Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 517.9+533

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ 2.5–МЕРНЫХ РЕШЕНИЙ

М. А. Игнатьева, А. П. Чупахин

Аннотация: Уравнения газовой динамики проинтегрированы в конечном виде для решений, в которых термодинамические параметры зависят лишь от одной пространственной переменной. Соответствующие движения газа являются нелинейной суперпозицией одномерного движения газа, отвечающего инвариантной системе, и двумерного, задаваемого неинвариантными функциями. Такие движения названы 2.5-мерными. Инвариантная система сведена к обыкновенному неявному дифференциальному уравнению первого порядка. Исследованы его различные решения. Построены непрерывные и разрывные решения уравнения газовой динамики, дана их физическая интерпретация.

Ключевые слова: частично инвариантные решения, уравнения газовой динамики, неявные дифференциальные уравнения.

§ 1. Введение

Система уравнений газовой динамики [1]:

$$\begin{cases} \rho D\vec{u} + \nabla \mathrm{p} = 0, \\ D\rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \\ DS = 0, \\ \mathrm{p} = F(\rho, S), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости в декартовых координатах $\vec{x} = (x, y, z)$; ρ, p и S — давление, плотность и энтропия, связанные уравнением состояния (последнее в системе (1.1)); t — время; $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $D = \partial_t + \vec{u}\nabla$, допускает в качестве алгебры симметрии расширенную алгебру Галилея [2]. Ее неподобные подалгебры, составляющие оптимальную систему подалгебр, являются источниками инвариантных, частично инвариантных, дифференциально инвариантных точных решений системы (1.1) [2, 3]. Частично инвариантные решения представляют большой интерес, поскольку они образуют обширный класс и могут быть исследованы достаточно детально.

Главной особенностью частично инвариантных решений по сравнению с инвариантными является то, что в них лишь часть искомых функций имеет инвариантное представление, а другая часть остается произвольной. При подстановке такого представления решения в исходную систему дифференциальных уравнений происходит ее расщепление на инвариантную подсистему, связывающую только инвариантные величины, и неинвариантную, которая является переопределенной. Эту подсистему нужно привести в инволюцию — выписать

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00000) и Интеграционного проекта СО РАН № 2.15.

все условия ее совместности. Этот этап исследования наиболее сложен и трудоемок, хотя согласно алгоритму Картана (см. [4]) он реализуется за конечное число шагов. Решение представляется в виде сложной нелинейной суперпозиции решений указанных подсистем.

В данной работе исследовано частично инвариантное решение системы (1.1), имеющее ранг 1 и дефект 2 (см. [2]). Оно представляет большой самостоятельный интерес, поскольку неинвариантная подсистема для него сводится к уравнениям газовой динамики с «одномерной термодинамикой», а инвариантная — к неявному дифференциальному уравнению первого порядка [5]. Неинвариантная подсистема интегрируется в конечном виде. Алгоритм ее интегрирования совпадает с тем, который был реализован для барохронных решений уравнений газовой динамики [6]. Инвариантная система сводится к одному неявному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, исследование которого имеет свою специфику [7, 8], зависящую, в частности, от показателя адиабаты политропного уравнения состояния. Доказано, что наряду с непрерывными решениями рассматриваемого вида существуют разрывные, отвечающие движению газа с ударной волной. Детальное исследование фактор-уравнений данного решения позволяет дать исчерпывающую физическую картину движения газа.

§ 2. Фактор-уравнения

Рассмотрим следующую подалгебру алгебры симметрии уравнений (1.1):

$$H = \langle \partial_y, \partial_z, t\partial_y + \partial_v, t\partial_z + \partial_w, y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \partial_t \rangle,$$

порождающую частично инвариантное решение вида

$$u = u(x), \quad \rho = \rho(x), \quad S = S(x), \quad \mathrm{p} = \mathrm{p}(x), \quad v = v(t, \vec{x}), \quad w = w(t, \vec{x}). \tag{2.1}$$

Инварианты данной подалгебры: x, u и термодинамические параметры ρ, p, S, где u — компонента скорости вдоль оси Ox. Неинвариантные функции: v, w.

Рассмотрим газ с политропным уравнением состояния $\mathrm{p} = S\rho^\gamma$, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты. Подставляя представление (2.1) в систему (1.1), получаем фактор-систему, состоящую из инвариантной системы:

$$uu' + \rho^{-1}\mathrm{p}' = 0, \quad uS' = 0, \tag{2.2}$$

и переопределенной системы для неинвариантных функций:

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = 0, \quad w_t + uw_x + vw_y + ww_z = 0, \quad v_y + w_z = h(x), \tag{2.3}$$

где

$$h(x) = -[u(\ln\rho)' + u']. \tag{2.4}$$

Штрихом в (2.2) и (2.4) обозначена производная по переменной x. Система (2.2) после интегрирования принимает вид инвариантного интеграла Бернулли:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = b_0, \tag{2.5}$$

где $c^2 = \gamma\mathrm{p}/\rho$ — квадрат скорости звука, $b_0 = \mathrm{const} > 0$. Из второго уравнения системы (2.2) при $u \not\equiv 0$ следует условие изэнтропичности движения: $S_0 = \mathrm{const}$.

