Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ДРОБНО–ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОШИБКАМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

А. И. Саханенко, Ю. Ю. Линке

Аннотация: В задаче дробно-линейной регрессии с ошибками в независимых переменных построены и исследованы асимптотически оптимальные оценки неизвестных параметров при невыполнении классических регрессионных предположений (дисперсии наблюдений различны и зависят от неизвестных параметров).

Ключевые слова: нелинейная регрессия, ошибки в независимых переменных, двухшаговый метод оценивания, асимптотически нормальная оценка, состоятельность.

§ 1. Введение

1.1. Пусть переменные $\{y_i\}$, $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ связаны следующими дробно-линейными соотношениями:

$$y_i = \frac{a_i}{1+b_i\theta} \quad \text{при } \theta > 0,\ a_i > 0,\ b_i > 0,\ i = 1,\dots,n, \tag{1}$$

при этом значения параметра θ и числовых последовательностей $\{y_i\}$, $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ неизвестны, однако даны наблюдения $\{Y_i, X_{ai}, X_{bi}\}$, представимые в виде

$$Y_i = y_i + \epsilon_{yi}, \quad X_{ai} = a_i + \epsilon_{ai}, \quad X_{bi} = b_i + \epsilon_{bi}, \quad i = 1,\dots,n, \tag{2}$$

где $\{\epsilon_{yi}\}$, $\{\epsilon_{ai}\}$ и $\{\epsilon_{bi}\}$ — ненаблюдаемые случайные ошибки.

Величины a_i и b_i будем называть *коэффициентами*, а описанную модель регрессии — *моделью со случайными ошибками в коэффициентах.* Задача состоит в том, чтобы в модели дробно-линейной регрессии (1), (2), являющейся частным случаем модели нелинейной регрессии, оценить неизвестный параметр θ.

1.2. Наш интерес к описанной модели регрессии вызван тем, что (1) — это одномерный аналог известного в естественных науках уравнения Михаэлиса — Ментен, которое изучалось в большом числе работ (см., например, [1–7]). При этом в ряде работ особое внимание уделяется задаче нахождения явных оценок неизвестных параметров этого уравнения, для построения которых не использовались бы сложные конструкции и процессы последовательного приближения. Однако до появления наших работ [8, 9] все известные нам явные

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00810), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–8980.2006.1) и Совета по грантам президента РФ для поддержки молодых российских ученых (код проекта МК–5870.2006.1).

оценки этих параметров при естественных предположениях оказывались смещенными. И только в [8] нам удалось решить задачу явного оценивания для модели (1), (2), но лишь при отсутствии случайных ошибок в коэффициентах, т. е. когда $\epsilon_{ai} = \epsilon_{bi} = 0$ при всех i и n.

Наличие же случайных ошибок в коэффициентах существенно усложняет оценивание даже в задаче линейной регрессии (читатель может обратиться за ссылками, например, к [10–13]). В данной нелинейной задаче дело обстоит еще сложнее. В такой ситуации авторы увидели два естественных направления для исследований. Первое направление заключается в том, чтобы взять оценки θ^{**} (мы напомним их определение в (8)), которые были введены еще в [8] и хорошо себя зарекомендовали в данной задаче при отсутствии случайных ошибок в коэффициентах, и изучить их поведение в новой более общей ситуации. Эта задача решается нами в [14]. В частности, в [14] будет показано, что для асимптотической нормальности оценок θ^{**} необходимым или близким к необходимому является следующее предположение:

$$\bar{\sigma}_a := \left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}X_{ai}\right)^{1/2} = o(n^{-1/4}) \quad \text{и} \quad \bar{\sigma}_b := \left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}X_{bi}\right)^{1/2} = o(n^{-1/4}). \tag{3}$$

В нем налагаются неожиданно жесткие требования на точность, с которой необходимо измерять коэффициенты a_i и b_i, $i = 1, \ldots, n$.

В данной статье мы ведем исследование в другом направлении. Первая цель настоящей работы — построить и исследовать некий класс оценок $\hat{\theta}$, которые, с одной стороны, имеют явный и достаточно простой вид, а с другой, специально рассчитаны на наличие случайных ошибок в коэффициентах. В частности, при естественных дополнительных предположениях на характер распределений ошибок в коэффициентах эти оценки должны быть асимптотически нормальными при более слабых условиях, чем (3).

Главную цель этой работы авторы видят в продолжении начатой в [8] разработки некоторого метода исследования асимптотически нормальных оценок параметров в задачах нелинейной регрессии в случае, когда дисперсии «основных» наблюдений зависят от неизвестных параметров, а коэффициенты (называемые часто «независимыми переменными») измеряются со случайными погрешностями. Дело в том, что данная одномерная задача — это единственный известный авторам случай, когда идеи предлагаемого метода можно изложить нагляднее, чем при исследовании многомерных моделей, в котором с необходимостью придется вводить еще и матричные обозначения (см. [15]).

