*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1*

*УДК 512.5*

# ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ НЕТРИВИАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ

**Н. Ю. Макаренко**

**Аннотация:** Доказывается, что $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ с малым числом $d$ нетривиальных компонент $L_i$ и компонентой $L_0$ конечной размерности $m$ обладает однородным разрешимым идеалом ступени разрешимости, ограниченной функцией от $d$, и коразмерности, ограниченной функцией от $m$ и $d$. Верен также аналогичный результат для $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных колец Ли $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ с малым числом $d$ нетривиальных компонент $L_i$ и компонентой $L_0$ конечного порядка $m$. Эти результаты обобщают теорему Шалева о разрешимости $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных колец Ли $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ с малым числом $d$ нетривиальных компонент $L_i$ и нулевой компонентой $L_0$. Доказательство базируется на методе обобщенных централизаторов, созданном Е. И. Хухро для колец Ли и нильпотентных групп с почти регулярными автоморфизмами простого порядка [1], и технике, развитой в работе Н. Ю. Макаренко и Е. И. Хухро о почти разрешимости алгебр Ли с почти регулярным автоморфизмом конечного порядка [2].

**Ключевые слова:** градуированные алгебры Ли, градуированные кольца Ли.

## § 1. Введение

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированные алгебры Ли естественным образом возникают при изучении алгебр Ли с автоморфизмом порядка $n$. Это связано с тем, что после расширения основного поля примитивным корнем $n$-й степени $\omega$ подпространства собственных векторов $L_j = \{a \mid \varphi(a) = \omega^j a\}$ ведут себя как компоненты $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуировки: $[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t}$, где $s+t$ вычисляется по модулю $n$. Например, доказательство теоремы Крекнина [3] о том, что алгебра Ли с регулярным автоморфизмом конечного порядка $n$ разрешима ступени $\leq 2^n - 2$, сводится к доказательству разрешимости $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированной алгебры Ли $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$, у которой компонента $L_0$ равна 0. В более общей ситуации, когда алгебра Ли $L$ допускает почти регулярный автоморфизм конечного порядка $n$ (т. е. подалгебра неподвижных точек $C_L(\varphi)$ конечномерна и имеет размерность, скажем, $m$), недавно в $[2, 4]$ было доказано, что $L$ почти разрешима, т. е. обладает разрешимым идеалом ступени разрешимости, ограниченной функцией от $n$, коразмерность которого ограничена функцией от $m$ и $n$. Как и в теореме Крекнина, доказательство сводится к рассмотрению $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированной алгебры Ли $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$, но в данном случае компонента $L_0$ имеет конечную размерность $m$.

В приведенных результатах оценки ступеней разрешимости и коразмерности зависят от порядка автоморфизма. Во многих задачах возникают $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированные алгебры (кольца) Ли с малым числом нетривиальных компонент. В этом случае часто удается получить результаты, ограничивающие строение алгебры (кольца) Ли, которые не зависят от порядка автоморфизма. Один из примеров — теорема Шалева [5], которая утверждает, что конечная группа ранга $r$, допускающая автоморфизм, имеющий ровно $m$ неподвижных точек, обладает разрешимой подгруппой $(r,m)$-ограниченного индекса. Доказательство этого результата использует следующий аналог теоремы Крекнина: если $L = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} L_i$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированное кольцо Ли с малым числом $d$ нетривиальных компонент $L_i$ и $L_0 = 0$, то $L$ разрешимо ступени $\leq 2^d - 2$. Таким образом, ступень разрешимости кольца Ли зависит только от числа нетривиальных компонент и не зависит от самой градуировки.

Еще один интересный пример связан с классической теоремой Джекобсона [6]. Пусть $L$ — конечномерная алгебра Ли характеристики 0, допускающая нильпотентную алгебру Ли дифференцирований $D$. Если $D$ без ненулевых констант ($x^\delta = 0$ для всех $\delta \in D \Leftrightarrow x = 0$), то $L$ нильпотентна. Недавно Е. И. Хухро и П. Шумяцкий [7] получили обобщение теоремы Джекобсона, доказав, что если $L$ — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, $D$ — нильпотентная алгебра Ли дифференцирований с $d$ весами в $L$ и нулевая компонента Фиттинга по отношению к $D$ имеет размерность $m$, то $L$ содержит нильпотентную подалгебру, коразмерность которой ограничена в терминах $m$ и $d$, а ступень нильпотентности ограничена в терминах $d$. Этот результат фактически является следствием теоремы о $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных алгебрах Ли с малым числом компонент, причем число $n$ в градуировке удается выбрать простым. Авторы доказывают, что если $L = \bigoplus\limits_{i=0}^{p-1} L_i$ — $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли с малым числом $d$ нетривиальных компонент $L_i$, $p$ простое и $\dim L_0 = m$, то $L$ содержит нильпотентную подалгебру, коразмерность которой ограничена в терминах $m$ и $d$, а ступень нильпотентности — в терминах $d$.

Целью настоящей работы является доказательство аналогичной теоремы для алгебр Ли с произвольной $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуировкой.

**Теорема 1.** *Пусть $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_{n-1}$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли, так что $[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t(\mathrm{mod}\, n)}$. Если компонента $L_0$ конечномерна размерности $m$ и число ненулевых компонент среди $L_i$ конечно и равно $d$, то $L$ обладает однородным разрешимым идеалом ступени разрешимости, ограниченной функцией от $d$, коразмерность которого ограничена функцией от $m$ и $d$.*

В последующей совместной работе [8], используя теорему 1, мы улучшаем заключение в приведенной выше теореме Хухро — Шумяцкого [7], доказывая существование нильпотентного идеала (вместо подалгебры) с оценками на коразмерность и ступень нильпотентности.

Для некоторых приложений может оказаться полезной эквивалентная формулировка теоремы 1 в терминах $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированных колец Ли.

**Теорема 2.** *Пусть $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_{n-1}$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированное кольцо Ли, так что $[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t(\mathrm{mod}\, n)}$. Если компонента $L_0$ конечна порядка $m$ и* *число ненулевых компонент среди $L_i$ конечно и равно $d$, то $L$ обладает разрешимым идеалом ступени разрешимости, ограниченной функцией от $d$, индекс которого в аддитивной подгруппе $L$ ограничен функцией от $m$ и $d$.*

Мы используем метод обобщенных централизаторов, созданный Хухро для колец Ли и нильпотентных групп с почти регулярными автоморфизмами простого порядка [1]. Индукционное построение разрешимого идеала базируется на критерии разрешимости из [9]. Доказательство теоремы 1 следует той же схеме, что и доказательство теоремы об алгебрах Ли с почти регулярным автоморфизмом конечного порядка [2]; отличия чисто технического плана. Ключевой момент состоит в следующем: вместо коммутаторов $n$-ограниченной длины вида

$$[a_s, x_j, y_j \dots, z_j],$$

где $a_s \in L_s$, $x_j, y_j, z_j \in L_j$ (как, например, в лемме 4 из [2]), достаточно рассматривать коммутаторы того же вида $d$-ограниченной длины, воспользовавшись следующим простым соображением: как только получается коммутатор с начальным отрезком, не принадлежащим малому числу нетривиальных компонент $L_i$, весь коммутатор автоматически равен 0. Это позволяет достичь того, что все параметры зависят только от числа нетривиальных компонент в разложении $L = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} L_i$ и не зависят от градуировки, т. е. от $n$.

Мы не ставили своей целью привести очень подробное доказательство, так как оно в значительной степени пересекалось бы с доказательством в [2], но постарались сосредоточиться на тех местах, где изменения существенны и требуют привлечения новых соображений. Все опущенные детали легко восстанавливаются из [2].

После напоминания определений и введения обозначений в § 2 мы доказываем в § 3 критерий разрешимости — предложение 1 — как следствие из [9]. Затем в § 4 строятся обобщенные централизаторы и фиксированные элементы и приводятся их основные свойства. В § 5 мы воспроизводим конструкцию разрешимого идеала $Z$ из [2] и определяем $mc$-элементы, в § 6 приводим основные свойства $mc$-элементов, в § 7 доказываем теорему 1 и определяем схему выбора параметров. В § 8 мы указываем те минимальные изменения, которые требуются для случая колец Ли с конечной компонентой $L_0$.

## § 2. Предварительные сведения

Для краткости будем говорить, что некая величина *$d$-ограничена* (или, скажем, *$(m, d)$-ограничена*), если она ограничена сверху некоторой функцией, зависящей только от $d$ (соответственно только от $m$ и $d$). Произведения в алгебре Ли будем называть *коммутаторами.* Через $\langle S\rangle$ будем обозначать подалгебру Ли, порожденную подмножеством $S$, через ${}_{\mathrm{id}}\langle S\rangle$ — идеал, порожденный подмножеством $S$. Члены ряда коммутантов алгебры Ли $L$ определяются по индукции как $L^{(0)} = L$; $L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}]$. По определению алгебра Ли $L$ разрешима ступени $n$, если $L^{(n)} = 0$.

Мы будем использовать следующее сокращенное обозначение: $[A, B^r] = [A, \underbrace{B, \dots, B}_{r}]$.

Простой коммутатор $[a_1, a_2, \dots, a_s]$ веса (длины) $s$ — это по определению коммутатор $[\dots[[a_1, a_2], a_3], \dots, a_s]$. По тождеству Якоби $[a, [b, c]] = [a, b, c] - [a, c, b]$ любой (сложный, многократный) коммутатор от некоторых элементов в любой алгебре Ли может быть выражен в виде линейной комбинации простых коммутаторов того же веса от тех же элементов. Используя еще и антикоммутативность $[a,b]=-[b,a]$, можно добиться, чтобы в этой линейной комбинации все простые коммутаторы начинались с некоторого наперед заданного элемента, входящего в первоначальный коммутатор. В частности, если $L=\langle S\rangle$, то подпространство $L$ порождается простыми коммутаторами от элементов из $S$. Если $I=_{\mathrm{id}}\langle S\rangle$, где $S$ — подпространство $L$, то

$$I=S+[S,L]+[S,L,L]+\dots,$$

где справа сумма подпространств $[S,L,\dots,L]$.

Для колец Ли все определения меняются соответственно: вместо подпространств, натянутых на какие-то множества, нужно говорить об аддитивных подгруппах, порожденных этими множествами, и т. д.

**Соглашение об индексах.** Всюду далее строчная буква с индексом $i$ будет обозначать элемент однородной компоненты $L_i$, при этом индекс будет только указывать на ту компоненту, которой принадлежит данный элемент: $x_i\in L_i$. Для облегчения обозначений мы не будем использовать нумерующие индексы для элементов из $L_j$, так что различные элементы могут обозначаться одинаковым символом тогда, когда имеет значение только то, какой однородной компоненте эти элементы принадлежат. Например, $x_i$ и $x_i$ могут быть различными элементами из $L_i$, так что $[x_i,x_i]$ может быть ненулевым элементом из $L_{2i}$. Эти индексы обычно будут рассматриваться как вычеты по модулю $n$; например, $a_{-i}\in L_{-i}=L_{n-i}$.

Элементы однородных компонент $L_i$ будем называть *однородными*, а коммутаторы от однородных элементов — *однородными коммутаторами*.

Заметим, что в рамках соглашения об индексах однородный коммутатор лежит в компоненте $L_s$, где $s$ — сумма по модулю $n$ индексов всех элементов, входящих в данный коммутатор.

Назовем подалгебру Ли $H$ *однородной*, если $H=H\cap L_0\oplus H\cap L_1\oplus\dots\oplus H\cap L_{n-1}$.

Ясно, что все подалгебры, порожденные некоторыми подмножествами компонент $L_i$, однородны.