§ 3. Неинвариантная система

Система (2.3) является аналогом системы, описывающей барохронные решения уравнений газовой динамики [6]. Введем матрицу Якоби

$$J = \begin{pmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

и ее алгебраические инварианты

$$h = \operatorname{tr} J = v_y + w_z, \quad k = \det J = v_y w_z - v_z w_y. \tag{3.2}$$

Собственные значения λ_i $(i = 1, 2)$ матрицы J являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - h\lambda + k = 0. \tag{3.3}$$

Определим новую переменную $X = X(x)$, выпрямляющую производную $D_0 = u(x)\partial_x$ $(u \not\equiv 0)$, по формуле

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{u}, \quad X = \int \frac{dx}{u(x)}. \tag{3.4}$$

После перехода к лагранжевой координате $\xi = t - X$, так, что $D\xi = 0$, система (2.3), дополненная выражением для $\det J$, переписывается в виде

$$v_t + v v_y + w v_z = 0, \quad w_t + v w_y + w w_z = 0, \quad v_y + w_z = h, \quad v_y w_z - v_z w_y = k. \tag{3.5}$$

Лемма 1. *Условиями совместности переопределенной системы* (3.5) *являются следующие уравнения для функций $h = h(X)$, $k = k(X)$:*

$$h_X + h^2 = 2k, \quad k_X + hk = 0. \tag{3.6}$$

Доказательство. Система (3.5) переопределена: она содержит четыре уравнения для двух функций v и w. Выпишем условие совместности, продифференцировав первое уравнение (3.5) по y, второе — по z, третье — вдоль производной $D = \partial_t + v\partial_y + w\partial_z$. Вычитая полученные результаты и вычисляя коммутаторы $[(Dv)_y, Dv_y]$, $[(Dw)_z, Dw_z]$, получим первое уравнение (3.6). Из него следует, что $k = k(X)$.

Второе уравнение совместности (3.6) получается после дифференцирования вдоль D четвертого уравнения (3.5) и подстановки в это равенство выражений $Dv_y, \ldots, Dw_z$ из первых двух уравнений (3.5). $\square$

Таким образом, векторное поле, порождающее данное решение уравнений газовой динамики, является специальным. Матрица Якоби (3.1) этого векторного поля имеет специальные алгебраические инварианты, зависящие лишь от переменной x и являющиеся решением системы (3.6).

Следствие 1. *Пусть*

$$Q = 1 + h_0 X + k_0 X^2, \tag{3.7}$$

где $h_0, k_0 = \text{const}$. *Тогда общее решение системы* (3.6) *имеет вид*

$$h = \frac{Q_X}{Q}, \quad k = \frac{Q_{XX}}{2Q}. \tag{3.8}$$

Следствие 2. *Собственные значения* λ_i $(i = 1, 2)$ *матрицы Якоби* (3.1) *удовлетворяют уравнениям*

$$\lambda_{iX} + \lambda_i^2 = 0 \tag{3.9}$$

и имеют вид

$$\lambda_i = \frac{\lambda_{i0}}{1 + \lambda_{i0}X}, \quad \lambda_{i0} = \mathrm{const}, \quad i = 1, 2, \tag{3.10}$$

где собственные значения λ_{i0} *и алгебраические инварианты* h_0, k_0 *отвечают матрице Якоби* $J_0 = J|_{X=0}$.

Полученные выше свойства матрицы J позволяют проинтегрировать систему (3.5) в конечном виде. При этом полезной является информация о том, что последние два уравнения системы (3.5) сводятся к системе линейных уравнений.

Теорема 1. *Система уравнений*

$$v_y + w_z = h, \quad v_y w_z - v_z w_y = k, \tag{3.11}$$

где h *и* k *— постоянные, относительно переменных* y *и* z, *сводится к линейной и ее общее решение зависит от структуры собственных значений матрицы* J.