1.3. В настоящей работе, как и в [8, 9, 14, 15], оценки для интересующего нас параметра θ строятся в два этапа. Сначала нужно выбрать некоторые постоянные $\{c_i > 0\}$ и ввести очень просто устроенную оценку

$$\theta^* = \sum_{i=1}^{n} c_i(X_{ai} - Y_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} c_i X_{bi} Y_i. \tag{4}$$

Затем мы должны подобрать функции

$$\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot),\ \lambda_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot),\ \lambda_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

и определить нужную оценку

$$\hat{\theta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_{xi}(\theta^*)(X_{ai} - Y_i) - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{xai}(\theta^*)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_{xi}(\theta^*) X_{bi} Y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{xbi}(\theta^*) Y_i} \tag{6}$$

при

$$\gamma_{xi}(\cdot) = \gamma_i(\cdot, X_{ai}, X_{bi}), \quad \lambda_{xai}(\cdot) = \lambda_{ai}(\cdot, X_{ai}, X_{bi}), \quad \lambda_{xbi}(\cdot) = \lambda_{bi}(\cdot, X_{ai}, X_{bi}). \tag{7}$$

Детальное исследование свойств этого класса оценок будет проведено в § 2 и 3. Главной целью § 2 является получение общих необходимых и достаточных условий для асимптотической нормальности наших оценок $\hat{\theta}$ при по возможности минимальных предположениях на неизвестные распределения наблюдений. Тем самым получаем возможность расширить область для возможного практического применения этих оценок и максимально подробно понять, какие характеристики распределений ошибок и в какой степени влияют на поведение этих оценок. Наиболее наглядный из результатов § 2 будет приведен чуть ниже, в конце п. 1.5.

Отметим, что изучавшаяся в [14] оценка θ^{**} является частным случаем оценки $\hat{\theta}$ из (6):

$$\theta^{**} = \hat{\theta} \quad \text{при } \lambda_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot) \equiv \lambda_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot) \equiv 0, \ i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

1.4. Введем ряд необходимых соглашений об обозначениях и условиях, без которых нам будет трудно привести формулировки хотя бы наиболее простых результатов работы. Подчеркнем особо, что мы допускаем зависимость всех изучаемых и вводимых нами величин от числа наблюдений n. Таким образом, мы предполагаем, что на самом деле при всех $n = 1, 2, \ldots$ и каждом $i = 1, \ldots, n$ даны величины

$$Y_i = Y_i^{(n)}, \ X_{ai} = X_{ai}^{(n)}, \ X_{bi} = X_{bi}^{(n)}, \ \epsilon_{yi} = \epsilon_{yi}^{(n)}, \ \epsilon_{ai} = \epsilon_{ai}^{(n)}, \ \epsilon_{bi} = \epsilon_{bi}^{(n)},$$

где верхний индекс n подчеркивает указанную возможность зависимости этих случайных величин от числа наблюдений n. От n могут зависеть также числа $a_i = a_i^{(n)}$, $b_i = b_i^{(n)}$, $c_i = c_i^{(n)}$, параметр $\theta = \theta^{(n)}$, а также все функции, введенные в (5). Понятно, что, таким образом, от n могут зависеть и все величины, являющиеся функциями от перечисленных. В дальнейшем, чтобы не загромождать обозначения, этот дополнительный индекс ${}^{(n)}$ будем в большинстве случаев опускать (и сохранять лишь в самых необходимых случаях).

Мы предполагаем, что индекс i всегда пробегает значения от 1 до n и что символ $\sum$ без индексов используется только вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}$. Далее все пределы берутся при $n \to \infty$, а сходимость $\eta \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ означает, что распределение случайной величины $\eta = \eta^{(n)}$ слабо сходится к стандартному нормальному распределению. При определении некоторых величин нам иногда вместо привычного знака равенства удобнее использовать символ :=, подчеркивающий, что слева от этого символа стоит обозначение для выражения, стоящего справа от него. Еще условимся использовать упрощенные обозначения

$$\gamma'_{ai}(\cdot, a, \cdot) = \frac{\partial \gamma_i(\cdot, a, \cdot)}{\partial a}, \ \gamma'_{bi}(\cdot, \cdot, b) = \frac{\partial \gamma_i(\cdot, \cdot, b)}{\partial b}, \ \gamma'_{xi}(t), \ \lambda'_{xai}(t), \ \lambda'_{xbi}(t) \tag{9}$$

в случаях, когда соответствующие частные производные существуют.

1.5. Всюду в работе мы предполагаем, что при каждом n случайные векторы $(\epsilon_{yi}, \epsilon_{ai}, \epsilon_{bi})$, $i = 1, \ldots, n$, независимы в совокупности. Однако во введении и некоторых частных случаях для наглядности предполагаем выполненным следующее более простое, но и более жесткое

Предположение 1.1. *Будем считать, что справедливы представления*

$$\epsilon_{yi} = \sigma_{yi}\xi_{yi},\ \epsilon_{ai} = \sigma_{ai}\xi_{ai},\ \epsilon_{bi} = \sigma_{bi}\xi_{bi}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причем при каждом n случайные векторы $(\xi_{yi}, \xi_{ai}, \xi_{bi})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, независимы в совокупности и состоят из независимых координат с нулевыми средними и единичными дисперсиями, а распределения этих величин не зависят от значений индексов i и n.