## § 3. Критерий разрешимости

Мы будем использовать следующую модификацию критерия разрешимости из [9].

**Предложение 1.** *Пусть $L=L_0\oplus L_1\oplus\dots\oplus L_{n-1}$ — $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли, так что $[L_s,L_t]\subseteq L_{s+t(\mathrm{mod}\,n)}$. Если число ненулевых компонент среди $L_i$ конечно и равно $d$, то существует такая функция $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что $f(m,d)$-й коммутант $L^{(f(m,d))}$ содержится в подалгебре, порожденной множеством $[L,L_0,\dots,L_0]$, где $L_0$ — нулевая компонента градуировки.*

Доказательство. Хотя рассуждения точно следуют схеме, использованной в [9], есть неизбежные отличия, которые невозможно описать, не прибегая к рассмотрению отдельных этапов доказательства, поэтому мы воспроизводим из [9] основные аргументы.

Нам понадобится следующая элементарная теоретико-числовая лемма В. А. Крекнина [3].

**Лемма 1.** *Если $i+j\equiv k(\operatorname{mod} n)$ при $1\le i,j\le n-1$, то либо оба числа $i$ и $j$ больше $k$, либо оба они меньше $k$.*

Пусть $\Omega=\{s_1,\dots,s_d\}$ — множество всех индексов нетривиальных компонент $L_i$ и $0<s_1<s_2<\dots<s_d=n$. Докажем, что для некоторых функций $h_1:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $h_2:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ при $k=1,2,\dots,d$ выполняются следующие два включения:

$$L^{(h_1(m,k))}\cap L_{s_k}\subseteq\Big\langle\big[L_{s_1},L_0^{m2^{d-k}}\big],\big[L_{s_2},L_0^{m2^{d-k}}\big],\\ \dots,\big[L_{s_{k-1}},L_0^{m2^{d-k}}\big],L_{s_{k+1}},L_{s_{k+2}},\dots,L_{s_{d-1}}\Big\rangle+\big[L_{s_k},L_0^{m2^{d-k}}\big],\quad(1)$$

$$L^{(h_2(m,k))}\subseteq\Big\langle\big[L_{s_1},L_0^{m2^{d-k}}\big],\big[L_{s_2},L_0^{m2^{d-k}}\big],\\ \dots,\big[L_{s_k},L_0^{m2^{d-k}}\big],L_{s_{k+1}},L_{s_{k+2}},\dots,L_{s_{d-1}},L_{s_d}\Big\rangle,\quad(2)$$

где в правых частях угловые скобки означают подалгебры Ли, порожденные соответствующими множествами. Нам удобно распространить утверждение (2) также на случай $k=0$ и считать равенство $L=\bigoplus_{t=1}^{d}L_{s_t}$ базой индукции для утверждения (2) со значением $h_2(m,0)=0$.

Будем доказывать утверждения (1) и (2) параллельно, одновременно определяя функции $h_1(m,k)$ и $h_2(m,k)$. Для $k\ge1$ утверждение (1) выводится из предположения индукции для (2), а утверждение (2) — из утверждения (1) для $k$ и предположения индукции для (2).

Сначала докажем (1). С этой целью для каждого фиксированного $k$ докажем следующую цепочку включений:

$$L^{(r(h_2(m,k-1)+1))}\cap L_{s_k}\subseteq\Big\langle\big[L_{s_1},L_0^{m2^{d-k}}\big],\big[L_{s_2},L_0^{m2^{d-k}}\big],\\ \dots,\big[L_{s_{k-1}},L_0^{m2^{d-k}}\big],L_{s_{k+1}},L_{s_{k+2}},\dots,L_{s_{d-1}}\Big\rangle+\big[L_{s_k},L_0^{r}\big],\quad(3)$$

где $r=1,2,\dots,m2^{d-k}$. Рассмотрим случай $r=1$. Если $a\in L^{(h_2(m,k-1)+1)}\cap L_{s_k}$, то элемент $a$ равен линейной комбинации произведений вида $[b,c]$, где $b,c\in L^{(h_2(m,k-1))}$. По предположению индукции выполняется включение (2) для $k-1$; значит, элементы $b$ и $c$, а потому и $[b,c]$ лежат в подалгебре

$$\Big\langle\big[L_{s_1},L_0^{m2^{d-k+1}}\big],\big[L_{s_2},L_0^{m2^{d-k+1}}\big],\dots,\big[L_{s_{k-1}},L_0^{m2^{d-k+1}}\big],L_{s_k},L_{s_{k+1}},\dots,L_{s_{d-1}},L_{s_d}\Big\rangle.$$

Тогда элемент $[b,c]$ может быть выражен в виде линейной комбинации простых коммутаторов от элементов из тех подмножеств, которые здесь указаны внутри угловых скобок. Каждый из этих простых коммутаторов имеет вид $[u,v]$, где $u$ — его начальный отрезок, а $v$ — последний элемент, причем $v$ лежит в одном из указанных подмножеств. Если $v\in L_t$ при $t\in\{s_k,s_{k+1},\dots,s_{d-1},s_d\}$, то $u\in L_w$ при $w+t\equiv s_k(\operatorname{mod} n)$, где $w\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Если $s_k<t<s_d$, то $s_k<w<s_d$ по лемме 1. Тогда либо $w\notin\Omega$ и $u=0$, либо $w\in\{s_{k+1},s_{k+2},\dots,s_{d-1}\}$. Поэтому $[u,v]$ содержится в $\langle L_{s_{k+1}},L_{s_{k+2}},\dots,L_{s_{d-1}}\rangle$, а значит, и в правой части (3). Если $t=s_k$ или $t=s_d=n$, то соответственно $w=0$ или $w=s_k$; в обоих случаях $[u,v]$ принадлежит $[L_{s_k},L_{s_d}]=[L_{s_k},L_0]$, что также лежит в правой части (3) в рассматриваемом случае $r=1$.

Пусть $v\in\big[L_t,L_0^{m2^{d-k+1}}\big]$ при $t\in\{s_1,s_2,\dots,s_{k-1}\}$. Так как $\big[L_t,L_0^{m2^{d-k+1}}\big]\subseteq L_t$, получаем, что $u\in L_w$ при $w+t\equiv s_k(\operatorname{mod} n)$, где $1\le w\le s_{k-1}$. Тогда либо

$w \notin \Omega$ и $u = 0$, либо $w \in \{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$. Поэтому

$$[u,v] \in \bigl[L_w, \bigl[L_t, L_0^{m2^{d-k+1}}\bigr]\bigr] = \bigl[L_w, \bigl[\bigl[L_t, L_0^{m2^{d-k}}\bigr], L_0^{m2^{d-k}}\bigr]\bigr]$$
$$= \bigl[\bigl[L_w, L_0^{m2^{d-k}}\bigr], \bigl[L_t, L_0^{m2^{d-k}}\bigr]\bigr] + \sum_{i\ge 1}\bigl[\bigl[L_w, L_0^{m2^{d-k}-i}\bigr], \bigl[L_t, L_0^{m2^{d-k}}\bigr], L_0^i\bigr].$$

Подпространство $\bigl[\bigl[L_w, L_0^{m2^{d-k}}\bigr], \bigl[L_t, L_0^{m2^{d-k}}\bigr]\bigr]$ лежит в первом слагаемом правой части (3), так как $s_1 \le w, t \le s_{k-1}$, а $\bigl[\bigl[L_w, L_0^{m2^{d-k}-i}\bigr], \bigl[L_t, L_0^{m2^{d-k}}\bigr], L_0^i\bigr]$ при $i \ge 1$ лежат в $[L_{s_k}, L_0]$, что является вторым слагаемым в (3) при $r = 1$.

Дальнейшие рассуждения повторяют практически дословно доказательство теоремы из [9]. Мы приведем лишь основные шаги, опуская технические детали. Включение (3) выводится индукцией по $r$. Сначала доказанное утверждение (3) для случая $r = 1$ применяется к алгебре $L^{((r-1)(h_2(m,k-1)+1))}$ с индуцированной градуировкой вместо $L$, чтобы получить включение

$$L^{(r(h_2(m,k-1)+1))} \cap L_{s_k} \subseteq \bigl\langle \bigl[L_{s_1}, L_0^{m2^{d-k}}\bigr],$$
$$\dots, \bigl[L_{s_{k-1}}, L_0^{m2^{d-k}}\bigr], L_{s_{k+1}}, L_{s_{k+2}}, \dots, L_{s_{d-1}}\bigr\rangle + [L^{((r-1)(h_2(m,k-1)+1))} \cap L_{s_k}, L_0].$$

Затем к слагаемому $[L^{((r-1)(h_2(m,k-1)+1))} \cap L_{s_k}, L_0]$ применяется предположение индукции для $r-1$:

$$[L^{((r-1)(h_2(m,k-1)+1))} \cap L_{s_k}, L_0]$$
$$\subseteq \bigl[\bigl\langle \bigl[L_{s_1}, L_0^{m2^{d-k}}\bigr], \dots, \bigl[L_{s_{k-1}}, L_0^{m2^{d-k}}\bigr], L_{s_{k+1}}, \dots, L_{s_{d-1}}\bigr\rangle, L_0\bigr] + \bigl[L_{s_k}, L_0^r\bigr],$$

откуда следует включение (3) для всех $r$.

Полагая $r = m2^{d-k}$ и $h_1(m,k) = m2^{d-k}(h_2(m,k-1)+1)$, получаем из (3) утверждение (1) для $k$.

Чтобы доказать (2), положим $h_2(m,k) = h_2(m,k-1) + h_1(m,k)$ и применим утверждение (2) при $k-1$ к подалгебре $L^{(h_1(m,k))}$ с индуцированной градуировкой:

$$L^{(h_2(m,k))} = (L^{(h_1(m,k))})^{(h_2(m,k-1))} \subseteq \bigl\langle \bigl[L_{s_1}, L_0^{m2^{d-k}}\bigr],$$
$$\dots, \bigl[L_{s_{k-1}}, L_0^{m2^{d-k}}\bigr], L^{(h_1(m,k))} \cap L_{s_k}, L_{s_{k+1}}, L_{s_{k+2}}, \dots, L_{s_{d-1}}, L_{s_d}\bigr\rangle. \quad (4)$$

Если теперь подставить в (4) доказанное ранее включение (1) вместо $L^{(h_1(m,k))} \cap L_{s_k}$, то получим (2).

При $k = d$ включение (2) принимает вид

$$L^{(h_2(m,d))} \subseteq \bigl\langle \bigl[L_{s_1}, L_0^m\bigr], \bigl[L_{s_2}, L_0^m\bigr], \dots, \bigl[L_{s_{d-1}}, L_0^m\bigr], \bigl[L_{s_d}, L_0^m\bigr]\bigr\rangle,$$

что и составляет утверждение предложения 1 со значением $f(m,d) = h_2(m,d)$. $\square$

## § 4. Представители и обобщенные централизаторы

Построение представителей и обобщенных централизаторов в общих чертах осуществляется так же, как в [2]. Из-за того, что в деталях конструкция все же немного отличается, целесообразно привести ее полностью.

Обобщенные централизаторы — это некоторые подпространства в нетривиальных компонентах $L_i$, $0 \ne i \in \Omega$: $L_i = L_i(0) \ge L_i(1) \ge \dots \ge L_i(N(d))$. Построение обобщенных централизаторов осуществляется индукцией по уровню (параметру), который принимает значения от 0 до некоторого $d$-ограниченного числа $N = N(d)$. Одновременно с построением этих подпространств фиксируются некоторые однородные элементы — представители, по отношению к которым элементы из $L_i(t)$ обладают хорошими централизаторными свойствами. Общее количество представителей $(m, d)$-ограничено.