Доказательство. Действительно, система (3.11) заменой переменных

$$z = Z(y, v), \quad w = W(y, v), \quad Z_v \neq 0$$

сводится к линейной системе уравнений

$$W_v - Z_y - hZ_v = 0, \quad Z_y + kZ_v = 0. \tag{3.12}$$

Перекрестным дифференцированием уравнений системы (3.12) сведем их к одному линейному уравнению второго порядка для функции Z:

$$Z_{yy} + hZ_{yv} + kZ_{vv} = 0, \tag{3.13}$$

которое может быть переписано в виде $L_1 L_2 Z = 0$, где $L_i = \partial_y - \lambda_i \partial_v$ и величины λ_i удовлетворяют характеристическому уравнению $\lambda^2 - h\lambda + k = 0$. В зависимости от знака d_0 уравнение (3.13) приводится к каноническому виду: волновому для $d_0 > 0$, уравнению Лапласа для $d_0 < 0$, стандартному параболическому для $d_0 = 0$. Для канонического вида уравнения (3.13) можно явно выписать формулы общего решения полной системы (3.5). Заметим, что d_0 является дискриминантом характеристического уравнения матрицы J. □

Теорема 2. *Общее решение системы* (3.5) *зависит от знака величины* d_0 *и задается неявным образом следующими уравнениями:*

$$F_1(\xi, \alpha_1, \beta_1) = 0, \quad F_2(\xi, \alpha_2, \beta_2) = 0, \tag{3.14}$$

где аргументы произвольных функций F_1 *и* F_2 *имеют вид*

$$\alpha_k = y - \lambda_k^{-1} v, \quad \beta_k = z - \lambda_k^{-1} w, \quad k = 1, 2, \tag{3.15}$$

при $d_0 > 0$, $\lambda_{i0} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{10} \neq \lambda_{20} \neq 0$;

$$F_1(\xi, \alpha, \beta) = 0, \quad \alpha F_{1\alpha} + \beta F_{1\beta} + F_2(\xi, \alpha, \beta) = 0,$$

где F_1 *и* F_2 *— произвольные функции аргументов* $\alpha = y - \lambda_0^{-1} v$, $\beta = z - \lambda_0^{-1} w$, *при* $d_0 = 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $h_0 = 2\lambda_0$, $k_0 = \lambda_0^2$;

$$z = F_1(\xi, \zeta, \eta), \quad w = F_2(\xi, \zeta, \eta),$$

где F_1, F_2 — гармонические функции переменных $\zeta = v - \tau y$, $\eta = \sigma y$ при $d_0 < 0$, $\lambda_{10,20} = \tau \pm i\sigma$.

Замечание. Величины λ_k определяются леммой 1 и следствиями из нее. Произвольные гладкие F_1 и F_2 удовлетворяют условиям теоремы о неявной функции, соответствующий определитель относительно v и w отличен от нуля.

Доказательство проведем для случая различных вещественных собственных значений. Разобьем его на два этапа. На первом покажем, что из формул (3.14) следуют равенства $Dv = Dw = 0$. На втором установим, что (3.14) определяет векторное поле $\vec{v} = (v, w)$, для которого алгебраические инварианты матрицы Якоби удовлетворяют лемме 1.

Действуем на левые части формул (3.14) оператором $D = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$. В силу (3.10)

$$D\alpha_k = v + \lambda_k^{-2}(D\lambda_k)v - \lambda_k^{-1}Dv = -\lambda_k^{-1}Dv.$$

Аналогично $D\beta_k = -\lambda_k^{-1}Dw$. Получаем матричное уравнение, линейное относительно Dv и Dw:

$$\begin{pmatrix} F_{1\alpha_1} & F_{1\beta_1} \\ F_{2\alpha_2} & F_{2\beta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Dv \\ Dw \end{pmatrix} = 0. \tag{3.16}$$

Поскольку определитель системы (3.16) отличен от нуля в силу замечания к теореме 2, она имеет лишь нулевое решение $Dv = Dw = 0$.

Продифференцируем равенства (3.14) по y и z. Получим следующее матричное соотношение:

$$TJ = \Lambda T, \tag{3.17}$$

$$T = \begin{pmatrix} F_{1\alpha_1} & F_{1\beta_1} \\ F_{2\alpha_2} & F_{2\beta_2} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Равенство (3.17) означает подобие матриц J и Λ, следовательно, они имеют совпадающие алгебраические инварианты и собственные значения. Таким образом, доказано, что векторное поле $\vec{v}$, определяемое уравнениями (3.14), удовлетворяет всем уравнениям системы (3.5).

Доказательство в случае кратных и комплексных собственных значений аналогично. В случае кратных собственных значений в соотношении (3.16) матрица T имеет следующий вид:

$$T = \begin{pmatrix} F_{1\alpha} & F_{1\beta} \\ F_{1\alpha} + \alpha F_{1\alpha\alpha} + F_{2\alpha} + \beta F_{1\alpha\beta} & F_{1\beta} + \beta F_{1\beta\beta} + F_{2\beta} + \alpha F_{1\alpha\beta} \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Векторы, составляющие матрицу T, над полем функций являются собственными для матрицы J. Теорема доказана. $\square$

Неинвариантная система (2.4) проинтегрирована полностью на решениях инвариантной системы (2.3). Для описания решения нужно знать функцию $X = X(x)$. Полученный результат иллюстрирует главную особенность частично инвариантных решений. Как фактор-система, описывающая эти решения, так и движения газа представляются в виде композиции уравнений и движений, отвечающих инвариантной и неинвариантной компонентам. Решение каждой из этих систем проще, чем решение исходной системы, и может быть осуществлено эффективно.

