1 \operatorname{mod} 4})(\log(a^4)))(\operatorname{mod} 120).$$

Значения слагаемых вычислены: $\xi(\log(a^4)) = 40$, $\xi(a \log(a^4)) = 10$, $\xi(a^3 \log(a^4)) = 70$, поэтому $\xi((1 - a^{\beta_1 \operatorname{mod} 4})(\log(a^4))) \equiv \pm 30 (\operatorname{mod} 120)$ в зависимости от $\beta_1 \operatorname{mod} 4$. Коротко можно записать:

$$\deg f - \deg f' \equiv \pm 30\left(\frac{p_1 + \beta_1}{2} - \frac{p_1' + \beta_1'}{2}\right)(\operatorname{mod} 120).$$

Заметим, что так как $p_1 \equiv p_1' (\operatorname{mod} 8)$ и $\beta_1 \equiv \beta_1' (\operatorname{mod} 8)$, то $\frac{p_1+\beta_1}{2} \equiv \frac{p_1'+\beta_1'}{2} (\operatorname{mod} 4)$, поэтому $\pm 30\left(\frac{p_1+\beta_1}{2} - \frac{p_1'+\beta_1'}{2}\right) \equiv 0 (\operatorname{mod} 120)$.

Замечание 7. Фактически доказано, что

$$\deg f \equiv 30(\beta_1 \operatorname{mod} 4)\left(\left(\frac{p_1 + \beta_1}{2} \operatorname{mod} 4\right) + F(p_2, \beta_2, p_3, \beta_3)\right)(\operatorname{mod} 120),$$

где F — некоторая целочисленная функция.

Лемма 10. *Пусть* $M(S^2; (2p_1, \beta_1); (3p_2, \beta_2); (5p_3, \beta_3))$ *и* $M'(S^2; (2p_1, \beta_1); (3p_2', \beta_2'); (5p_3, \beta_3))$ *таковы, что все* p_i, β_i, p_2', β_2' *нечетны,* $p_2 \equiv p_2' (\operatorname{mod} 12)$ *и* $\beta_2 \equiv \beta_2' (\operatorname{mod} 12)$. *Пусть* $f : M \to S^3/P_{120}$ *и* $f' : M' \to S^3/P_{120}$ *— стандартные отображения. Тогда* $\deg f \equiv \deg f' (\operatorname{mod} 120)$.

Доказательство. Выберем слова в образующих группы P_{120}, реализующие элементы $f_*(t)$, $f_*(a_i)$, $i = 1, 2, 3$, $f_*'(t')$, $f_*'(a_i')$, $i = 1, 2, 3$, следующим образом: $(a^{-1}c)^3$ для $f_*(t)$ и $f_*'(t')$, a для $f_*(a_1)$ и $f_*'(a_1')$, $a^{-1}c$ для $f_*(a_2)$ и $f_*'(a_2')$, c для $f_*(a_3)$ и $f_*'(a_3')$. Из теоремы 2 следует, что

$$\deg f - \deg f' \equiv \xi((1 - (a^{-1}c)^{x+3y})(\log((a^{-1}c)^{3p_2+3\beta_2}))) \\ - \xi((1 - (a^{-1}c)^{x'+3y'})(\log((a^{-1}c)^{3p_2'+3\beta_2'})))(\operatorname{mod} 120),$$

где $3p_2 y - \beta_2 x = -1$ и $3p_2' y' - \beta_2' x' = -1$. Выражение $x + 3y \operatorname{mod} 6$ зависит только от вычетов параметров p_2 и β_2 по модулю 6 следующим образом: $x + 3y \equiv x' + 3y' \equiv \beta_2 (\operatorname{mod} 6)$. Это можно проверить, перебрав все возможные вычеты параметров p_2 и β_2 по модулю 6.

Напомним, что оба параметра нечетные и не могут делиться на 3, т. е. $(a^{-1}c)^{x'+3y'} = (a^{-1}c)^{x+3y} = (a^{-1}c)^{\beta_2 (\operatorname{mod} 6)}$, так как $\beta_2' \equiv \beta_2 (\operatorname{mod} 6)$.