*Шаблоном* коммутатора от однородных элементов (из $L_i$) назовем его скобочное строение вместе с расстановкой индексов в рамках соглашения об индексах. *Вес* шаблона — это вес коммутатора. Сам коммутатор называется *значением своего шаблона* на данных элементах. Например, $[a_2, [b_1, b_1]]$ и $[x_2, [z_1, y_1]]$ — значения одного и того же шаблона веса 3.

Напомним, что $\Omega = \{s_1, \dots, s_d\}$ — множество всех индексов нетривиальных компонент $L_i$ в разложении $L = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} L_i$ и $0 < s_1 < s_2 \dots < s_d = n$. Пусть $0 \neq j \in \Omega$. Для каждого упорядоченного набора элементов $\vec{x} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, $x_{i_s} \in L_{i_s}$, $0 \neq i_s \in \Omega$, такого, что $j + i_1 + \dots + i_k \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$, определим отображение

$$\vartheta_{\vec{x}} : y_j \to [y_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}].$$

В силу линейности оно является гомоморфизмом подпространства $L_j$ в $L_0$. Поскольку $\dim L_0 \leq m$, имеем $\dim(L_j / \operatorname{Ker} \vartheta_{\vec{x}}) \leq m$.

**Определение уровня 0.** На уровне 0 мы только фиксируем представителей уровня 0. Для каждого шаблона $\mathbf{P}$ простого коммутатора веса $\leq d$ с нулевой суммой индексов по модулю $n$ и индексами из $\Omega$ среди всех значений этого шаблона на однородных элементах из $L_i$, $0 \neq i \in \Omega$, мы выбираем коммутаторы $c$, которые образуют базис подпространства, натянутого на все значения этого шаблона на однородных элементах из $L_i$, $0 \neq i \in \Omega$.

Элементы из $L_j$, $0 \neq j \in \Omega$, входящие в записи фиксированных коммутаторов $c$, называются *представителями уровня* 0 и обозначаются через $x_j(0) \in L_j$ (в рамках соглашения об индексах). Так как общее число рассматриваемых шаблонов $\mathbf{P}$ $d$-ограничено, а размерность подпространства $L_0$ не превосходит $m$, количество представителей 0-го уровня $(m, d)$-ограничено.

Прежде чем описывать шаг индукционного построения, выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $W_1 < W_2 < \dots < W_N$, которые будут все $d$-ограничены, но достаточно велики по сравнению с возникающими в дальнейшем $d$-ограниченными значениями некоторых других параметров доказательства. Вдобавок разности $W_{k+1} - W_k$ должны быть также достаточно большими в том же смысле (см. § 7).

**Определение уровня $t > 0$.** В отличие от нулевого уровня представители уровня $t > 0$ определяются двумя различными способами и в зависимости от этого называются либо *$b$-представителями*, либо *$x$-представителями.* Предположим, что уже зафиксировано $(m, d)$-ограниченное число представителей уровней $< t$, которые являются либо $x$-представителями вида $x_{i_k}(\varepsilon_k) \in L_{i_k}(\varepsilon_k)$, либо $b$-представителями вида $b_{i_k}(\varepsilon_k) \in L_{i_k}$, $0 \neq i_k \in \Omega$, уровней $\varepsilon_k < t$. Определим *обобщенные централизаторы уровня* $t$ (или, короче, централизаторы уровня $t$), для каждого ненулевого $j \in \Omega$ полагая

$$L_j(t) = \bigcap_{\vec{z}} \operatorname{Ker} \vartheta_{\vec{z}},$$

где $\vec{z} = (z_{i_1}(\varepsilon_1), \dots, z_{i_k}(\varepsilon_k))$ пробегает всевозможные упорядоченные наборы всех длин $k \leq W_t$, состоящие из представителей (возможно, разных) уровней $< t$ (т. е. $z_{i_u}(\varepsilon_u)$ обозначает элементы вида $x_{i_u}(\varepsilon_u)$ или $b_{i_u}(\varepsilon_u)$, $\varepsilon_u < t$, в любой комбинации), такие, что $j+i_1+\dots+i_k\equiv 0(\operatorname{mod} n)$. Элементы из $L_j(t)$ также будем называть для краткости *централизаторами уровня* $t$ и обозначать через $y_j(t)$ (в рамках соглашения об индексах).

Число представителей всех уровней $< t$ $(m,d)$-ограничено, и $\dim L_j/\operatorname{Ker}\vartheta_{\vec{x}} \le m$ для всех $\vec{x}$. Поэтому пересечение здесь берется по $(m,d)$-ограниченному числу подпространств $m$-ограниченной коразмерности в $L_j$ и, значит, $L_j(t)$ также имеет $(m,d)$-ограниченную коразмерность в подпространстве $L_j$.

Теперь зафиксируем представителей уровня $t$. Во-первых, для каждого ненулевого $j\in\Omega$ мы фиксируем произвольный базис фактор-пространства $L_j/L_j(t)$ и для каждого элемента базиса произвольным образом выбираем представитель в $L_j$. Эти элементы будут обозначаться через $b_j(t)\in L_j$ (в рамках соглашения об индексах) и называться *$b$-представителями уровня $t$*. Общее количество $b$-представителей уровня $t$ $(m,d)$-ограничено, так как размерности $L_j/L_j(t)$ $(m,d)$-ограничены для всех $j=s_1,s_2,\dots,s_{d-1}$.

Во-вторых, для каждого шаблона $\mathbf{P}$ простого коммутатора веса $\le d$ с ненулевыми индексами из $\Omega$ и нулевой суммой индексов по модулю $n$ среди всех значений этого шаблона на однородных элементах из $L_i(t)$, $0\ne i\in\Omega$, мы выбираем коммутаторы, которые образуют базис подпространства, натянутого на все значения этого шаблона на однородных элементах из $L_i(t), 0\ne i\in\Omega$. Элементы, входящие в этот фиксированный базис, назовем *$x$-представителями уровня $t$* и будем обозначать через $x_j(t)$ (в рамках соглашения об индексах). Поскольку число рассматриваемых шаблонов $d$-ограничено и размерность подпространства $L_0$ не превосходит $m$, общее число $x$-представителей уровня $t$ $(m,d)$-ограничено. Вместе элементы вида $b_i(t)$ и $x_j(t)$ будут иногда называться просто *представителями уровня $t$*. Заметим, что $x$-представители уровня $t$ — элементы $x_j(t)$ — являются также централизаторами уровня $t$; это не относится к $b$-представителям — элементам вида $b_i(t)$.

Из построения ясно, что

$$L_j(k+1)\le L_j(k) \tag{5}$$

для всех $0\ne j\in\Omega$ и любого $k$.

По определению централизатор $y_v(t)$ любого уровня $t$ обладает следующим централизаторным свойством по отношению к представителям меньших уровней:

$$[y_v(t), z_{i_1}(\varepsilon_1),\dots,z_{i_k}(\varepsilon_k)]=0, \tag{6}$$

как только $v+i_1+\dots+i_k\equiv 0(\operatorname{mod} n)$, $k\le W_t$, а элементы $z_{i_j}(\varepsilon_j)$ — представители (т. е. либо $b_{i_j}(\varepsilon_j)$, либо $x_{i_j}(\varepsilon_j)$ в любой комбинации) любых (возможно, различных) уровней $\varepsilon_s<t$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений уровня 0 и уровней $t>0$ и из включений (5); обычно мы будем ссылаться на нее как на процедуру «замораживания».

**Лемма 2** (о замораживании). *Любой простой коммутатор от однородных элементов веса $\le d$ с ненулевыми индексами из $\Omega$ и нулевой суммой индексов может быть представлен (заморожен) в виде линейной комбинации коммутаторов того же шаблона от представителей уровня* 0.

*Любой простой коммутатор $[y_{j_1}(k_1), y_{j_2}(k_2),\dots,y_{j_w}(k_w)]$ веса $w\le d$ от централизаторов уровней $k_1,k_2,\dots,k_w$ может быть представлен (заморожен) в виде линейной комбинации коммутаторов $[x_{j_1}(s),x_{j_2}(s),\dots,x_{j_w}(s)]$ того же шаблона от $x$-представителей любого уровня $s$ такого, что $0\le s\le\min\{k_1,k_2,\dots,k_w\}$.*

Назовем *$x$-квазипредставителем веса $w$ и уровня $k$* любой коммутатор веса $w \geq 1$, в который входит ровно один $x$-представитель $x_i(k)$ уровня $k$ и $w-1$ представителей меньших уровней — элементов вида либо $b_{i_k}(\varepsilon_k)$, либо $x_{i_j}(\varepsilon_j)$ в любой комбинации и любых уровней $\varepsilon_s < k$. $x$-Квазипредставители уровня $k$ (и только они) обозначаются через $\hat{x}_j(k) \in L_j$ в рамках соглашения об индексах; при этом, очевидно, индекс $j$ равен по модулю $n$ сумме индексов всех входящих в квазипредставитель элементов. $x$-Квазипредставители веса 1 — это в точности $x$-представители.

*Квазипредставителем веса $w$ и уровня $\leq k$* называется любой коммутатор веса $w$ от представителей уровня $\leq k$ — элементов вида либо $b_{i_k}(\varepsilon_k)$, либо $x_{i_j}(\varepsilon_j)$ в любой комбинации и любых уровней $\varepsilon_s \leq k$. Квазипредставители уровня $k$ (и только они) обозначаются через $\hat{b}_j(k) \in L_j$ в рамках соглашения об индексах; при этом индекс $j$ равен по модулю $n$ сумме индексов всех входящих в квазипредставитель элементов. Ясно, что коммутатор от квазипредставителей также является квазипредставителем веса, равного сумме весов входящих квазипредставителей, и уровня, равного максимуму их уровней.

*Квазицентрализатором веса $w$ уровня $k$* называется любой коммутатор, в который входит ровно один централизатор $y_i(k) \in L_i(k)$ уровня $k$ и $w-1$ представителей меньших уровней — элементов вида либо $b_{i_k}(\varepsilon_k)$, либо $x_{i_j}(\varepsilon_j)$ в любой комбинации и любых уровней $\varepsilon_s < k$. Квазицентрализаторы уровня $k$ (и только они) обозначаются через $\hat{y}_j(k) \in L_j$ в рамках соглашения об индексах; при этом индекс $j$ равен по модулю $n$ сумме индексов всех входящих элементов.

Ясно, что $x$-квазипредставитель уровня $k$ является также квазицентрализатором уровня $k$; это не распространяется на все квазипредставители.

Следующие три леммы мы приводим без доказательства, так как они могут быть получены дословным повторением соответствующих лемм из [2].

**Лемма 3** [2, лемма 2]. *Любой коммутатор, в котором ровно один квазицентрализатор $\hat{y}_i(t)$ уровня $t$, а остальные элементы — квазипредставители уровней $< t$, равен 0, если сумма индексов входящих в него элементов равна 0, а сумма весов этих элементов не превосходит $W_t + 1$.*

**Лемма 4** [2, лемма 5]. *Любой квазицентрализатор $\hat{y}_j(l+1)$ уровня $l+1$ и веса не более $W_{l+1} - W_l + 1$ является централизатором уровня $l$, т. е. $\hat{y}_j(l+1) \in L_j(l)$.*

**Лемма 5** [2, лемма 3]. *Любой коммутатор вида $[a_{-i}, y_i(k)]$, где $y_i(k)$ — централизатор уровня $k > 1$, либо равен 0, если $n - i \notin \Omega$, либо равен линейной комбинации коммутаторов вида $[y_{-i}(k-1), y_i(k)]$, где $y_{-i}(k-1)$ — централизатор уровня $k-1$.*

В следующей лемме рассматривается ситуация, которая лежит в ядре доказательства теоремы 1. Хотя формулировка мало отличается от леммы 4 из [2], это одно из тех мест, где пришлось привлекать дополнительные соображения.