§ 4. Инвариантная система

Инвариантная система, состоящая в данном случае из одного уравнения, является следствием инвариантного интеграла Бернулли (2.5).

Найдем представление для плотности. Функция $h = h(x)$ в (2.3) имеет вид (2.4). Подставляя h из (3.8) в (2.4) и переходя к переменной X из (3.4), получим формулу для плотности

$$\rho = \frac{R_0}{|uQ|}, \quad R_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{4.1}$$

Преобразуем интеграл Бернулли (2.4) с помощью (4.1) к виду

$$p^2 \left|\frac{p}{Q}\right|^{\gamma-1} - \frac{b_0(\gamma-1)}{\gamma S_0 R_0^{\gamma-1}} p^2 + \frac{\gamma-1}{2\gamma S_0 R_0^{\gamma-1}} = 0, \tag{4.2}$$

где $p = dX/dx, Q = 1 + h_0 X + k_0 X^2, \gamma \geq 1, k_0, h_0 = \mathrm{const}$.

Уравнение (4.2) относится к классу неявных дифференциальных уравнений. Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Такие уравнения обладают особой спецификой: в каждой точке области определения решения интегральные кривые образуют пучок.

Лемма 2. *Размерность пучка интегральных кривых уравнения* (4.2) *для рациональных* γ *не превосходит четырех.*

Для рациональных γ уравнение (4.2) является алгебраическим относительно производной p или сводится к таковому заменой переменных. Доказательство леммы основано на теореме Декарта, дающей оценку числа вещественных корней многочлена в зависимости от числа перемен знака последовательности коэффициентов. Это число зависит не столько от степени многочлена, сколько от числа слагаемых в нем [9].

Тем самым множество рациональных показателей адиабаты γ разбивается на два. Для одного из них знак модуля в (4.2) исчезает, поскольку показатель имеет четный числитель, для другого остается. Простейшими представителями этих классов являются значения γ, равные 3 и 2. Для первого случая анализ ключевого уравнения и исследование соответствующих движений газа проделаны в [10]. В данной работе исследуется специфика показателя $\gamma = 2$. Основные, качественные свойства как решения ключевого уравнения (4.2), так и движения газа аналогичны случаю рационального γ с четным числителем.

Рассмотрим уравнение (4.2) для $\gamma = 2$:

$$p^2 \left|\frac{p}{Q}\right| - \frac{b_0}{2S_0R_0} p^2 + \frac{1}{4S_0R_0} = 0. \tag{4.3}$$

Пусть $d_0 > 0$ — дискриминант Q: $d_0 = h_0^2/4 - k_0$. Тогда, сделав замену

$$X = -\frac{\sqrt{d_0}}{2k_0} X_1 - \frac{h_0}{k_0}, \quad x = \frac{3\sqrt{d_0} S_0 R_0}{k_0 b_0} x_1, \tag{4.4}$$

приведем уравнение (4.3) к виду

$$F(x_1, X_1, p_1) = p_1^2 \left|\frac{p_1}{Q_1}\right| - 3p_1^2 + 4{\alpha_0}^2 = 0, \tag{4.5}$$

где $\alpha_0^2 = 27S_0^2R_0^2/2b_0^3$, $Q_1 = 1 - X_1^2$. Будем называть (4.5) *ключевым уравнением.* Единицу в индексе в дальнейшем опускаем.

Заметим, что в уравнении (4.5) наличие модуля приводит к увеличению количества компонент области определения решения.

§ 5. Описание решения инвариантной системы

Уравнение (4.5) задает поверхность в пространстве струй $\mathbb{R}^3(x, X, p)$. Поскольку его левая часть не зависит явно от x, эта поверхность будет цилиндрической по координате x. Она состоит из нескольких компонент (листов). Будем рассматривать сечение этой поверхности плоскостью $x = \mathrm{const}$ на плоскости $\mathbb{R}^2(X, p)$.

Число компонент поверхности зависит от значения параметра α_0. При значениях параметра $\alpha_0 = 1$ происходит перестройка геометрии поверхности и меняется число ее компонент. Рассмотрим случай $\alpha_0 = 1/2$, такому значению отвечает максимальное число компонент.