Отметим, что тем не менее предположение 1.1 — это более общее допущение, чем стандартное предположение о нормальном распределении ошибок.

На функции, участвующие в определении оценки $\hat\theta$ из (6), во введении будем налагать следующие основные ограничения.

Предположение 1.2. *Функции $\{\lambda_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ и $\{\lambda_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ дифференцируемы по первому аргументу, а функции $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ дифференцируемы по всем своим аргументам, при этом*

$$\sup_{n,i} \mathbf{E} \sup_{\theta/2\le t\le 3\theta/2} \Lambda_i^2(t) < \infty \text{ при } \Lambda_i(t) = (1+|\epsilon_{ai}|+|\epsilon_{bi}|)|\gamma'_{xi}(t)| + \frac{|\lambda'_{xai}(t)|}{\sigma_{ai}} + \frac{|\lambda'_{xbi}(t)|}{\sigma_{bi}},$$

$$\begin{gathered} \sup_{n,i}\left(\frac{\mathbf{E}\lambda^2_{xai}(\theta)}{\sigma^2_{ai}} + \frac{\mathbf{E}\lambda^2_{xbi}(\theta)}{\sigma^2_{bi}}\right) < \infty, \\ C_1 := \sup_{n,i}\sup_{a\in\mathscr{A}}\sup_{b\in\mathscr{B}}(|\gamma'_{ai}(\theta,a,b)| + |\gamma'_{bi}(\theta,a_i,b)|) < \infty, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — некоторые промежутки такие, что $\mathbf{P}(X_{ai}\in\mathscr{A}) = 1 = \mathbf{P}(X_{bi}\in\mathscr{B})$ при всех i.

Суммируем ограничения.

Предположение 1.3. *Считаем, что выполнены предположения* 1.1, 1.2, $\mathbf{E}\xi^4_{a1} + \mathbf{E}\xi^4_{b1} < \infty$ *и*

$$\bar\sigma_a \to 0 \quad \text{и} \quad \bar\sigma_b \to 0, \tag{11}$$

$$\gamma_{\theta i} := \gamma_i(\theta, a_i, b_i) \ge 0,\ A_\gamma := \sum \gamma_{\theta i} b_i y_i > 0,\ B^2_\gamma := \sum \gamma^2_{\theta i}(1+b_i\theta)^2\sigma^2_{yi} > 0, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} c_0 := \inf_{n,i}\min\{\gamma_{\theta i}, a_i, b_i, c_i, \sigma_{yi}, \theta\} > 0, \\ C_0 := \sup_{n,i}\max\{\gamma_{\theta i}, a_i, b_i, c_i, \sigma_{yi}, \sigma_{ai}, \sigma_{bi}, \theta\} < \infty. \end{gathered} \tag{13}$$

Введем обозначения

$$\delta_{ai}(\cdot) := \mathbf{E}\gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_{ai} - \mathbf{E}\lambda_{xai}(\cdot), \quad \delta_{bi}(\cdot) := \mathbf{E}\gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_{bi} - \mathbf{E}\lambda_{xbi}(\cdot). \tag{14}$$

Нам также потребуется условие

$$\sum(\delta_{ai}(\theta) - \theta y_i\delta_{bi}(\theta))/B \to 0. \tag{15}$$

Следующее утверждение является частным случаем более общего следствия 4, приведенного в конце § 2.

Теорема 1. *Пусть верно предположение* 1.3. *В этом случае условие* (15) *при $B = \sqrt{n}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы имела место сходимость*

$$(\hat\theta - \theta)/d(\gamma_{\theta\bullet}) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d(\gamma_{\theta\bullet}) := B_\gamma/A_\gamma. \tag{16}$$

1.6. Таким образом, в теореме 1 мы нашли условия, при которых оценка $\hat\theta$ является асимптотически нормальной. Ясно, что оценка $\hat\theta$ тем точнее, чем меньше ее коэффициент асимптотической дисперсии. Задача нахождения «оптимальных» функций $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$, минимизирующих асимптотическую дисперсию $d(\gamma_{\theta\bullet})$, решена нами в [8] и [14], и мы приведем полученные там результаты в § 3, в п. 3.4.