Обозначение. Учитывая особую роль числа $n$, будем для краткости обозначать наибольший общий делитель $(n, k)$ чисел $n$ и $k$ через $\bar{k}$. Ясно, что $\overline{n+k} = \bar{k}$ и $\overline{(k,l)} = (\bar{k}, \bar{l})$ — наибольший общий делитель трех чисел $n$, $k$ и $l$.

**Лемма 6.** *Любой простой коммутатор длины $2d$ вида*

$$[a_s, \hat{y}_j(n_1), \hat{y}_j(n_2), \ldots, \hat{y}_j(n_{2d-1})] \tag{7}$$

*равен* 0, *если* $\bar{j}$ *делит* $s$ *и вес каждого из квазицентрализаторов* $\hat{y}_j(n_i)$ *не превосходит* $W_{n_i} - d + 2$.

Доказательство. Нам потребуется следующая элементарная теоретико-числовая

**Лемма 7.** *Пусть* $\Omega = \{s_1, s_2, \ldots, s_d\}$ *— множество натуральных чисел,* $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_d = n$, $j \in \Omega$, *и* $s$ *— натуральное число такое, что* $\bar{j}$ *делит* $s$. *Тогда*

(а) *существует натуральное число* $q$, $0 \le q \le d-1$, *такое, что либо* $s + qj \equiv j (\operatorname{mod} n)$, *либо* $s + qj$ *не сравнимо ни с одним из чисел* $s_1, s_2, \ldots, s_d$ *по модулю* $n$;

(б) *существует натуральное число* $q$, $1 \le q \le d$, *такое, что либо* $qj \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$, *либо* $qj$ *не сравнимо ни с одним из чисел* $s_1, s_2, \ldots, s_d$ *по модулю* $n$.

Доказательство. Пусть $n = n_1\bar{j}$, $j = j_1\bar{j}$, $s = s_1\bar{j}$.

(а) Рассмотрим сначала случай, когда $n_1 \le d$. Так как $(n_1, j_1) = 1$, числа $s_1, s_1+j_1, s_1+2j_1, \ldots, s_1+(n_1-1)j_1$ все различны по модулю $n_1$. Следовательно, среди них обязательно найдется одно, сравнимое с $j_1$ по модулю $n_1$: $s_1 + qj_1 \equiv j_1 (\operatorname{mod} n_1)$, откуда $s + qj \equiv j (\operatorname{mod} n)$, где $0 \le q \le d-1$. Пусть теперь $n_1 > d$. Числа $s, s+j, s+2j, \ldots, s+(d-1)j$ все различны по модулю $n$. Среди $d$ различных вычетов либо один равен $j$, либо один не принадлежит $\Omega$.

(б) Пусть $n_1 \le d$. Числа $j_1, 2j_1, dj_1, \ldots, n_1 j_1$ все различны по модулю $n_1$, поэтому среди них обязательно найдется одно, сравнимое с 0 по модулю $n_1$: $qj_1 \equiv 0 (\operatorname{mod} n_1)$, откуда $qj \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$, где $1 \le q \le d$. Если $n_1 > d$, то числа $j, 2j, 3j, \ldots, dj$ все различны по модулю $n$. Среди $d$ различных вычетов либо один равен 0, либо один не принадлежит $\Omega$. $\square$

По лемме 7(а) существует натуральное число $q$, $0 \le q \le d-1$, такое, что либо число $s + qj$ не сравнимо ни с одним из чисел из $\Omega = \{s_1, s_2, \ldots, s_d\}$ по модулю $n$ и тогда весь коммутатор (7) равен нулю, либо $s + qj \equiv j (\operatorname{mod} n)$. Выделим в коммутаторе (7) начальный отрезок вида $[a_s, \hat{y}_j(n_1), \ldots, \hat{y}_j(n_q)]$ с суммой индексов, равной $j$. Применим лемму 7(б): найдется натуральное число $t$, $1 \le t \le d$, такое, что либо $tj$ не сравнимо ни с одним из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_d$ по модулю $n$ (тогда опять же весь коммутатор равен нулю), либо $tj \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$. В этом случае дополним начальный отрезок из $L_j$ следующими $t-1$ квазицентрализаторами: $\hat{y}_j(n_{q+1}), \hat{y}_j(n_{q+2}), \ldots, \hat{y}_j(n_{q+t-1})$, до подкоммутатора с нулевой суммой индексов. Этот подкоммутатор имеет вид $[\underbrace{a_j, \ldots, a_j}_{t}]$ (в рамках соглашения об индексах). По лемме 2 заморозим его в уровне 0, т. е. представим его в виде линейной комбинации коммутаторов от представителей уровня 0 вида $[\underbrace{x_j(0), \ldots, x_j(0)}_{t}]$. Подставим это выражение в коммутатор (7) и рассмотрим подкоммутатор

$$[[\underbrace{x_j(0), \ldots, x_j(0)}_{t}], \hat{y}_j(n_{q+t})].$$

Он равен линейной комбинации простых коммутаторов длины $t+1$ вида

$$[\hat{y}_j(n_{q+t}), \underbrace{x_j(0), \ldots, x_j(0)}_{t}].$$

Каждый из них имеет подкоммутатор длины $t$ с нулевой суммой индексов. Сумма весов входящих в него элементов не превосходит $(W_{n_{q+t}} - d + 2) + t - 1 \leq W_{n_{q+t}} + 1$ (представители $x_j(0)$ можно считать квазипредставителями веса 1). Значит, этот подкоммутатор равен 0 по лемме 3. $\square$

**Лемма 8** [2, лемма 6]. *Пусть $l$ — натуральное число $\geq 4d-3$ и $n_1, n_2, \ldots, n_{4d-3}$ — произвольные попарно различные натуральные числа, не большие чем $l$. Тогда любой коммутатор вида*

$$[a_s, c_0, \ldots, c_0, [x_{-k}(l), x_k(l)], c_0, \ldots, c_0, [x_{-k}(l), x_k(l)], c_0, \ldots, [x_{-k}(l), x_k(l)]], \quad (8)$$

*в котором число вхождений подкоммутаторов $[x_{-k}(l), x_k(l)]$ от $x$-представителей с одинаковыми индексами $\pm k$ не меньше $4d-3$, а $c_0$ — (возможно, различные) коммутаторы от представителей уровня 0 вида $[x_{-i}(0), x_i(0)]$ при (возможно, различных) $i \neq 0$ и общее число $c_0$-вхождений $C$ не превосходит $(W_1 - 4d + 3)/2$ (при этом на любом из участков между $a_s$ и элементами вида $[x_{-k}(l), x_k(l)]$ элементы $c_0$ могут отсутствовать), представим в виде линейной комбинации коммутаторов вида*

$$[v_t, \hat{x}_k(n_{i_1}), \hat{x}_k(n_{i_2}), \ldots, \hat{x}_k(n_{i_{2d-1}})]$$

*или*

$$[v_t, \hat{x}_{-k}(n_{i_1}), \hat{x}_{-k}(n_{i_2}), \ldots, \hat{x}_{-k}(n_{i_{2d-1}})].$$

*В каждом слагаемом $2d-1$ подряд идущих $x$-квазипредставителей с одним и тем же индексом $k$ или $-k$, уровни $n_{i_1}, \ldots, n_{i_{2d-1}}$ — попарно различные числа из множества $\{n_1, \ldots, n_{4d-3}\}$ и вес каждого из $x$-квазипредставителей $\hat{x}_{\pm k}(n_{i_j})$ не превосходит $2C + 4d - 3$.*

Доказательство практически дословно повторяет доказательство леммы 6 из [2]. Коммутаторы (8) нужно подвергнуть тем же самым преобразованиям, что и в лемме 6 из [2]. При этом во всех функциях, ограничивающих количество элементов и вес коммутаторов, нужно заменить $n$ на $d$. Так, например, если в лемме 6 из [2] рассматриваются последние $4n-3$ подкоммутаторов вида $[x_{-k}(l), x_k(l)]$, то в нашем случае нужно рассматривать последние $4d-3$ подкоммутаторов вида $[x_{-k}(l), x_k(l)]$, и т. д. $\square$

Следующая лемма — следствие лемм 6 и 8.

**Лемма 9** [2, лемма 7]. *Если $\bar{k}$ делит $s$, то любой коммутатор вида*

$$[a_s, c_0, \ldots, c_0, [x_{-k}(l), x_k(l)], c_0, \ldots, c_0, [x_{-k}(l), x_k(l)], c_0, \ldots, [x_{-k}(l), x_k(l)]],$$

*в котором число вхождений подкоммутаторов $[x_{-k}(l), x_k(l)]$ с одинаковой парой индексов $\pm k$ не меньше $4d-3$, уровень $l$ не меньше $4d-3$, а $c_0$ — (возможно, различные) коммутаторы от представителей уровня 0 вида $[x_{-i}(0), x_i(0)]$ при (возможно, различных) $i \neq 0$ и общее число $c_0$-вхождений не превосходит $(W_1 - 5d + 4)/2$ (при этом на любом из участков между $a_s$ и элементами вида $[x_{-k}(l), x_k(l)]$ элементы $c_0$ могут отсутствовать), равен 0.*

Доказательство. Сначала применим к нашему коммутатору лемму 8, выбрав в качестве чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{4d-3}$ числа $1, 2, \ldots, 4d-3$. Получим линейную комбинацию коммутаторов вида

$$[v_t, \hat{x}_k(m_1), \hat{x}_k(m_2), \ldots, \hat{x}_k(m_{2d-1})] \quad (9+)$$

или

$$[v_t, \hat{x}_{-k}(m_1), \hat{x}_{-k}(m_2), \ldots, \hat{x}_{-k}(m_{2d-1})], \tag{9−}$$

где в каждом случае имеется $2d-1$ подряд идущих $x$-квазипредставителей с одним и тем же индексом $k$ или $-k$, все числа $m_1, \ldots, m_{2d-1}$ попарно различны и вес $x$-квазипредставителей $\hat{x}_k(m_i)$ не превосходит $2C + 4d - 3 \le W_1 - 5d + 4 + 4d - 3 = W_1 - d + 1$.

Коммутаторы (9±) по лемме 6 равны 0: условие леммы 6 на вес выполняется, а число $t$ делится на $\bar{k}$, так как сумма индексов всех возникающих коммутаторов при описанных преобразованиях остается равной сумме индексов первоначального коммутатора, т. е. числу $s$, и потому делится на $\bar{k}$ по условию, и числа $k$ и $n-k$, очевидно, делятся на $\bar{k}$. □

## § 5. Построение разрешимого идеала и $zc$-элементов

В этом параграфе мы воспроизводим конструкцию из [2] разрешимого идеала ограниченного коранга. Основные этапы дублируют рассуждения из [2, § 4], но в отличие от [2] все функции, участвующие в построении, ограничены в терминах $m$ и $d$ (см. § 7).

Напомним, что $N$ — фиксированное обозначение для наивысшего уровня, который является $d$-ограниченным числом, определяемым последующими рассуждениями, $\Omega = \{s_1, \ldots, s_d\}$ — множество вычетов по модулю $n$, которые являются индексами нетривиальных компонент $L_i$ в разложении $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ и $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{d-1} < s_d = n$. В § 4 мы построили обобщенные централизаторы $L_j(N)$ для ненулевых $j \in \Omega$. Полагаем

$$Z = {}_{\mathrm{id}}\langle L_{s_1}(N), L_{s_2}(N), \ldots, L_{s_{d-1}}(N)\rangle.$$

Этот идеал, порожденный подпространствами $L_j(N)$, $0 \ne j \in \Omega$, имеет $(m,d)$-ограниченную коразмерность в пространстве $L$, так как каждое подпространство $L_j(N)$ имеет $(m,d)$-ограниченную коразмерность в $L_j$ при $0 \ne j \in \Omega$, в то время как размерность $L_0 = L_{s_d}$ не превосходит $m$ по условию. Мы докажем, что идеал $Z$ к тому же разрешим $d$-ограниченной ступени и потому является искомым. Это доказывается путем многократного применения предложения 1 к следующей последовательности подалгебр.