Раскроем модуль в уравнении (4.5). Тогда оно эквивалентно двум уравнениям:

$$\varepsilon p^3 - 3Qp^2 + 4Q{\alpha_0}^2 = 0, \quad \varepsilon = \mathrm{sign}(pQ). \tag{5.1}$$

Далее будем рассматривать случай $p > 0$, поскольку случай $p < 0$ сводится к нему заменой $p \to -p$. Физически это соответствует замене источника газа стоком.

Разрешим (5.1) относительно X в виде

$$X = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{-\varepsilon_2 p^3 + 3p^2 - 4\alpha_0^2}{3p^2 - 4\alpha_0^2}}. \tag{5.2}$$

Решение уравнений (5.1) задается в параметрической форме соотношением (5.2), определяющим зависимость $X = X(p)$, и интегралом

$$x = \int\limits_{p_1}^{p_2} \frac{X'(p)dp}{p} + x_0, \tag{5.3}$$

где x_0 — константа интегрирования. Интеграл (5.3) при функции $X = X(p)$, определяемой (5.2), вычисляется в эллиптических функциях. Однако изучение свойств решения в такой форме достаточно громоздко. Предпочтительнее геометрическое исследование решения.

Лемма 3. *Все интегральные кривые уравнений* (5.1) *определены в некоторой области* Ω *на плоскости* $\mathbb{R}^2(p, X)$. *Область* Ω *состоит из нескольких компонент* Ω_i:

$$\begin{gathered}\Omega_1 = \{(p, X) : X(x) \geq \sqrt{1 + \alpha_0}\}, \quad \Omega_2 = \{(p, X) : |X(x)| \leq \sqrt{1 - \alpha_0}\}, \\ \Omega_3 = \{(p, X) : X(x) \leq -\sqrt{1 + \alpha_0}\},\end{gathered} \tag{5.4}$$

на которые накладывается дополнительное условие

$$p^2 \geq \frac{4{\alpha_0}^2}{3}. \tag{5.5}$$

Границы компонент $\partial\Omega_i$ *являются дискриминантными кривыми и задаются уравнениями*

$$L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}\colon \quad X = \varepsilon_1 \sqrt{1 - \varepsilon_2 \alpha_0}, \tag{5.6}$$

где $\varepsilon_1 = \operatorname{sign} X$, $\varepsilon_2 = \operatorname{sign} Q$. *Через каждую точку области* Ω *проходят две интегральные кривые.*

Доказательство. Криминанта уравнения (5.1), определяемая системой $F = 0, F_p = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^3(x, X, p)$, имеет вид

$$p = 2Q, \quad Q^2 = \alpha_0^2.$$

Дискриминантная кривая является проекцией криминанты на плоскость $\mathbb{R}^2(x, X)$ и задается уравнением

$$Q^2 = \alpha_0^2. \tag{5.7}$$

Дискриминанты уравнений (5.1) совпадают и равны $D = 4\alpha_0^2 Q^2 \big(\alpha_0^2 - Q^2\big)$.

Если $D > 0$, то каждое из уравнений (5.1) имеет один вещественный корень; если $D < 0$, то — три вещественных корня; $D = 0$ соответствует случаю кратных корней.

Из неотрицательности члена, содержащего модуль в ключевом уравнении, следует ограничение (5.5) на величину p. Оно накладывает условие на область определения решения на плоскости $\mathbb{R}^2(p, X)$.

Случай единственного вещественного корня $D > 0$ невозможен в силу ограничения (5.5). Остаются лишь случаи $D \le 0$. Следовательно, область определения решения (5.1) есть $\Omega = \big\{Q^2 \le \alpha_0^2\big\}$ при выполнении условия (5.5).

Дискриминантная кривая задается соотношением $D = 0$ и, поскольку $Q = 1 - X^2$, состоит из нескольких ветвей $L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}$: $X = \varepsilon_1\sqrt{1 - \varepsilon_2\alpha_0}$. Число ветвей зависит от значения параметра α_0. При $\alpha_0 < 1$ оно максимально и равно 4. Таким образом, область Ω состоит из трех компонент Ω_i, границами которых являются дискриминантные кривые $L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}$.

При $D < 0$ в каждой точке области Ω существует пучок из двух интегральных кривых. Это так, поскольку один из трех вещественных корней не удовлетворяет условию (5.5). □

Лемма 4. *Все решения являются строго монотонными функциями переменной x.*

Лемма 5. *Точки, лежащие на кривых $L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}$ при $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, являются точками ветвления, а на кривых $L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}$ при $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$ — точками остановки. Семейство интегральных кривых, выходящих из $L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}$ при $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, диффеоморфно семейству полукубических парабол $X = x^{3/2} + C$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $p > 0$ и $Q > 0$ ($\varepsilon_2 = 1$), тогда (6.1) имеет вид

$$F = p^3 - 3Qp^2 + 4Q{\alpha_0}^2 = 0.$$

Для того чтобы определить, являются ли точки дискриминантных кривых точками ветвления или остановки интегральных кривых, согласно [8] необходимо вычислить величины

$$G = F_x + pF_X = 2pX\big(3p^2 - 4\alpha_0^2\big), \quad F_p = 3p^2 - 6pQ, \quad F_{pp} = 6p - 6Q.$$