Итак,

$$\deg f - \deg f' \equiv \frac{p_2 + \beta_2}{2}\xi((1 - (a^{-1}c)^{\beta_2 \operatorname{mod} 6}) \log((a^{-1}c)^6))) \\ - \frac{p_2' + \beta_2'}{2}\xi((1 - (a^{-1}c)^{\beta_2' \operatorname{mod} 6})(\log(a^{-1}c)^6)))(\operatorname{mod} 120).$$

Значения слагаемых вычислены: $\xi(\log((a^{-1}c)^6)) = 63$, $\xi(a^{-1}c\log((a^{-1}c)^6)) = 43$, $\xi((a^{-1}c)^{-1}\log((a^{-1}c)^6)) = 83$, поэтому $\xi((1-(a^{-1}c)^{\beta_2 \bmod 6})\log((a^{-1}c)^6) \equiv \pm 20 \pmod{120}$ в зависимости от $\beta_2 \bmod 6$. Так как $p_1 \equiv p_2' \pmod{12}$ и $\beta_2 \equiv \beta_2' \pmod{12}$, имеем $\deg f - \deg f' \equiv 0 \pmod{120}$.

Замечание 8. Фактически доказано, что $\deg f \equiv 20(\beta_2 \bmod 6)(\frac{p_2+\beta_2}{2} \bmod 6) + G(p_1,\beta_1,p_3,\beta_3) \pmod{120}$, где G — некоторая целочисленная функция.

Лемма 11. *Пусть* $M(S^2;(2p_1,\beta_1);(3p_2,\beta_2);(5p_3,\beta_3))$ *и* $M'(S^2;(2p_1,\beta_1);(3p_2,\beta_2);(5p_3',\beta_3'))$ *таковы, что все* p_i, β_i, p_3', β_3' *нечетны,* $p_3 \equiv p_3' \pmod{20}$ *и* $\beta_3 \equiv \beta_3' \pmod{20}$. *Пусть* $f: M \to S^3/P_{120}$ *и* $f': M' \to S^3/P_{120}$ *— стандартные отображения. Тогда* $\deg f \equiv \deg f' \pmod{120}$.

Доказательство. Выберем слова в образующих группы P_{120}, реализующие элементы $f_*(t)$, $f_*(a_i)$, $i=1,2,3$, $f_*'(t')$, $f_*'(a_i')$, $i=1,2,3$, следующим образом: c^{-5} для $f_*(t)$ и $f_*'(t')$, a для $f_*(a_1)$ и $f_*'(a_1')$, $a^{-1}c$ для $f_*(a_2)$ и $f_*'(a_2')$, c для $f_*(a_3)$ и $f_*'(a_3')$. Из теоремы 2 следует, что

$$\deg f - \deg f' \equiv \xi((1-c^{-x-5y})\log(c^{-5p_3-5\beta_3})) - \xi((1-c^{-x'-5y'})\log(c^{-5p_3'+5\beta_3'}))\pmod{120},$$

где $5p_3y - \beta_3x = -1$ и $5p_3'y' - \beta_3'x' = -1$. Выражение $x+5y \bmod 10$ (так же, как и в предыдущих леммах) зависит только от вычета параметра β_3 по модулю 10 следующим образом: $x+5y \equiv x'+5y' \equiv \beta_3^3 \pmod{10}$.

Это можно проверить, перебрав все возможные вычеты параметров p_3 и β_3 по модулю 10. (Напомним, что оба параметра p_3 и β_3 нечетные и не могут делиться на 5.) Можно сказать, что $x+5y \equiv \beta_3^3 \pmod{10}$.

Итак,

$$\deg f - \deg f' \equiv \frac{-p_3-\beta_3}{2}\xi((1-c^{-\beta_3^3})\log(c^{10})) - \frac{-p_3'-\beta_3'}{2}\xi((1-c^{-\beta_3^3})\log(c^{10}))\pmod{120}.$$

Значения слагаемых вычислены: $\xi(\log(c^{10})) = 100$, $\xi(c\log(c^{10})) = 88$, $\xi(c^3\log(c^{10})) = 64$, $\xi(c^7\log(c^{10})) = 16$, $\xi(c^9\log(c^{10})) = 112$.