Пусть $T_1 < T_2 < \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, все они должны быть $d$-ограниченными (как и их количество), но достаточно большими по сравнению с возникающими в дальнейшем $d$-ограниченными значениями некоторых других параметров доказательства. При этом разности $T_{k+1} - T_k$ должны быть также достаточно большими (см. § 7).

Имея в виду эту последовательность $T_i$, определяем по индукции подалгебры Ли $Z_i$ (индексы у $Z_i$ просто нумерующие, не указывают на однородные компоненты) и их подпространства $Z_{i\langle k\rangle}$ следующим образом.

1°. При $i = 1$ полагаем $Z_1 = Z = {}_{\mathrm{id}}\langle L_{s_1}(N), L_{s_2}(N), \ldots, L_{s_{d-1}}(N)\rangle$ и для каждого $k = 0, s_1, \ldots, s_{d-1}$ полагаем $Z_{1\langle k\rangle} = Z_1 \cap L_k$.

2°. Полагаем

$$Z_{i+1} = \langle [Z_{i\langle k\rangle}, \underbrace{Z_{i\langle 0\rangle}, \ldots, Z_{i\langle 0\rangle}}_{T_i}] \mid k = 0, s_1, \ldots, s_{d-1}\rangle$$

(угловые скобки обозначают подалгебру Ли, порожденную указанными коммутаторами) и для каждого $k = 0, s_1, \dots, s_{d-1}$ полагаем $Z_{(i+1)\langle k\rangle} = Z_{i+1} \cap L_k$.

Процесс построения подалгебр $Z_i$ продолжается некоторое $d$-ограниченное число шагов, определяемое дальнейшими рассуждениями. Отметим, что определение подалгебр $Z_i$ подогнано под заключение предложения 1: если доказать, что подалгебра $Z_{i+1}$ разрешима $d$-ограниченной ступени, то подалгебра $Z_i$ будет также разрешима $d$-ограниченной ступени, так как число $T_i$ $d$-ограничено.

Теперь мы определим коммутаторы специального вида, которые порождают подпространства, содержащие $Z_{i\langle 0\rangle}$. Все они являются однородными коммутаторами с нулевой суммой индексов. Построение их проводится индукцией по $i$. Коммутаторы, построенные на $i$-м шаге индукции, будем называть *zc-элементами сложности* $i$. Каждому $zc$-элементу сложности $i$ сопоставляется набор длины $i+1$, состоящий из ненулевых вычетов по модулю $n$, называемый *типом* данного $zc$-элемента.

1°. Сложность $i = 0$. Для произвольного уровня $U$ *zc-элементом уровня* $U$ *сложности* 0 назовем любой коммутатор вида $[x_{-k}(U), x_k(U)]$ от $x$-представителей уровня $U$ при $0 \neq \pm k \in \Omega$. *Типом* этого $zc$-элемента называется символ $(k(U))$, где число $U$ указывает на уровень $x$-представителей, а $0 \neq k \in \Omega$ — вычет по модулю $n$, указывающий на принадлежность $x$-представителей компонентам $L_{\pm k}$.

Теперь опишем шаг индукционного построения. Сначала выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $S_1 < S_2 < \dots$, которые будут все $d$-ограничены (как и их количество), но достаточно велики по сравнению с возникающими в дальнейшем $d$-ограниченными значениями некоторых других параметров доказательства. Частные $S_{k+1}/S_k$ должны быть также достаточно большими в том же смысле. Кроме того, выберем убывающую последовательность натуральных чисел $C_1 > C_2 > \dots$, которые будут все $d$-ограничены (как и их количество), причем разности $C_i - C_{i+1}$ будут также достаточно большими по сравнению с возникающими в дальнейшем $d$-ограниченными значениями некоторых других параметров доказательства; выбор последовательности $C_i$ также определяется дальнейшими рассуждениями.

2°. Сложность $i > 0$. Предположим, что уже определены $zc$-элементы сложности $i-1$ и их типы — символы $(w_{i-1}w_{i-2}\dots w_1 k(U))$. Назовем *zc-элементом уровня* $U$ *сложности* $i$ любой коммутатор вида

$$[u_{-w_i}, [u_{w_i}, c_0, \dots, c_0, z_0, c_0, \dots, c_0, z_0, c_0, \dots, c_0, z_0, \dots]],$$

где $0 \neq \pm w_i \in \Omega$, $z_0$ — (возможно, различные) $zc$-элементы одного и того же типа $(w_{i-1}w_{i-2}\dots w_1 k(U))$, причем число их вхождений равно $S_i$, а $c_0$ — (возможно, различные) коммутаторы вида $[x_{-j}(0), x_j(0)]$ при (возможно, разных) $0 \neq \pm j \in \Omega$, причем общее число их вхождений не превосходит $C_i$ (на любом из участков между элементами $u_{w_i}$ и $z_0$ элементы $c_0$ могут отсутствовать). Типом этого $zc$-элемента называется символ $(w_i w_{i-1}\dots w_1 k(U))$, где вычет $w_i$, указывающий на индексы элементов $u_{\pm w_i}$, приписан слева к типу подкоммутаторов $z_0$.

## § 6. Свойства $zc$-элементов

Как уже отмечалось, значение $zc$-элементов состоит в том, что они порождают подпространства, содержащие $Z_{j\langle 0\rangle}$. Мы установим этот факт в следующей лемме, доказательство которой потребовало существенных изменений по сравнению с аналогичным результатом из [2, лемма 9].

**Лемма 10.** *Для каждого $i$ подпространство $Z_{(i+1)\langle 0\rangle}$ порождается $zc$-элементами типов $(w_i \dots w_1 k(N-2))$ уровня $N-2$ для всевозможных наборов вычетов $w_i, \dots, w_1, k$.*

Доказательство. Индукция по $i$.

Случай $i = 0$. Мы должны доказать, что для любого $s = 0, 1, 2, \dots$ и любых индексов $k_1, k_2, \dots, k_s \in \Omega$ любой коммутатор $[y_j(N), a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_s}]$ (в рамках соглашения об индексах) такой, что $0 \neq j \in \Omega$, $j + k_1 + \dots + k_s \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$, равен линейной комбинации $zs$-элементов сложности 0 уровня $N-2$, т. е. коммутаторов вида $[x_{-k}(N-2), x_k(N-2)]$ для $0 \neq \pm k \in \Omega$. Будем доказывать индукцией по $s$. Если $s = 0$, то доказывать нечего, так как $j \neq 0$ по определению $L_j(N)$. Если $s = 1$, то это следует из леммы 5: либо $n - j \notin \Omega$ и $[y_j(N), a_{-j}] = 0$, либо коммутатор $[y_j(N), a_{-j}]$ представляется в виде линейной комбинации коммутаторов вида $[y_j(N), y_{-j}(N-1)]$, которые можно заморозить в уровне $N-2$, чтобы получить требуемую форму.

При $s > 1$ мы можем переставлять элементы $a_{k_u}$ по модулю

$$\sum_{t=1}^{s-1} \sum_{j+i_1+\dots+i_t \equiv 0 (\operatorname{mod} n)} [L_j(N), L_{i_1}, \dots, L_{i_t}].$$

По индукционному предположению все элементы в этой сумме можно выразить в требуемом виде. Поэтому мы можем свободно перемещать $a_{k_u}$ для того, чтобы представить наш коммутатор в требуемом виде.

Выразим каждый элемент $a_{k_u}$ с индексом $k_u \neq 0$ в виде линейной комбинации элементов вида $b_{k_u}(N-1) + y_{k_u}(N-1)$ и подставим эти выражения в коммутатор. Получим линейную комбинацию коммутаторов $[y_j(N), z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_s}]$, где $z_{k_u}$ либо $b_{k_u}(N-1)$, либо $y_{k_u}(N-1)$, либо $a_0$ и условие $j + k_1 + \dots + k_s \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$ по-прежнему выполняется. Если среди $z_{k_u}$ имеется хотя бы один централизатор $y_{k_u}(N-1)$, то мы передвинем его направо в самый конец, переобозначим начальный отрезок через $a_{-k_u}$ и применим лемму 5: либо $-k_u \notin \Omega$ и $[a_{-k_u}, y_{k_u}(N-1)] = 0$, либо элемент $[a_{-k_u}, y_{k_u}(N-1)]$ можно представить в виде линейной комбинации коммутаторов вида $[y_{-k_u}(N-2), y_{k_u}(N-1)]$, которые можно заморозить в уровне $N-2$, чтобы получить требуемую форму.

Рассмотрим теперь случай, когда все $z_{k_u}$ являются либо представителями $b_{k_u}(N-1)$, либо элементами $a_0$. Мы хотим показать, что у такого коммутатора после подходящей перестановки элементов $z_{k_u}$ можно получить начальный отрезок $d$-ограниченной длины с нулевой начальной суммой индексов.

Для каждого ненулевого индекса $u$, который встречается в коммутаторе меньше чем $d$ раз, перемещаем все $b_u(N-1)$ в начало и располагаем их следом за $y_j(N)$. Так как число ненулевых индексов в $\Omega$ не превосходит $d-1$, начальный отрезок $\hat{y}_t(N)$, полученный таким образом, имеет вес $< d^2$. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_r$ — все остальные ненулевые индексы, которые встречаются в коммутаторе. Для каждого $v_i$ существует по крайней мере $d$ вхождений элементов $b_{v_i}(N-1)$. Если таких индексов нет, то $t$ должно равняться нулю, так как первоначальная сумма всех индексов равнялась нулю по модулю $n$, и тогда $\hat{y}_t(N) = 0$ в силу (6), поскольку $W_N$ можно выбрать $\geq d^2$. Предположим теперь, что существует индекс $v_k \in \{v_1, \dots, v_r\}$ такой, что $d < n/\bar{v}_k$, где, напомним, $\bar{v}_k = (v_k, n)$ — наибольший общий делитель $v_k$ и $n$. Передвинем $d$ элементов $b_{v_k}(N-1)$ направо в самый конец коммутатора:

$$[\hat{y}_t(N), \dots, \underbrace{b_{v_k}(N-1), \dots, b_{v_k}(N-1)}_{d}].$$

Переобозначим начальный отрезок через $a_s$, где $s = n - dv_k$. Так как $d < n/\bar{v}_k$, то числа $s, s+v_k, \ldots s+dv_k$ все различны по модулю $n$ и, следовательно, среди $d+1$ различных индексов найдется хотя бы один, который не сравним ни с одним числом в $\Omega$, поэтому весь коммутатор равен нулю. Осталось рассмотреть случай, когда $d \geq n/\bar{v}_k$ для всех $k$. Пусть $n = n_k\bar{v}_k$ и $e_k$ — число вхождений индекса $v_k$. Разделим $e_k$ с остатком на $n_k$: $e_k = q_kn_k + l_k$, где $l_k < n_k \leq d$. Для каждого $k$ переместим в начало коммутатора ровно $l_k$ элементов $b_{v_k}(N-1)$, а остальные $q_kn_k$ элементов $b_{v_k}(N-1)$ переместим в самый конец. Так как $v_kq_kn_k \equiv 0(\operatorname{mod} n)$, сумма всех индексов элементов, которые переносили в конец, равна 0, следовательно, и начальный отрезок вида

$$[\hat{y}_t(N), \underbrace{b_{v_1}(N-1), \ldots}_{l_1<d}, \underbrace{b_{v_2}(N-1), \ldots}_{l_2<d}, \ldots, \underbrace{b_{v_r}(N-1) \ldots}_{l_r<d}]$$

имеет нулевую сумму индексов. Его вес не превосходит $2d^2$, поэтому при $W_N \geq 2d^2$ он равен 0 в силу (6).