Следовательно, $F_p = F_{pp} = 0$ в том и только том случае, когда $p = Q = 0$. Это множество не лежит в области Ω определения решения уравнения (6.1). Если $GF_{pp}|_{L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}} < 0$ ($\varepsilon_1 = \operatorname{sign} X$, $\varepsilon_2 = \operatorname{sign} Q$), то $L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}$ — точка ветвления, в противном случае — остановки. Значит, L_+^- — кривая, состоящая из точек ветвления, а L_+^+ — из точек остановки. Аналогичное доказательство проводится и для кривых L_-^+, L_-^-. По следствию теоремы Чибрарио [8] семейство интегральных кривых, выходящих из дискриминантных кривых $L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}$, диффеоморфно семейству полукубических парабол. □

§ 6. Физические свойства

Всякое решение ключевого уравнения (4.5) есть интегральная кривая в пространстве $\mathbb{R}^2(X,p)$. Каждой такой интегральной кривой соответствует движение газа в физическом пространстве.

Поскольку на дискриминантной кривой производная обращается в бесконечность, то физически это соответствует источнику или стоку: движение начинается на образе дискриминантной кривой с бесконечным положительным ускорением либо заканчивается на нем. Образом дискриминантной кривой в физическом пространстве $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ является некоторая плоскость $x=x_*$. Если интегральная кривая заканчивается на дискриминантной кривой, то это соответствует течению, приходящему в сток. Поскольку существует несколько типов интегральных кривых, то имеется несколько различных режимов движения газа. Будем интерпретировать свойства решения ключевого уравнения в физических терминах [1].

Лемма 6. *Дискриминантная кривая* (5.6) *на плоскости* $\mathbb{R}^2(X,p)$ *является образом инвариантной звуковой характеристики уравнений газовой динамики на решении* (5.3), *задаваемой в физическом пространстве* $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ *поверхностью* $x=x_0$.

Следствие 3. *Если* $c^2<u^2$, *то течение сверхзвуковое при* $p^2<4\alpha_0^2$. *В противном случае течение может быть смешанного типа: дозвуковой и сверхзвуковой режимы могут чередоваться.*

Информация о том, какая интегральная кривая соответствует тому или иному режиму движения газа, сведена в таблице. В последнем столбце указан знак производной x_p на различных листах Γ_{ij}. Напомним, что Γ_{ij} — это различные листы, на которых интегральные кривые уравнения (4.9) монотонны и выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Таблица.

Γ_{ij}	ε_1	ε_2	$1(p<2\alpha_0)/2(p>2\alpha_0)$	поведение $x=x(p)$
Γ_{11}	$+$	$-$	2	$x_p>0$
Γ_{12}	$+$	$-$	1	$x_p<0$
Γ_{21}	$+$	$+$	2	$x_p<0$
Γ_{22}	$+$	$+$	1	$x_p>0$
Γ_{23}	$-$	$+$	2	$x_p>0$
Γ_{24}	$-$	$+$	1	$x_p<0$
Γ_{31}	$-$	$-$	2	$x_p<0$
Γ_{32}	$-$	$-$	1	$x_p>0$

Индекс i в Γ_{ij} показывает принадлежность соответствующего листа области Ω_i, j отвечает различным режимам движения газа. В четвертом столбце таблицы цифра 1 означает, что соответствующий режим отвечает сверхзвуковому движению газа, а 2 — «дозвуковому», т. е. такому, при котором $|u|<c$.

Лемма 7. *Существует два асимптотических режима движения газа:*

а) *тормозящийся поток газа, в котором достигается максимальная скорость звука:*

$$u \to 0, \quad c \to c_{\max} \quad \text{при } x \to \infty; \tag{6.1}$$

б) *ускоряющийся поток газа, в котором происходит его разрежение:*

$$u \to u_{\max}, \quad c \to 0 \quad \text{при } x \to x_*. \tag{6.2}$$

§ 7. Пример решения неинвариантной системы

Общее решение неинвариантной системы задается уравнениями (3.14). Рассмотрим установившиеся движения газа и выберем функции F_i в (3.14) следующим образом:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1. \tag{7.1}$$

Пусть $h_0 = 0, k_0 = -1$, тогда $Q = 1 - X^2$. Следовательно,

$$\lambda_{10} = -1, \quad \lambda_{20} = 1. \tag{7.2}$$

После подстановки (7.2) в (7.1) получим систему

$$(y-(1+X)v)^2+(z-(1+X)w)^2 = 1, \quad (y+(1-X)v)^2+(z+(1-X)w)^2 = 1. \tag{7.3}$$

Заметим, что X не принимает значений ± 1.