Если же функции $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ уже выбраны, то возникает проблема выбрать функции $\{\lambda_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ и $\{\lambda_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ таким образом, чтобы было выполнено условие (15), являющееся центральным в теореме 1. Эта трудная задача изучается в § 3. Приведем один из полученных там результатов. Нам понадобится

Предположение 1.4. *При всех n и i случайные ошибки ϵ_{ai} и ϵ_{bi} имеют нормальные распределения с известными дисперсиями σ^2_{ai} и σ^2_{bi}, а функции $\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)$ дифференцируемы по второму и третьему аргументам, причем при $t=\theta$ справедливы следующие соотношения:*

$$\lambda_{ai}(t,\cdot,\cdot)=\gamma'_{ai}(t,\cdot,\cdot)\sigma^2_{ai},\quad \mathbf{E}(|\epsilon_{ai}\gamma_{xi}(t)|+|\lambda_{xai}(t)|)<\infty, \tag{17}$$

$$\lambda_{bi}(t,\cdot,\cdot)=\gamma'_{bi}(t,\cdot,\cdot)\sigma^2_{bi},\quad \mathbf{E}(|\epsilon_{bi}\gamma_{xi}(t)|+|\lambda_{xbi}(t)|)<\infty. \tag{18}$$

Следствие 1. *Если верны предположения* 1.3 *и* 1.4, *то имеет место сходимость* (15) *при $B=\sqrt{n}$ и выполнено* (16).

Таким образом, в приведенном утверждении оценка $\hat\theta$ является асимптотически нормальной в случае, когда не выполнено излишне жесткое условие (3).

1.7. О содержании остальных параграфов работы. Отметим, что асимптотическая нормальность оценок $\hat\theta$ в § 2 получена при очень слабых предположениях. Доказательства этих результатов представляют значительную техническую трудность и будут проведены в два этапа. Сначала в § 4 приведем и докажем некоторую вспомогательную теорему, имеющую и самостоятельный интерес. Потом, в § 5, выведем основное утверждение § 2 — теорему 2. Доказательства остальных результатов работы отнесены в § 6.

Отметим, что в пп. 2.7, 3.3 и 3.4 собран ряд замечаний и рекомендаций, которые могут быть полезными в случае практического применения оценок $\hat\theta$.

Теоремы, следствия и формулы в работе имеют сплошную нумерацию. Предположения, замечания, примеры, определения и леммы для удобства их поиска имеют общую двойную нумерацию, первая цифра в которой означает номер параграфа, где надо искать данное предложение.

§ 2. Условия асимптотической нормальности оценок $\hat\theta$

2.1. Положим

$$\epsilon_i:=X_{ai}-Y_i-\theta X_{bi}Y_i\equiv-(1+\theta b_i)\epsilon_{yi}+\epsilon_{ai}-\theta Y_i\epsilon_{bi}, \tag{19}$$

$$\zeta_{ai}(\cdot):=\gamma_{xi}(\cdot)(X_{ai}-Y_i)-\lambda_{xai}(\cdot),\quad \zeta_{bi}(\cdot):=\gamma_{xi}(\cdot)X_{bi}Y_i-\lambda_{xbi}(\cdot)Y_i, \tag{20}$$

$$\zeta_i(\cdot):=\zeta_{ai}(\cdot)-\theta\zeta_{bi}(\cdot)\equiv\gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_i-\lambda_{xai}(\cdot)+\theta\lambda_{xbi}(\cdot)Y_i,\quad \hat\zeta_i(\cdot):=\zeta_{ai}(\cdot)-\hat\theta\zeta_{bi}(\cdot),$$

где величины $\gamma_{xi}(\cdot)$, $\lambda_{xai}(\cdot)$ и $\lambda_{xbi}(\cdot)$ определены в (7).

Замечание 2.1. Введенные в (19) и (20) обозначения позволяют нам извлечь из (4) и (6) следующие представления:

$$\theta^*-\theta=\frac{\sum c_i\epsilon_i}{\sum c_iX_{bi}Y_i},\quad \hat\theta-\theta=\frac{\sum\zeta_i(\theta^*)}{\sum\zeta_{bi}(\theta^*)}, \tag{21}$$

которые лежат в основе изучения оценок θ^* и $\hat\theta$.

Первая цель этого параграфа — получить общие достаточные и по возможности необходимые условия, гарантирующие сходимость

$$W(d) := (\hat\theta - \theta)/d \Rightarrow \mathscr{N}(0,1), \tag{22}$$

где $d = d^{(n)} > 0$ — числа, вид которых будет зависеть от вида используемых далее условий. Наша вторая цель — установить общие достаточные условия, при которых

$$\widehat{W} := \frac{\hat\theta - \theta}{\hat d} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } \hat d = \Big(\sum (\hat\zeta_i(\theta^*))^2\Big)^{1/2} \Big/ \sum \zeta_{bi}(\theta^*). \tag{23}$$

Поскольку $\hat d$ является статистикой, то сходимость (23) может быть полезной при построении доверительных интервалов и проверке гипотез.

2.2. В этом пункте введем ряд необходимых условий. Всюду в этом параграфе предполагается выполненным

Предположение 2.2. *При каждом n случайные векторы $(\epsilon_{yi}, \epsilon_{ai}, \epsilon_{bi})$, $i = 1, \dots, n$, независимы в совокупности и $\mathbf{E}\epsilon_i^2 + \mathbf{E}(X_{bi}Y_i)^2 < \infty$ при всех n и i. Кроме того,*

$$\forall n, i \quad \mathbf{E}\epsilon_i = 0, \quad A_c := \sum c_i \mathbf{E}(X_{bi}Y_i) > 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1 := d_{vc} + d_c/\theta \to 0,$$

где $d_c^2 := \sum c_i^2 \mathbf{D}\epsilon_i / A_c^2$ и $d_{vc}^2 := \sum c_i^2 \mathbf{D}(X_{bi}Y_i)/A_c^2$.