Мы опускаем подробное доказательство случая $i > 0$, так как оно почти дословно повторяет рассуждения леммы 9 из [2]. Мы укажем лишь те минимальные изменения, которые требуется сделать. Вместо леммы 8 из [2] нужно использовать очевидные включения

$$Z_{1\langle k\rangle} \supseteq Z_{2\langle k\rangle} \supseteq \cdots \supseteq Z_{i\langle k\rangle} \supseteq Z_{(i+1)\langle k\rangle} \supseteq \ldots.$$

Так как число всевозможных типов $(w_{i-1} \ldots w_1k(N-2))$ в нашем случае не превосходит $(d-1)^i$ и $d$-ограничено при $d$-ограниченном $i$, число $T_i$ можно выбрать больше чем $S_i(d-1)^i$. Вместо леммы 7 из [2] нужно применить лемму 9. При этом параметры $W_1$, $S_i$ и $N$ должны удовлетворять неравенствам

$$W_1 \geq 2(T_i - S_i) + 5d - 4, \quad S_i \geq 4d - 3 \quad \text{и} \quad N - 2 \geq 4d - 3. \qquad \square$$

Определение. Будем называть $zc$-элементы сложности $j$, встречающиеся на $j$-м шаге в индукционном построении $zc$-элемента $h$ типа $(w_i \ldots w_1k(H))$ сложности $i \geq j$, *$zc$-элементами типа $(w_j \ldots w_1k(H))$, вложенными* в данный $zc$-элемент $h$.

Итак, в $h$ вложено $S_i$ $zc$-элементов сложности $i-1$ типа $(w_{i-1} \ldots w_1k(H))$, в каждый из которых вложено по $S_{i-1}$ $zc$-элементов типа $(w_{i-2} \ldots w_1k(H))$, и т. д. Всего в $h$ вложено $S_iS_{i-1} \ldots S_{j+1}$ $zc$-элементов типа $(w_j \ldots w_1k(H))$.

При подходящем выборе параметров $C_i$ и $S_i$ любая подстановка $zc$-элементов некоторой меньшей сложности $l < j$ вместо всех вложенных элементов данной сложности $j$ в данном $zc$-элементе сложности $i \geq j$ дает снова $zc$-элемент (меньшей) сложности $i-j+l$. Нам потребуется в основном случай $l = 0$, который мы выделим в следующей лемме.

**Лемма 11.** *Пусть $h$ — $zc$-элемент типа $(w_i \ldots w_1k(H))$. Если все вложенные в $h$ $zc$-элементы типа $(w_{i_0} \ldots w_1k(H))$, где $i_0 \leq i$, представимы в виде линейных комбинаций коммутаторов от $x$-представителей вида $[x_{-t_j}(T), x_{t_j}(T)]$, $j = 1, 2, \ldots$, то $h$ представим в виде линейной комбинации $zc$-элементов типов $(w_i \ldots w_{i_0+1}t_j(T))$ сложности $i - i_0$ для тех же самых чисел $t_j$, $j = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство легко восстанавливается из доказательства леммы 10 из [2]. Отметим, что рассуждениями этой леммы диктуется выбор чисел $S_i$ и $C_i$. Так как число нетривиальных компонент равно $d$ (а не $n$, как в [2]), то число

$S_i$ нужно выбрать больше чем $S_{i-i_0}(d-1)$, заменив $n$ на $d$ в соответствующей оценке в [2]. Неравенство $C_{i-i_0} - C_i \geq S_i$ наследуется без изменений. $\square$

Следующая лемма ключевая в доказательстве теоремы 1. Часть (а) позволяет «перепрыгивать» уровни в $zc$-элементах, пропуская неподходящие вычеты в их типах для того, чтобы «сближать» равные или делящие друг друга вычеты. Мы будем называть часть (а) «модулярной» частью. «Немодулярная» же часть (б) позволяет «склеивать» взаимно простые или «относительно взаимно простые» вычеты. Делимость индексов является ключевым моментом для применения леммы 9, к которой в конечном итоге сводится доказательство.

**Лемма 12.** *Любой $zc$-элемент*

$$[u_{-s}, [a_s, c_0, \dots c_0, z_0, c_0, \dots c_0, z_0, c_0, \dots c_0, z_0, \dots]]$$

*типа $(sk(H))$ уровня $H \geq 8d+1$ можно представить*

(а) *как линейную комбинацию коммутаторов вида $[x_{-t}(H-8d), x_t(H-8d)]$ для (возможно, разных) $t$ таких, что $\bar{t}$ делит $\bar{k}$,*

(б) *как линейную комбинацию коммутаторов вида $[x_{-r}(H-8d), x_r(H-8d)]$ для (возможно, разных) $r$ таких, что $(\bar{r}, \bar{k})$ делит $(\bar{s}, \bar{k})$ (в частном случае, когда $\bar{s}$ и $\bar{k}$ взаимно просты, это эквивалентно тому, что $\bar{r}$ и $\bar{k}$ взаимно просты).*

Подробное доказательство этой леммы мы также опускаем, так как оно легко восстанавливается из доказательства леммы 11 из [2]. Требуемые зависимости параметров от $d$ гарантируются применением соответственно лемм $9, 8, 4, 5, 6$ вместо лемм $7, 6, 5, 3, 4$ из [2] и тем фактом, что имеется всего $d$ нетривиальных компонент $L_i$ в разложении $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$. При этом, применяя лемму 8 вместо леммы 6 из [2] мы выбираем числа $n_i$ из промежутков $H - 8d < n_i < H - 4d$ и $H - 4d < n_i < H$ вместо промежутков $H - 8n < n_i < H - 4n$ и $H - 4n < n_i < H$ соответственно. Единственное место, где требуется привлечение новых соображений, — это лемма 12(b) из [2]. В этой лемме устанавливается существование целого числа $j_0$ из интервала $0 \leq j \leq n-1$ такого, что $\overline{s+jk} = (\bar{s}, \bar{k})$. В следующей лемме мы покажем, что существует число $j_0$ из интервала $0 \leq j \leq d-1$ такое, что либо $\overline{s+jk} = (\bar{s}, \bar{k})$, либо $s + jk$ не сравнимо ни с одним числом в $\Omega$ по модулю $n$. Заодно мы «передокажем» и лемму 12(а) из [2], которая нам потребуется позже.

Для натурального $f$ введем специальное обозначение $(n\backslash f)$ для максимального делителя числа $n$, взаимно простого с $f$. Точнее, если $\bar{f} = p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}$ — каноническое разложение $\bar{f}$ в произведение неединичных степеней простых чисел, а $n = p_1^{n_1} \dots p_l^{n_l} p_{l+1}^{n_{l+1}} \dots p_w^{n_w}$, где $n_i \geq k_i$ при $i = 1, \dots, l$, то по определению $(n\backslash f) = p_{l+1}^{n_{l+1}} \dots p_w^{n_w}$.

**Лемма 13.** *Для любых натуральных $k$ и $s$*

(а+) *существует такое натуральное $j_0$ из промежутка $0 \leq j_0 \leq d-1$, что либо $\overline{s+j_0k} = \overline{(s,k)(n\backslash k')}$, где $k' = k/(s,k)$, либо $s + j_0k$ не сравнимо ни с одним числом в $\Omega$ по модулю $n$;*

(а−) *существует такое натуральное $j_0$ из промежутка $0 \leq j_0 \leq d-1$, что либо $\overline{s-j_0k} = \overline{(s,k)(n\backslash k')}$, где $k' = k/(s,k)$, либо $s - j_0k$ не сравнимо ни с одним числом в $\Omega$ по модулю $n$;*

(б) *существует такое натуральное $j$ из промежутка $0 \leq j \leq d-1$, что либо $\overline{s+jk} = (\bar{s}, \bar{k})$, либо $s + jk$ не сравнимо ни с одним числом в $\Omega$ по модулю $n$.*

Доказательство. (а+) В [2, лемма 12(a)] доказано, что для некоторого натурального $j_0$ выполняется $\overline{s+j_0k} = \overline{(s,k)(n\backslash k')}$. Если $d \geq n/\bar{k} = n_1$, то разделим $j_0$ с остатком на $n_1$: $j_0 = n_1q_1 + l_1$, где $l_1 < n_1 \leq d$. Тогда $\overline{s+l_1k} = \overline{(s,k)(n\backslash k')}$, так как для любого целого числа $l$ выполняется $\overline{l+n} = \bar{l}$. Если же $d < n/\bar{k} = n_1$, то все числа $s, s+k, \dots, s+dk$ различны по модулю $n$, следовательно, среди них хотя бы одно не сравнимо ни с одним из чисел в $\Omega$ по модулю $n$.

(а−) Имеем $\overline{s-(n-j_0)k} = \overline{(s,k)(n\backslash k')}$. Далее продолжаем аналогично п. (а+), но вместо $j_0$ надо делить на $n_1$ с остатком число $n-j_0$.

П. (б) выводится из леммы 12(b) из [2] аналогично п. (а+). $\square$

Вышеописанные изменения в доказательстве леммы 11 из [2] влекут следующие изменения в определении параметров: $S_1 \geq 8d-7$, $W_1 \geq 2C_1+5d-4$, $W_1 \geq 2C_1+12d-11$, $W_l - W_{l-1} \geq 2C_1+12d-12$, $W_l - W_{l-1} \geq 2C_1+2S_1$, $W_i \geq 2C_1+2S_1+d-1$. $\square$

В заключение этого параграфа приведем следствие леммы 12(а).

**Лемма 14.** *Любой $zc$-элемент типа $(s_i \dots s_1k(H))$ уровня $H \geq i8d+1$ представим в виде линейной комбинации коммутаторов $[x_{-t}(H-8id), x_t(H-8id)]$ при (возможно, разных) $t$ таких, что $\bar{t}$ делит $\bar{k}$.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство леммы 13 из [2], но вместо лемм 10 и 11(а) из [2] нужно применять соответственно леммы 11 и 12(а). $\square$

## § 7. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $Z_Q = 0$ для некоторого $d$-ограниченного числа $Q$. Тогда в силу предложения 1 алгебра Ли $Z_{Q-1}$ разрешима $d$-ограниченной ступени, так как число $T_{Q-1}$ $d$-ограничено. Затем в силу предложения 1 алгебра $Z_{Q-2}$ разрешима $d$-ограниченной ступени, так как $d$-ограничено число $T_{Q-2}$, и т. д., вплоть до разрешимости $d$-ограниченной ступени идеала $Z_1 = Z$.

Ввиду леммы 10 достаточно доказать, что при достаточно большом $d$-ограниченном $Q$ и при достаточно большом $d$-ограниченном $N$ все $zc$-элементы типа $(w_Q \dots w_1k(N-1))$ равны 0 для любых ненулевых $w_Q, \dots, w_1$, $k \in \Omega$. Чтобы воспользоваться индукцией по $\bar{k}$, удобно переформулировать это утверждение в следующем виде.

**Предложение 2.** *Существуют функции $Q(l)$ и $H(l)$ натурального аргумента $l$ такие, что при $Q \geq Q(\bar{k})$ все $zc$-элементы типа $(w_Q \dots w_1k(H))$ уровня $H \geq H(\bar{k})$ равны 0 для любых $w_Q, \dots, w_1, k$.*

Функции $Q$ и $H$ зависят, конечно, от $d$. Заметим, что ввиду «вложенности» определения $zc$-элементов в предложении 2 достаточно доказать требуемое равенство при $Q = Q(\bar{k})$ и $H = H(\bar{k})$.