Вводя цилиндрические координаты $(y, z, X) \to (r, \theta, X)$, $(u, v, w) \to (u, V, W)$, получим решение системы (7.3) в виде

$$V = \frac{X(1-r^2)}{r(1-X^2)}, \quad W^2 = \frac{(r^2-1)(X^2-r^2)}{r^2(X^2-1)^2}. \tag{7.4}$$

Уравнения линий тока

$$\frac{dr}{V} = \frac{r d\theta}{W} = dX \tag{7.5}$$

интегрируются и определяют закон движения частиц газа:

$$r = \sqrt{c_1(X^2-1)+1}, \quad \theta = \pm \operatorname{arctg}\left(X(x)\sqrt{\frac{c_1}{1-c_1}}\right) + c_2, \quad X = X(x), \tag{7.6}$$

где $X = X(x)$ — решение ключевого уравнения (4.5), c_1, c_2 — константы интегрирования, причем $-1 \le c_1 \le 1$.

Выпишем явно уравнение звуковой поверхности в физическом пространстве $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, которая определяется соотношением

$$c^2 = |\overrightarrow{U}|^2, \tag{7.7}$$

где $|\overrightarrow{U}|^2 = u^2 + V^2 + W^2$. Представление для u, V, W есть

$$u^2 = \frac{8b_0\alpha_0^2}{3p^2}, \quad V^2 + W^2 = \frac{r^2-1}{X^2-1},$$

где $X = X(x)$ — решение ключевого уравнения, V, W — решение неинвариантной системы (7.4). Тогда уравнение (7.7) принимает вид

$$r^2 = \frac{3p^2 - 4\alpha_0^2 - b_0\varepsilon_2 p(p^2 - 4\alpha_0^2)}{3p^2 - 4\alpha_0^2}. \tag{7.8}$$

В случае монотонной зависимости $p = p(x)$ качественный вид звуковой поверхности в пространствах $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ и $\mathbb{R}^3(p, y, z)$ один и тот же.

При $r = 1$ соотношение (7.8) переходит в звуковую характеристику.

§ 8. Соотношения на скачке, ударная волна

Покажем, что для данной подмодели определены не только непрерывные решения, но и решения с сильным разрывом. Используя неединственность решения ключевого уравнения, построим в данном классе решение с ударной волной.

Пусть фронт ударной волны задается уравнением $x = x_0$. Обозначим через u_i, ρ_i, p_i — нормальную к фронту компоненту скорости газа, плотность и давление соответственно ($i = 1$ — состояние перед фронтом, $i = 2$ — за фронтом). На скачке имеют место соотношения Ренкина — Гюгонио [1]:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \tag{8.1}$$

$$\mathrm{p}_1 + \rho_1 u_1^2 = \mathrm{p}_2 + \rho_2 u_2^2, \tag{8.2}$$

$$\frac{2\mathrm{p}_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}u_1^2 = \frac{2\mathrm{p}_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}u_2^2. \tag{8.3}$$

Касательные к фронту компоненты скорости при переходе через ударную волну сохраняются: $\vec{u}_{\tau_1} = \vec{u}_{\tau_2}$, где $\vec{u}_\tau = (V, W)$. Отсюда следует, что $[k_0] = [h_0] = 0$ (§ 4). Константа b_0 в правой части интеграла Бернулли (2.6) при переходе через фронт тоже сохраняется, следовательно, $[b_0] = 0$. Таким образом, неинвариантная составляющая движения определяется только теоремой 2.

Согласно теореме Цемплена нормальная составляющая скорости движения газа больше скорости звука перед фронтом волны и меньше скорости звука за фронтом. По следствию леммы 6 состоянию перед фронтом волны отвечает интегральная кривая X_{12}, а за фронтом — X_{11}.

Рассмотрим решение с ударной волной в области $\Omega_1 = \{p > 0, Q < 0\}$. Тогда, подставив представление (4.5) для плотности и (3.4) для скорости в соотношение (8.1), получим, что $[R_0] = 0$. Поскольку энтропия S_0 изменяется при переходе через ударную волну, то замена переменных (4.4), зависящая от энтропии S_0, различна по разные стороны фронта. Поэтому воспользуемся другой заменой переменных, которая не зависит от энтропии S_0:

$$X = -\frac{\sqrt{d_0}}{2k_0}X' - \frac{h_0}{k_0}, \quad x = \frac{3\sqrt{d_0}R_0}{k_0 b_0}x'. \tag{8.4}$$

При такой замене уравнение (4.3) преобразуется к следующему виду:

$$q^2 S_0 \left|\frac{q}{Q}\right| - 3q^2 + 4\beta_0^2 = 0, \tag{8.5}$$

где $\beta_0^2 = 27R_0^2/2b_0^3 = \alpha_0^2/S_0^2$, $q = dX'/dx'$.