Отметим, что предположение 2.2 содержит, в частности, все нужные нам условия, которым должны удовлетворять числа $\{c_i\}$, участвующие в определении (4) оценки θ^*.

От функций, определяющих улучшенные оценки $\hat\theta$, всюду будем требовать, что справедливо

Предположение 2.3. *При всех n и i существуют случайные величины*

$$K_{xi} = K_i(\theta, X_{ai}, X_{bi}), \quad L_{xai} = L_{ai}(\theta, X_{ai}, X_{bi}), \quad L_{xbi} = L_{bi}(\theta, X_{ai}, X_{bi}) \tag{24}$$

такие, что при всех t_1, t_2 из отрезка $[\theta/2, 3\theta/2]$ выполнены следующие условия:

$$|\gamma_i(t_1, X_{ai}, X_{bi}) - \gamma_i(t_2, X_{ai}, X_{bi})| \le K_{xi}|t_1 - t_2|^p, \quad 0 < p \le 1, \tag{25}$$

$$|\lambda_{ai}(t_1, X_{ai}, X_{bi}) - \lambda_{ai}(t_2, X_{ai}, X_{bi})| \le L_{xai}|t_1 - t_2|^q, \quad 0 < q \le 1, \tag{26}$$

$$|\lambda_{bi}(t_1, X_{ai}, X_{bi}) - \lambda_{bi}(t_2, X_{ai}, X_{bi})| \le L_{xbi}|t_1 - t_2|^q, \tag{27}$$

причем числа p, q в (25)–(27) неслучайны, но могут в принципе зависеть от n.

Подчеркнем, что в (7), (24) и всюду далее наличие у некоторых величин или функций первого нижнего индекса x и последнего нижнего индекса i будет означать, что данные величины случайны, так как они зависят от X_{ai} и X_{bi}.

Нам потребуются следующие числовые характеристики случайных величин, введенных в (25)–(27):

$$K_i^2 = \mathbf{E}\big(K_{xi}^2 \epsilon_i^2\big), \quad L_i^2 = \mathbf{E}L_{xai}^2 + \theta^2 \mathbf{E}\big(L_{xbi}^2 Y_i^2\big). \tag{28}$$

С технической точки зрения самым важным условием в работе является следующее

Предположение 2.4. *Верны предположения 2.2 и 2.3, а величины $\delta_i(t) := \mathbf{E}\zeta_i(t)$ существуют при всех n, i и всех неслучайных $t > 0$. Кроме того, при некоторых неслучайных A и B*

$$A > 0, \quad \alpha_2 := d_c^p \sum \mathbf{E}|K_{xi}X_{bi}Y_i|/A + d_c^q \sum \mathbf{E}|L_{xbi}Y_i|/A \to 0, \tag{29}$$

$$B > 0, \quad \alpha_3^2 := \frac{d_c^{2p}}{B^2}\Big(\sum K_i^{2/(2-p)}\Big)^{2-p} + \frac{d_c^{2q}}{B^2}\Big(\sum L_i^{2/(2-q)}\Big)^{2-q} \to 0. \tag{30}$$

Ключевую роль в дальнейшем будут играть следующие два предположения:
$$w^* := \sum \zeta_i(\theta)/B - \sum \delta_i(\theta)/B + \sum \delta_i(\theta^*)/B \Rightarrow \mathscr{N}(0,1), \tag{31}$$
$$\alpha_0(A) := \sum \zeta_{bi}(\theta)/A \xrightarrow{p} 1. \tag{32}$$

Подчеркнем, что именно условия (31) и (32) определяют вид постоянных $A > 0$ и $B > 0$, которые участвуют в основных предположениях и утверждениях работы.

2.3. Теперь мы можем сформулировать основное утверждение параграфа.

Теорема 2. *Пусть верно предположение* 2.4 *и условие* (32). *Тогда справедливы следующие два утверждения*

(А) *условие* (31) *необходимо и достаточно для того, чтобы сходимость* (22) *имела место при* $d = B/A$;

(Б) *если выполнено условие* (31) *и*
$$\alpha_4^2(A) := \sum \zeta_{bi}^2(\theta)/A^2 \xrightarrow{p} 0, \quad \alpha_5^2(B) := \sum \zeta_i^2(\theta)/B^2 \xrightarrow{p} 1, \tag{33}$$
то имеет место также сходимость (23).

Замечание 2.5. Нетрудно понять, что верны следующие два утверждения.