Доказательство. Введем обозначение $\overline{\Omega} = \{\bar{s}_{t_1}, \dots, \bar{s}_{t_d}\}$, где $0 < \bar{s}_{t_1} \leq \bar{s}_{t_2} \leq \dots \leq \bar{s}_{t_d} = n$, $\{s_1, \dots, s_d\} = \Omega$ — множество индексов нетривиальных компонент в разложении $L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i$ и, напомним, $\bar{s}_{t_i}$ — наибольший общий делитель чисел $s_{t_i}$ и $n$.

Будем доказывать предложение индукцией по $\bar{k}$. Мы не рассматриваем отдельно базис индукции при $\bar{k} = \bar{s}_{t_1}$, он включен в общий случай.

Пусть $\bar{k} \in \overline{\Omega}$. Поскольку в определении элементов типа $(w_Q \dots w_1 k(N-1))$ параметры $w_j$ — ненулевые вычеты по модулю $n$ (все из $\Omega$), при $Q \geq d$ среди $w_Q, \dots, w_1$ найдутся хотя бы два одинаковых: $w_{i_1} = w_{i_2}$, где $i_1 < i_2 \leq d$. Можно заранее положить, что требуемая функция удовлетворяет неравенству $Q(l) \geq d$ для всех $l \in \overline{\Omega}$. Тогда достаточно показать, что $zc$-элемент $h$ достаточно большого уровня $X$ типа

$$(w_Q \dots w_1 k(X)), \quad \text{где } w_{i_1} = w_{i_2},\ i_1 < i_2 \leq d, \tag{10}$$

равен нулю.

Далее мы «избавляемся» от ненужного начального отрезка $w_{i_1-1} \dots w_1$ в записи (10). Рассуждая, как при доказательстве предложения 2 в [2], но применяя леммы 14 и 11 вместо лемм 13 и 10 из [2], представим $zc$-элемент $h$ типа (10) в виде линейной комбинации $zc$-элементов типа

$$(w_Q \dots w_{i_1} t(X - 8(i_1 - 1)d)) \quad \text{при } t \text{ таких, что } \bar{t} \text{ делит } \bar{k}. \tag{11}$$

Для всех таких $t$, что $\bar{t} < \bar{k}$, по предположению индукции существуют $Q(\bar{t})$ и $H(\bar{t})$ такие, что элемент типа (11) равен 0, если $Q - i_1 + 1 \geq Q(\bar{t})$ и $X - 8(i_1 - 1)d \geq H(\bar{t})$. Так как $i_1 \leq d - 1$, последнее неравенство выполняется при $X \geq 8(d-2)d + H(\bar{t})$. Можно считать, что в дальнейшем число $Q(\bar{k})$ будет выбрано большим, чем $(d-2) + \max\{Q(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\}$, а число $H(\bar{k})$ — большим, чем $8(d-2)d + \max\{H(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\}$. Поэтому достаточно доказать, что при достаточно большом $d$-ограниченном $Q$ и достаточно большом $d$-ограниченном $X$ $zc$-элементы типов (11) при $\bar{t} = \bar{k}$ равны 0. Для облегчения обозначений можно в этом утверждении обозначить $t$ при $\bar{t} = \bar{k}$ снова через $k$. Обозначим также $Y = X - 8(i_1 - 1)d$; так как $i_1 \leq d - 1$, $d$-ограниченность $X$ эквивалентна $d$-ограниченности $Y$. Сменим обозначения и для индексов в обозначении типа, так что $w_{i_1}$ станет $w_1$, а равный ему $w_{i_2}$ станет, скажем, $w_j$. Итак, достаточно доказать, что существует $d$-ограниченные числа $F(\bar{k}) \geq d$ и $Y(\bar{k})$ такие, что $zc$-элементы $h$ типа

$$(w_F \dots w_1 k(Y)) \tag{12}$$

равны нулю при любых $F, w_F, \dots, w_1$ таких, что $F \geq F(\bar{k})$, $Y \geq Y(\bar{k})$ и $w_j = w_1$ при $j \leq d$. Ввиду «вложенности» определения $zc$-элементов достаточно доказать требуемое равенство при $F = F(\bar{k})$ и $Y = Y(\bar{k})$.

Так как $i_1 \leq d - 1$ в (11), можно положить

$$H(\bar{k}) = \max\{8(d-2)d + Y(\bar{k}), 8(d-2)d + \max\{H(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\}\} \tag{13}$$

и

$$Q(\bar{k}) = \max\{d - 2 + F(\bar{k}), d - 2 + \max\{Q(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\}\}. \tag{14}$$

Рассуждая так же, как в [2] (преобразование коммутатора (23)), но применяя леммы 14, 12 и 11 вместо лемм 13, 11 и 10 из [2], представим произвольный $zc$-элемент $a$ типа $(w_{j-1} \dots w_1 k(Y))$, с одной стороны, в так называемой «модулярной» форме, т. е. в виде линейной комбинации коммутаторов вида

$$[x_{-t_1}(Y - 8(j-1)d), x_{t_1}(Y - 8(j-1)d)] \quad \text{при } t_1 \text{ таких, что } \bar{t}_1 \text{ делит } \bar{k}, \tag{15}$$

а с другой стороны, в «немодулярной форме», т. е. в виде линейной комбинации коммутаторов вида

$$[x_{-r_1}(Y - 8(j-1)d), x_{r_1}(Y - 8(j-1)d)] \text{ при } r_1 \text{ таких, что } (\bar{r}_1, \bar{k}) \text{ делит } (\overline{w}_1, \bar{k}). \tag{16}$$

Это можно сделать при условии, что $Y \geq 8d^2 - 8d + 1$.

Рассмотрим теперь произвольный $zc$-элемент $b$ типа $(w_j \dots w_1 k(Y))$. По определению

$$b = [u_{-w_j}, [u_{w_j}, c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots]], \tag{17}$$

где $a$ — (возможно, различные) $zc$-элементы типа $(w_{j-1} \dots w_1 k(Y))$, число которых равно $S_j$, а число $c_0$-вхождений не более $C_j$. В подкоммутаторе

$$[u_{w_j}, c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots]$$

некоторое достаточно большое $d$-ограниченное число $A$ первых (слева) элементов $a$ представим в виде линейной комбинации коммутаторов вида (15). Получим линейную комбинацию коммутаторов вида

$$\begin{aligned}[][u_{w_j}, c_0, \dots c_0, [x_{-t_1}(Y - 8(j-1)d), x_{t_1}(Y - 8(j-1)d)], c_0, \dots \\ c_0, [x_{-t_A}(Y - 8(j-1)d), x_{t_A}(Y - 8(j-1)d)], c_0, \dots, a, c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots],\end{aligned} \tag{18}$$

где еще достаточно много, а именно $S_j - A$, «неиспользованных» вхождений элементов $a$, а все индексы $t_i$ таковы, что $\bar{t}_i$ делит $\bar{k}$. Если $A$ достаточно велико (больше $(d-1)S_1$), то в каждом коммутаторе (18) найдется $S_1$ одинаковых пар индексов $\pm t_{i_0}$. Выбрав $S_1$ таких пар, заморозим остальные вместе с подкоммутаторами со всеми другими индексами в нулевом уровне, добавляя их к $c_0$-вхождениям. Переобозначая $t_2 = t_{i_0}$, получим коммутатор вида

$$\begin{aligned}[][u_{w_j}, c_0, \dots, c_0, [x_{-t_2}(Y - 8(j-1)d), x_{t_2}(Y - 8(j-1)d)], c_0, \dots \\ c_0, [x_{-t_2}(Y - 8(j-1)d), x_{t_2}(Y - 8(j-1)d)], c_0, \dots, a, c_0, \dots, c_0, a, \dots],\end{aligned} \tag{19}$$

в котором $S_1$ подкоммутаторов $[x_{-t_2}(Y - 8(j-1)d), x_{t_2}(Y - 8(j-1)d)]$, число $c_0$-вхождений не превосходит $C_j + S_j$ и, напомним, еще $S_j - A$ неиспользованных вхождений элементов $a$. Напомним также, что повторяющийся индекс $t_2$ таков, что $\bar{t}_2$ делит $\bar{k}$. Ядро доказательства состоит в том, что при $\bar{t}_2 = \bar{k}$ коммутатор (19) равен 0. Случай же $\bar{t}_2 < \bar{k}$ позволит применить предположение индукции к тем $zc$-элементам $h$ типа (12), где будут вложены такие подкоммутаторы.

**Лемма 15.** *При $\bar{t}_2 = \bar{k}$ коммутатор* (19) *равен* 0.

Доказательство. Сначала применим к начальному отрезку коммутатора (19) лемму 8. Это возможно, так как $S_1 \geq 4d - 3$, числа $W_i$ можно выбрать не меньше $2C_j + 2S_j + 4d - 3$, а уровень $Y - 8(j-1)d$ не меньше $4d - 3$ при $Y \geq 8d^2 - 4d - 3$ (так как $j \leq d$). В результате получим линейную комбинацию коммутаторов вида

$$[u_t, \hat{x}_{t_2}(l_1), \hat{x}_{t_2}(l_2), \dots, \hat{x}_{t_2}(l_{2d-1}), c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots, c_0, a, \dots]$$

или

$$[u_t, \hat{x}_{-t_2}(l_1), \hat{x}_{-t_2}(l_2), \dots, \hat{x}_{-t_2}(l_{2d-1}), c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots, c_0, a, \dots],$$

где в каждом слагаемом все $x$-квазипредставители имеют один и тот же индекс $t_2$ или $-t_2$ и имеется $S_j - A$ вхождений «неиспользованных» элементов $a$. Сумма индексов полученных коммутаторов остается равной сумме индексов первоначального коммутатора, т. е. числу $w_j$; кроме того, $\bar{k} = \bar{t}_2$ и $w_j = w_1$. По лемме 13(a−) существует такое натуральное число $0 \leq j_0 \leq d - 1$, что либо $w_j - j_0 t_2$ не сравнимо ни с одним индексом в $\Omega$ по модулю $n$ и коммутатор равен 0, либо

$\overline{w_j - j_0 t_2} = \overline{(w_j, t_2)(n \backslash t'_2)}$, где $t'_2 = t_2/(w_j, t_2)$. Отсекая последние $j_0$ элементов $\hat{x}_{t_2}(l_i)$ в коммутаторе с индексами $t_2$, получим начальный отрезок с суммой индексов $q$ по модулю $n$ такой, что $\bar{q} = \overline{(w_1, k)(n \backslash k')}$, где $k' = k/(w_1, k)$. Применяя лемму 13(a+), в коммутаторе с индексами $-t_2$ аналогичным образом выделим начальный отрезок с суммой $q$ по модулю $n$ такой, что $\bar{q} = \overline{(w_1, k)(n \backslash k')}$, где $k' = k/(w_1, k)$. Результатом будут коммутаторы вида

$$[u_q, \hat{x}_{\pm t_2}(l_{2d-j_0}), \hat{x}_{\pm t_2}(l_{2d-j_0+1}), \dots, \hat{x}_{\pm t_2}(l_{2d-1}), c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots, c_0, a, \dots], \tag{20}$$

где все индексы $\pm t_2$ одинаковые, либо $t_2$ либо $-t_2$, $\bar{q} = \overline{(w_1, k)(n \backslash k')}$, $j_0 \leq d-1$, и имеется $S_j - A$ «неиспользованных» $a$-вхождений.