Коротко можно записать: $\xi((1-c^{-\beta_3^3})\log(c^{10}) \equiv 12(-\beta_3^3 \bmod 10)\pmod{120}$. Так как $p_3 \equiv p_3' \pmod{20}$ и $\beta_3 \equiv \beta_3' \pmod{20}$, то $\frac{p_3+\beta_3}{2} \equiv \frac{p_3'+\beta_3'}{2} \pmod{10}$ и

$$\deg f - \deg f' \equiv \frac{-p_3-\beta_3}{2}12\big(-\beta_3^3 \bmod 10\big)\pmod{120} - \frac{-p_3'-\beta_3'}{2}12\big(-\beta_3^3 \bmod 10\big)\pmod{120} \equiv 0 \pmod{120}.$$

Замечание 9. Фактически доказано, что

$$\deg f \equiv 12\big(\beta_3^3 \bmod 10\big)\left(\frac{p_3+\beta_3}{2} \bmod 10\right) + H(p_1,\beta_1,p_2,\beta_2)\pmod{120},$$

где H — некоторая целочисленная функция.

По результатам трех предыдущих лемм (учитывая соответствующие замечания), можно сформулировать следующую явную формулу степени стандартного отображения многообразия серии (d4) на гомологическую сферу Пуанкаре.

Теорема 9. *Пусть* $M(S^2;(2p_1,\beta_1);(3p_2,\beta_2);(5p_3,\beta_3))$ *— многообразие серии* (d4), *и пусть* $f : M \to S^3/P_{120}$ *— стандартное отображение. Тогда*

$$\deg f \equiv 30(\beta_1 \bmod 4)\left(\frac{p_1+\beta_1}{2} \bmod 4\right) + 20(\beta_2 \bmod 6)\left(\frac{p_2+\beta_2}{2} \bmod 6\right) + 12\big(\beta_3^3 \bmod 10\big)\left(\frac{p_3+\beta_3}{2} \bmod 10\right) - 31 (\bmod 120).$$

Доказательство. По предыдущим трем леммам (точнее, по соответствующим замечаниям)

$$\deg f \equiv 30(\beta_1 \bmod 4)\left(\frac{p_1+\beta_1}{2} \bmod 4\right) + 20(\beta_2 \bmod 6)\left(\frac{p_2+\beta_2}{2} \bmod 6\right) + 12\big(\beta_3^3 \bmod 10\big)\left(\frac{p_3+\beta_3}{2} \bmod 10\right) + n (\bmod 120),$$

где n — некоторая константа, которую можно определить экспериментально, рассмотрев, например, $M \cong S^3/P_{120}$. В этом случае $\deg f = 1$ как степень тождественного отображения, $p_1 = p_2 = p_3 = \beta_2 = \beta_3 = 1$, $\beta_1 = -1$. Находим $n = -31$.

Теперь, используя явную формулу для степени отображения, можно доказать минимальность многообразий серии (d4). Напомним, что многообразия серии (d4) — это гомологические сферы (т. е. $|6p_1p_2\beta_3+10p_1p_3\beta_2+15p_2p_3\beta_1| = 1$) с условием: $p_1p_2p_3 \neq \pm 1$ и $\pm 49 (\bmod 120)$.