(А_0) Если
$$\sum \delta_i(\theta^*)/B \xrightarrow{p} 0, \tag{34}$$
то условие
$$w_0(B) := \sum \zeta_i(\theta)/B - \sum \delta_i(\theta)/B \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \tag{35}$$
необходимо и достаточно для сходимости (31);

(Б_0) если имеет место (35) и
$$\alpha_6(B) := \sum \delta_i(\theta^*)/B - \sum \delta_i(\theta)/B \xrightarrow{p} 0, \tag{36}$$
то для справедливости (31) необходимо и достаточно следующее условие:
$$\sum \delta_i(\theta)/B \to 0. \tag{37}$$

Подчеркнем, что при получении достаточных условий для сходимости (31) удобнее всего использовать утверждение (А_0), что мы и делаем далее в следствиях 2 и 3. Наиболее простые необходимые условия получаются из утверждения (Б_0), чем мы и воспользуемся при выводе следствия 4.

Замечание 2.6. Ограничения (32), (33) и (35) — это условия на сходимость сумм независимых случайных величин в схеме серий, т. е. на объект, который является очень хорошо исследованным.

Замечание 2.7. Просматривая доказательства в § 5 и 6, можно проверить, что все утверждения данного параграфа сохранятся, если в них условие (30) заменить чуть более слабым, но более громоздким ограничением, которое будет введено в предположении 5.1.

2.4. Рассмотрим вопрос об условиях асимптотической нормальности оценки $\hat{\theta}$ при более классических предположениях. При этом будем использовать стандартное условие Линдеберга, которое для удобства читателя напомним в § 6 (см. п. 6.1). Далее будем полагать, что
$$A_\zeta := \sum \mathbf{E}\zeta_{bi}(\theta) > 0, \quad 0 < B_\zeta^2 := \sum \mathbf{D}\zeta_i(\theta) < \infty, \quad d_\zeta := B_\zeta/A_\zeta. \tag{38}$$

Предположение 2.8. *Случайные величины* $\{\zeta_i(\theta) - \mathbf{E}\zeta_i(\theta)\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, а предположение* 2.4 *верно при* $A = A_\zeta$ *и* $B = B_\zeta$. *Кроме того,*

$$\alpha_7^2 := \sum \mathbf{E}\zeta_{bi}^2(\theta)/A_\zeta^2 \to 0. \tag{39}$$

Следствие 2. *Пусть выполнено предположение* 2.8 *и при* $B = B_\zeta$ *справедливо условие* (34). *В этом случае при* $d = d_\zeta$ *имеет место сходимость* (22). *Если, кроме того,*

$$\alpha_8^2 := \sum \delta_i^2(\theta)/B_\zeta^2 \to 0, \tag{40}$$

то верно и (23).

2.5. Рассмотрим теперь вопрос об общих достаточных условиях для сходимости (16), т. е. для сходимости (22) при $d = d(\gamma_{\theta\bullet})$. Положим

$$\begin{aligned} &\rho_{xi} := \gamma_{xi}(\theta) - \gamma_{\theta i}, \quad \rho_{oi}^2 := (1+\theta b_i)^2\mathbf{E}\big(\rho_{xi}^2\epsilon_{yi}^2\big), \quad \epsilon_{abi} := \epsilon_{ai} - \theta Y_i\epsilon_{bi}, \\ &\mu_{xi}^2 := \min\big\{\rho_{xi}^2\epsilon_{abi}^2,\ B_\gamma|\rho_{xi}\epsilon_{abi}|\big\} \le \rho_{xi}^2\epsilon_{abi}^2, \quad \mu_{xbi} := \rho_{xi}X_{bi} - \lambda_{xbi}(\theta). \end{aligned} \tag{41}$$

Предположение 2.9. *Случайные величины* $\{\gamma_{\theta i}(1+\theta b_i)\epsilon_{yi}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, а предположение* 2.4 *выполнено при* $A = A_\gamma$ *и* $B = B_\gamma$. *Кроме того,*

$$\mu_1^2 := \sum \frac{\mathbf{E}\mu_{xi}^2}{B_\gamma^2} \to 0, \quad \mu_2^2 := \sum \frac{\rho_{oi}^2 + \gamma_{\theta i}^2\mathbf{E}\epsilon_{abi}^2 + \mathbf{E}\lambda_{xai}^2(\theta) + \theta^2\mathbf{E}\big(\lambda_{xbi}^2(\theta)Y_i^2\big)}{B_\gamma^2} \to 0, \tag{42}$$

$$\mu_3 := \sum \frac{\mathbf{E}|\mu_{xbi}Y_i|}{A_\gamma} \to 0,\ \mu_4^2 := \sum \frac{\gamma_{\theta i}^2\mathbf{E}(X_{bi}^2Y_i^2)}{A_\gamma^2} \to 0,\ \mu_5 := \sum \frac{\gamma_{\theta i}\mathbf{E}(\epsilon_{bi}Y_i)}{A_\gamma} \to 0. \tag{43}$$

Следствие 3. *Пусть верно предположение* 2.9, *а условие* (34) *выполнено при* $B = B_\gamma$. *В этом случае имеют место сходимости* (16) *и* (23).