Для дальнейшего доказательства леммы 15 нам потребуется вытекающая из леммы 9

**Лемма 16.** *Если в коммутаторе* $[g_{\pm t_2}, c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots]$ *число вхождений (возможно, разных) элементов* $a$*, равных линейным комбинациям коммутаторов вида* $[x_{-t_1}(Y - 8(j-1)d),\ x_{t_1}(Y - 8(j-1)d)]$ *при* $t_1$ *таких, что* $\bar{t}_1$ *делит* $\bar{t}_2$*, не менее* $(4d-3)(d-1)$*, общий вес достаточно мал по сравнению с* $W_i$ *и* $Y \geq 8d^2 - 4d - 3$*, то этот коммутатор равен* $0$.

Доказательство. См. доказательство леммы 15 из [2]. □

Преобразуем коммутатор (20), перенося все элементы $\hat{x}_{\pm t_2}(l_i)$ последовательно направо, через все элементы $a$ и $c_0$. Сначала переносим самый правый из них, затем следующий и т. д. Также переносятся направо и возникающие в дополнительных слагаемых подкоммутаторы вида $[\hat{x}_{\pm t_2}(l_i), a, c_0, \dots, c_0, a, \dots]$. При этом, конечно, уменьшается число вхождений элементов $a$. Однако в силу леммы 16 оно может уменьшиться не более чем на $(d-1)(4d-3)(d-1)$ (так как $j_0 \leq d-1$). Поэтому число оставшихся $a$-вхождений в начальных отрезках

$$[u_q, c_0, \dots, c_0, a, c_0, \dots, c_0, a, \dots] \tag{21}$$

будет не менее $S_j - A - (d-1)^2(4d-3)$.

Далее нужно воспользоваться «немодулярным» представлением элементов $a$ и подставить в (21) выражения элементов $a$ в виде линейных комбинаций коммутаторов вида (16). Если $S_j - A - (d-1)^2(4d-3) > (d-1)(4d-3)$, то выделяя $4d-3$ подкоммутаторов с одинаковыми парами индексов и замораживая остальные, получим линейную комбинацию коммутаторов

$$\begin{aligned}[][u_q, c_0, \dots, c_0, [x_{-r_2}(Y - 8(j-1)d), x_{r_2}(Y - 8(j-1)d)], c_0,\\ \dots, c_0, [x_{-r_2}(Y - 8(j-1)d), x_{r_2}(Y - 8(j-1)d)], c_0, \dots],\end{aligned} \tag{22}$$

в которой индекс $r_2$ таков, что $(\bar{r}_2, \bar{k})$ делит $(\overline{w}_1, \bar{k})$, имеется $4d-3$ подкоммутаторов $[x_{-r_2}(Y - 8(j-1)d), x_{r_2}(Y - 8(j-1)d)]$, а число $c_0$-вхождений не превосходит $C_j + S_j$. Так как $j \leq d$, при $Y \geq 8d^2 - 4d - 3$ уровень $Y - 8(j-1)d$ не меньше $4d-3$. Если $W_j \geq 2C_j + 2S_j + 5d - 4$, то все коммутаторы (22) равны 0 по лемме 9. В самом деле, $\bar{q} = \overline{(w_1, k)(n \backslash k')}$, где $k' = k/(w_1, k)$. По лемме 12(d) из [2] если $(\bar{r}_2, \bar{k})$ делит $(\overline{w}_1, \bar{k})$, то $\bar{r}_2$ делит $\overline{(w_1, k)(n \backslash k')}$ и, следовательно, делит $q$.

Лемма 15 доказана. □

Завершим доказательство предложения 2. По лемме 15 коммутаторы вида (19) могут быть ненулевыми только при $\bar{t}_2 < \bar{k}$. Если $\bar{k}$ равно минимальному числу $\bar{s}_{t_1}$ в $\overline{\Omega}$, то этот случай просто невозможен, и доказательство завершено.

В противном случае заморозим «неиспользованные» элементы $a$ в (19) и подставим соответствующие линейные комбинации в коммутатор $b$ вида (17). Получим, что любой $zc$-элемент типа $(w_j \ldots w_1 k(Y))$ равен линейной комбинации $zc$-элементов типа $(w_j t_2(Y-8(j-1)d))$ при $t_2$ таких, что $\bar{t}_2 < \bar{k}$ (так как число $c_0$-вхождений в (19) не превосходит $S_j + C_j$, а разность $C_1 - C_j$ можно выбрать больше $S_j$). Подставим эти выражения во «вложенное» строение $zc$-элементов $h$ типа (12), т. е. типа $(w_F \ldots w_1 k(Y))$. При $S_{i+k}/S_i \geq d$ и $C_j - C_{j+k} \geq S_{j+k}$ получаем, что любой $zc$-элемент $h$ типа (12) равен линейной комбинации $zc$-элементов типов $(w_F \ldots w_j t_2(Y-8(j-1)d))$ при $t_2$ таких, что $\bar{t}_2$ меньше $\bar{k}$. По предположению индукции такие элементы равны нулю при $F - j + 1 \geq \max\{Q(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\}$, т. е. при $F \geq \max\{Q(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\} + j - 1$, что выполняется при

$$F \geq \max\{Q(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\} + d - 1, \tag{23}$$

так как $j \leq d$, и при $Y - 8(j-1)d \geq \max\{H(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\}$, что выполняется при

$$Y \geq \max\{H(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\} + 8d^2 - 8d. \tag{24}$$

Нам осталось только эффективно выбрать функции $H$ и $Q$. Выбор чисел $H(\bar{k})$, $Q(\bar{k})$ диктуется неравенствами (13), (14) и неравенством $Q(j) \geq d$. Вспомогательные функции $F$ и $Y$ должны удовлетворять неравенствам (23), (24) и неравенству $F(j) \geq d$ . Ясно, что можно просто положить

$$F(\bar{k}) = d - 1 + \max\{Q(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\}; \quad Y(\bar{k}) = 8d^2 - 8d + \max\{H(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\};$$
$$Q(\bar{k}) = 2d - 3 + \max\{Q(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\}; \quad H(\bar{k}) = 8(2d-3)d + \max\{H(\bar{t}) \mid \bar{t} < \bar{k}\};$$
$$Q(\bar{s}_{t_1}) = 2d - 3; \quad H(\bar{s}_{t_1}) = 8(2d-3)d.$$

Если число строгих неравенств в цепочке $0 < \bar{s}_{t_1} \leq \bar{s}_{t_2} \leq \cdots \leq \bar{s}_{t_d} = n$, где $\{s_{t_1}, s_{t_2}, \ldots, s_{t_d}\} = \Omega$, равно $r \leq d$, то число шагов в индукционном построении функций $Q$ и $H$ равно $r-1$. Пусть $\bar{s}_i$ максимальное среди всех $\bar{s}_i$ для $n \neq s_i \in \Omega$. Тогда

$$Q(\bar{s}_t) = (2d-3)(r-1); \quad H(\bar{s}_t) = 8d(2d-3)(r-1).$$

Наивысший уровень $N$ можно определить как $H(\bar{s}_t) + 2$, а число шагов в построении подалгебр $Z_i$ как $Q(\bar{s}_t) + 1$. Общее число параметров $T_i$, $S_i$ и $C_i$ равно $Q(\bar{s}_t)$, а число параметров $W_i$ равно наивысшему уровню $N = H(\bar{s}_t) + 2$.

Остальные параметры должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$W_N \geq 2d^2 \text{ (лемма 10)}; \quad T_i/S_i > d - 1 \text{ при } i > 1 \text{ (лемма 10)};$$
$$T_i/S_i > (d-1)^i \text{ (лемма 10)}; \quad C_i \geq T_i - S_i \text{ (лемма 10)};$$
$$S_i \geq 4d - 3 \text{ (лемма 10, предложение 2)}; \quad W_1 \geq 2(T_i - S_i) + 5d - 4 \text{ (лемма 10)};$$
$$S_{i+k}/S_i > d - 1 \text{ (лемма 11, предложение 2)};$$
$$C_j - C_{j+k} \geq S_{j+k} \text{ при } k \geq 1 \text{ (лемма 11, предложение 2)};$$
$$S_1 \geq 8d - 7 \text{ (лемма 12)}; \quad W_1 \geq 2C_1 + 5d - 4 \text{ (лемма 12, предложение 2)};$$
$$W_1 \geq 2C_1 + 12d - 11 \text{ (лемма 12)}; \quad W_l - W_{l-1} \geq 2C_1 + 12d - 12 \text{ (лемма 12)};$$
$$W_l - W_{l-1} \geq 2C_1 + 2S_1 \text{ (лемма 12)}; \quad W_i \geq 2C_1 + 2S_1 + d - 1 \text{ (лемма 12)};$$
$$A > (d-1)S_1 \text{ (предложение 2)}; \quad W_1 \geq 2C_j + 2S_j + 5d - 4 \text{ (предложение 2)};$$
$$S_j > A + (d-1)^2(4d-3) + (4d-3)(d-1) \text{ при } j > 1 \text{ (предложение 2)}.$$

Выберем параметры в следующем порядке: сначала $S_1 = 8d - 7$, затем $A = (d-1)S_1 + 1$, затем $S_j$, затем $T_i$, затем убывающая цепочка $C_j$ и, наконец, числа $W_i$ с достаточно большой разницей $W_{i+1} - W_i$. $\square$

## § 8. Доказательство теоремы 2

Модифицируем построения § 4. Вместо выбора базиса подпространства, натянутого на все значения некоторого шаблона **P** простого коммутатора с нулевой суммой индексов по модулю $n$, для каждого элемента $c_0 \in L_0$, который представляется в виде значения этого шаблона **P**, нужно зафиксировать одно такое представление. Элементы, участвующие в этом представлении, и будут играть роль $x$-представителей. Их число будет $(m, d)$-ограниченным, так как порядок аддитивной подгруппы $L_0$ равен $m$. $b$-Представители выбираются как представители смежных классов подгрупп $L_i(j)$ в аддитивных группах $L_i$. Их число также будет $(m, d)$-ограниченным, так как порядок аддитивной фактор-группы $L_i/L_i(j)$ будет $(m, d)$-ограниченным. После этих изменений доказательство теоремы 2 повторяет дословно доказательство теоремы 1, если везде заменить слово «подалгебра» словом «подкольцо», слово «коразмерность» словом «индекс» и т. д.

### *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Хухро Е. И.* Кольца Ли и группы, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 9. С. 1207–1219.
2. *Makarenko N. Yu. Khukhro E. I.* Almost solubility of Lie algebras with almost regular automorphisms // J. Algebra. 2004. V. 277, N 1. P. 370–407.
3. *Крекнин В. А.* Разрешимость алгебр Ли с регулярными автоморфизмами конечного периода // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 3. С. 467–469.
4. *Khukhro E. I., Makarenko N. Yu.* Lie rings with almost regular automorphisms // J. Algebra. 2003. V. 264, N 2. P. 641–664.
5. *Shalev A.* Automorphisms of finite groups of bounded rank // Israel J. Math. 1993. V. 82. P. 395–404.
6. *Jacobson N.* A note on automorphisms and derivations of Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. V. 6, N 2. P. 281–283.
7. *Khukhro E. I. Shumyatsky P.* Lie algebras with almost constant-free derivations // J. Algebra. 2006. V. 306, N 2. P. 544–551.
8. *Khukhro E. I., Makarenko N. Yu., Shumyatsky P.* A nilpotent ideal instead of a nilpotent subalgebra in algebras with almost constant-free derivations. Preprint, 2006.
9. *Хухро Е. И.* О разрешимости колец Ли с автоморфизмом конечного порядка // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1187–1192.


*Статья поступила 7 августа 2006 г.*

*Макаренко Наталья Юрьевна*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
*пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090*
makarenk@math.nsc.ru