Представления для плотности, давления и скорости в силу (8.4) принимают вид

$$\rho = -\frac{b_0}{6}\frac{q}{Q}, \quad \mathrm{p} = \frac{S_0 b_0^2 q^2}{36Q^2}, \quad u = -\frac{6R_0}{b_0 q}. \tag{8.6}$$

Соотношение (8.3) представляет собой инвариантный интеграл Бернулли (2.6) при $\gamma = 2$, т. е. совпадает с ключевым уравнением (8.5). Следовательно, произвол в определении решения зависит от размерности пучка интегральных кривых ключевого уравнения. Переход через ударную волну соответствует переключению с одной интегральной кривой уравнения (8.5) на другую. Уравнение (8.1) удовлетворяется в силу представления (8.6).

Таким образом, единственным условием на скачке, связывающим величины q_i перед и за фронтом, является уравнение сохранения импульса (8.2).

Подставив в выражение $\mathrm{p}+\rho u^2$ представление термодинамических величин и скорости (8.6), получим $\left[q+4\beta_0^2/q\right]=0$. Раскрывая это соотношение, придем к уравнению

$$(q_1-q_2)\big(q_1q_2-4\beta_0^2\big)=0. \tag{8.7}$$

Поскольку мы использовали замену (8.4) для уравнения (4.3), необходимо переформулировать некоторые его свойства в терминах этих новых переменных (8.4).

1. Дискриминантная кривая для уравнения (8.5) имеет вид $Q^2=\alpha_0^2=\beta_0^2S_0^2$. Поскольку $0<\alpha_0<1$, то $0<\beta_0S_0<1$.

2. Наличие модуля в уравнении (7.18) накладывает условие на величину q:

$$\left|\frac{q}{Q}\right|=\frac{3q^2-4\beta_0^2}{q^2S_0},\quad q\geq\frac{2\beta_0}{\sqrt{3}}.$$

3. Поскольку $p=S_0q$ и $p^2\geq4\alpha_0^2$, то $q^2\geq4\beta_0^2$.

В итоге получаются следующие ограничения на величины q_i и значения энтропии:

$$\beta_0S_{0i}<1,\quad S_{02}>S_{01}, \tag{8.8}$$

$$\frac{2\beta_0}{\sqrt{3}}\leq q_1\leq2\beta_0,\quad 2\beta_0\leq q_2. \tag{8.9}$$

Из уравнения (8.7) следует, что значения q_i по разные стороны фронта связаны соотношением

$$q_1q_2=4\beta_0^2. \tag{8.10}$$

Действительно, условие $q_1=q_2$ соответствует одной и той же интегральной кривой уравнения (8.5), а условие (8.8), (8.9) задает переключение с одной интегральной кривой типа X_{12} на другую типа X_{11}.

Таким образом, задав значение q_1 из интервала (8.8), находим значения q_2 из уравнения (8.10). По этим величинам однозначно строится состояние газа перед и за фронтом волны, а также вычисляется положение самого фронта. Ограничения на энтропию таковы: $S_{0i}<2$ и $S_{02}/S_{01}>1$.

Полученный результат можно сформулировать в виде утверждения.

Теорема 3. *Существуют решения уравнения* (8.5), *определяющие движение газа с ударной волной. Состояние за фронтом волны однозначно восстанавливается по состоянию перед фронтом из уравнения* (8.7), *переход через фронт соответствует переключению с одной интегральной кривой ключевого уравнения на другую.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Овсянников Л. В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
4. *Сидоров А. Р., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
5. *Чупахин А. П.* Небарохронные подмодели типов $(1,2)$ и $(1,1)$ уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1999. (Препринт / Институт гидродинамики СО РАН; №1-99).
6. *Чупахин А. П.* Барохронные движения газа: общие свойства и подмодели типов $(1,2)$ и $(1,1)$. Новосибирск, 1998. (Препринт / Институт гидродинамики СО РАН; №4-98).

7. *Арнольд В. И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.

8. *Ремизов А. О.* О правильных особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 622–630.

9. *Хованский А. Г.* Малочлены. М.: Фазис, 1997.

10. *Чупахин А. П.* Самосопряжение решений через ударную волну: предельный скачок уплотнения // Прикл. механика и техн. физика. 2003. Т. 44, № 3. С. 26–40.

Статья поступила 1 ноября 2005 г., окончательный вариант — 9 марта 2006 г.

Игнатьева Мария Александровна
Новосибирский гос. университет, Пирогова, 2, Новосибирск 630090

Чупахин Александр Павлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
chupakhin@hydro.nsc.ru