2.6. Приведем общие *необходимые* условия для сходимости (16). Нам потребуется следующее дополнительное

Предположение 2.10. *При всех* n *и* i *случайные величины* ϵ_{yi}, ϵ_{ai} *и* ϵ_{bi} *независимы в совокупности и*

$$\mathbf{E}\epsilon_{yi} = \mathbf{E}\epsilon_{ai} = \mathbf{E}\epsilon_{bi} = 0,\ \sigma_{yi}^2 = \mathbf{D}\epsilon_{yi} < \infty,\ \sigma_{ai}^2 = \mathbf{D}\epsilon_{ai} < \infty,\ \sigma_{bi}^2 = \mathbf{D}\epsilon_{bi} < \infty. \tag{44}$$

Замечание 2.11. Если выполнено предположение 2.10, то для величин $\{\delta_i(\cdot)\}$ имеет место простое представление

$$\forall n, i \quad \delta_i(\cdot) = \delta_{ai}(\cdot) - \theta y_i\delta_{bi}(\cdot). \tag{45}$$

Этот факт немедленно следует из равенств (14), (19), (20) и определения величин $\{\delta_i(\cdot)\}$, которое содержится в предположении 2.4. В частности, в этом случае условия (37) и (15) совпадают.

Нам понадобится ограничение

$$\mu_6 := \frac{d_c^p}{B_\gamma}\sum(\mathbf{E}|K_{xi}\epsilon_{ai}| + \theta y_i\mathbf{E}|K_{xi}\epsilon_{bi}|) + \frac{d_c^q}{B_\gamma}\sum(\mathbf{E}L_{xai} + \theta y_i\mathbf{E}L_{xbi}) \to 0. \tag{46}$$

Следствие 4. *Пусть $B = B_\gamma$, выполнено условие* (46) *и верны предположения* 2.9 *и* 2.10. *В этом случае условие* (15) *необходимо и достаточно для сходимости* (16) *и, кроме того, оно достаточно для справедливости* (23).

Теорема 1 из введения является частным случаем последнего утверждения.

2.7. В этом пункте мы обсудим ряд вопросов, которые естественным образом возникают в случае практического применения оценок $\hat{\theta}$.

Замечание 2.12. Всюду в работе θ — это неизвестный параметр. Кроме того, неизвестны последовательности $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ и неизвестными могут быть также распределения величин $\{\epsilon_{yi}\}$, $\{\epsilon_{ai}\}$ и $\{\epsilon_{bi}\}$ или по крайней мере некоторые их параметры. Таким образом, большинство условий во всех утверждениях данной работы — это ограничения на величины, содержащие неизвестные параметры. Понятно, что в случае практического применения этих утверждений мы должны проверять выполнение их условий *при всех возможных значениях всех неизвестных параметров* (т. е. так же, как это всегда делается в математической статистике (см., например, [16]).

Замечание 2.13. Таким образом, в случае практического применения оценок (6) нашей первой задачей является построение как можно более широкого класса $\mathscr{F}$ наборов функций

$$\{\gamma_i, \lambda_{ai}, \lambda_{bi}\} := \big\{\gamma_i^{(n)}(\cdot,\cdot,\cdot), \lambda_{ai}^{(n)}(\cdot,\cdot,\cdot), \lambda_{bi}^{(n)}(\cdot,\cdot,\cdot) : i = 1,\dots,n;\ n = 1,2,\dots\big\},$$

которые удовлетворяют всем условиям теоремы 2 при всех возможных значениях всех неизвестных параметров, от которых зависят распределения наблюдений. Более подробно эту задачу мы обсудим ниже, в замечании 2.16.

После этого мы должны решить вторую задачу: сравнить асимптотические дисперсии d^2, соответствующие наборам из $\mathscr{F}$, и выбрать один из этих наборов. Более подробные рекомендации приведем в п. 3.4 (см. замечание 3.9).

Замечание 2.14. Будем говорить, что функции $\{\gamma_i\} := \big\{\gamma_i^{(n)}(\cdot,\cdot,\cdot)\big\}$ *регулярны*, если при всех n и i найдутся зависящие от γ_i функции λ_{ai} и λ_{bi} такие, что $\{\gamma_i, \lambda_{ai}, \lambda_{bi}\} \in \mathscr{F}$ и $d \sim d(\gamma_{\theta\bullet})$. Ясно, что для проверки условий регулярности функций $\{\gamma_i\}$ вместо условий теоремы 2 достаточно проверить более простые условия следствий 3, 4 или теоремы 1, т. е. утверждений, в которых эквивалентность $d \sim d(\gamma_{\theta\bullet})$ выполняется автоматически.

Понятно, что обе задачи, о которых говорилось в замечании 2.13, упростятся, если при их решении мы ограничимся использованием только регулярных функций $\{\gamma_i\}$, поскольку в этом случае не важен вид функций $\{\lambda_{ai}, \lambda_{bi}\}$, а важен лишь факт их существования.

Замечание 2.15. В целом ряде задач величины $\{\epsilon_{yi}\}$ — это погрешности, характеризующие некоторое изучаемое явление природы, а $\{\epsilon_{ai}\}$ и $\{\epsilon_{bi}\}$ — погрешности, возникающие в результате работы аппаратуры, используемой для измерения коэффициентов. В такой ситуации величины $\bar{\sigma}_a$ и $\bar{\sigma}_b$ характеризуют среднюю точность измерений при использовании этой аппаратуры, а условие (11) означает, что средняя точность аппаратурных измерений возрастает при переходе от одной серии экспериментов к другой.