Теорема 10. *Все многообразия серии* (d4) *являются минимальными многообразиями Зейферта.*

Доказательство. Достаточно показать, что стандартные отображения всех многообразий серии (d4) имеют степени, не равные ± 1 и $\pm 49 (\bmod 120)$. Итак, пусть $M = M(S^2;(2p_1,\beta_1);(3p_2,\beta_2);(5p_3,\beta_3))$ — многообразие серии (d4). Это означает, в частности, что все параметры p_i и β_i нечетны и $|6p_1p_2\beta_3 + 10p_1p_3\beta_2 + 15p_2p_3\beta_1| = 1$. Заметим, что при замене всех знаков чисел β_i противоположными получим многообразие, гомеоморфное M, поэтому можно считать, что $6p_1p_2\beta_3 + 10p_1p_3\beta_2 + 15p_2p_3\beta_1 = 1$. Из этого равенства и условий на параметры p_i и β_i $(i = 1, 2, 3)$ следует, что

1) числа $2p_1$, $3p_2$, $5p_3$ попарно взаимно просты;
2) $p_2p_3\beta_1 \equiv -1 (\bmod 4)$, т. е. $\beta_1 \equiv -p_2p_3 (\bmod 4)$;
3) $p_1p_3\beta_2 \equiv 1 (\bmod 6)$, т. е. $\beta_2 \equiv p_1p_3 (\bmod 6)$;
4) $p_1p_2\beta_3 \equiv 1 (\bmod 10)$, т. е. $\beta_3^3 \equiv p_1p_2 (\bmod 10)$.

Исходя из этих сравнений, можно переписать формулу степени стандартного отображения $f : M \to S^3/P_{120}$ так:

$$\deg f \equiv 30(-p_2p_3 \bmod 4)\left(\frac{p_1+\beta_1}{2} \bmod 4\right) + 20(p_1p_3 \bmod 6)\left(\frac{p_2+\beta_2}{2} \bmod 6\right) + 12(p_1p_2 \bmod 10)\left(\frac{p_3+\beta_3}{2} \bmod 10\right) - 31 (\bmod 120)$$

или, по другому,

$$\deg f \equiv 15(-p_2p_3 \bmod 4)((p_1+\beta_1) \bmod 8) + 10(p_1p_3 \bmod 6)((p_2+\beta_2) \bmod 12) + 6(p_1p_2 \bmod 10)((p_3+\beta_3) \bmod 20) - 31 (\bmod 120).$$

Очевидно, что сравнение не изменится, если все взятия по модулям 4, 8, 6, 12, 10, 20 заменить взятием по модулю 120, поэтому

$$\deg f \equiv -15p_2p_3(p_1+\beta_1)+10p_1p_3(p_2+\beta_2)+6p_1p_2(p_3+\beta_3)-31 \pmod{120}.$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned}\deg f &\equiv p_1p_2p_3-15p_2p_3\beta_1+10p_1p_3\beta_2+6p_1p_2\beta_3-31\\ &\equiv p_1p_2p_3+1-30p_2p_3\beta_1-31 \pmod{120}.\end{aligned}$$

Вспомним теперь, что $p_2p_3\beta_1 \equiv -1 \pmod 4$:

$$\deg f \equiv p_1p_2p_3 \pmod{120}.$$

Из последнего равенства видно, что многообразие серии (d4) не может иметь стандартного отображения степени ±1 или ±49.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayat-Legrand C., Wang S., Zieschang H.* Minimal Seifert manifolds // Math. Ann. 1997. V. 308, N 4. P. 673–700.
2. *Orlik P.* Seifert manifolds. Berlin; New York: Springer-Verl., 1972. (Lecture Notes in Math.).
3. *Hayat-Legrand C., Matveev S., Zieschang H.* Computer calculation of the degree of maps into the Poincaré homology sphere // Experimental Math. 2001. V. 10, N 4. P. 497–508.
4. *Матвеев С. В., Перфильев А. А.* Периодичность степеней отображений между многообразиями Зейферта // Докл. РАН. 2004. Т. 395, № 4. С. 449–451.
5. *Перфильев А. А.* Отображения степени 1 зейфертовых многообразий на гомологическую сферу Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, № 4. С. 173–183.
6. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. М.; Ижевск: РХД, 2001.

Статья поступила 1 февраля 2006 г., окончательный вариант — 12 мая 2006 г.

Перфильев Андрей Андреевич
Челябинский гос. университет, математический факультет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454021
perf@csu.ac.ru