Такое предположение нам представляется очень естественным, особенно в задачах биологии и сельского хозяйства, когда одна серия экспериментов может занимать год и более и когда для следующей серии приобретается новое и более совершенное оборудование.

Из доказательства теоремы 1 можно понять, что условие (11) влечет эквивалентность $d \sim d(\gamma_{\theta \bullet})$ при естественных ограничениях на функции $\{\gamma_i, \lambda_{ai}, \lambda_{bi}\}$. В такой ситуации мы полагаем разумным ограничиться использованием лишь регулярных функций, которые были введены в замечании 2.14.

Замечание 2.16. Все условия в теореме 2 и в каждом из ее следствий, включая теорему 1, можно условно разделить на две группы. К первой группе отнесем те несколько условий, проверка которых вызывает особую сложность. Так, в теореме 1 и следствии 4 только условие (15) включим в первую группу. Условие (34) относится к первой группе в следствиях 2 и 3, а в следствии 2 в первую группу входит еще условие (40). В основной теореме 2 первая группа содержит только ключевое условие (31).

Все остальные ограничения в перечисленных утверждениях условно отнесем ко второй группе. Подчеркнем, что в предположениях из второй группы либо накладываются ограничения на гладкость функций из (5) или на скорость их роста или убывания, либо накладываются условия на моменты некоторых случайных величин, которые связаны с этими функциями и распределения которых однозначно определяются по распределениям наблюдений. Мы считаем, что проверка условий из второй группы может быть трудной задачей, но это все-таки техническая задача по сравнению с проверкой условий из первой группы. Дело в том, что зачастую условия первой группы могут быть выполнены только в случае специального выбора троек $\{\gamma_i, \lambda_{ai}, \lambda_{bi}\}$ связанных между собой функций. Несколько приемов, позволяющих находить такие наборы функций, приведем в начале § 3, в пп. 3.1–3.3.

§ 3. О выборе функций, определяющих оценки $\hat{\theta}$

3.1. Рассмотрим сначала вопрос: как по заданным функциям $\{\gamma_i(\cdot, X_{ai}, X_{bi})\}$ построить такие функции $\{\lambda_{ai}(\cdot, X_{ai}, X_{bi})\}$ и $\{\lambda_{bi}(\cdot, X_{ai}, X_{bi})\}$, чтобы были выполнены условия (15), (34), (37) и (40), т. е. чтобы были выполнены условия, которые содержат функции $\{\delta_{ai}(\cdot)\}$, $\{\delta_{bi}(\cdot)\}$ или $\{\delta_i(\cdot)\}$. Отметим, что именно эти условия являются необходимыми или близкими к необходимым в соответствующих утверждениях из § 1 и 2.

Далее нам понадобятся условия

$$\mathbf{E}|\gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi})| + \mathbf{E}|X_{ai}\gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi})| < \infty, \tag{47}$$

$$\mathbf{E}|\gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi})| + \mathbf{E}|X_{bi}\gamma_i(t, X_{ai}, X_{bi})| < \infty \tag{48}$$

и обозначения

$$\lambda_{oai}(t,a,b) := a\gamma_i(t,a,b) - \int_0^a \gamma_i(t,y,b)\,dy, \ \lambda_{obi}(t,a,b) := b\gamma_i(t,a,b) - \int_0^b \gamma_i(t,a,y)\,dy.$$

Предположение 3.1. *При всех n, i и при некотором $t > 0$ функции $\gamma_i(t,\cdot,\cdot)$, $\lambda_{ai}(t,\cdot,\cdot)$ и распределение случайной величины X_{ai} удовлетворяют одному из следующих трех условий:*

(А_a) *случайная величина X_{ai} имеет нормальное распределение со средним a_i и с известной дисперсией σ^2_{ai}, функция $\gamma_i(t,\cdot,\cdot)$ дифференцируема по второму аргументу, и справедливы соотношения* (17);

(Б_a) *случайная величина X_{ai} имеет равномерное распределение на интервале $(0, 2a_i)$, выполнено условие* (47), *и $\lambda_{ai}(t,\cdot,\cdot) = \lambda_{oai}(t,\cdot,\cdot)/2$;*

(В$_a$) *случайная величина* X_{ai} *имеет показательное распределение со средним* a_i*, верно условие* (47)*, и* $\lambda_{ai}(t,\cdot,\cdot) = \lambda_{oai}(t,\cdot,\cdot)$.

Напомним, что если случайная величина X имеет показательное распределение со средним $c > 0$, то

$$\mathbf{P}(X > 0) = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\xi > x) = e^{-x/c} \quad \text{при всех } x > 0.$$

Отметим еще, что $\mathbf{E}X_{ai} = a_i$ во всех случаях, когда выполнено предположение 3.1.

На функции $\lambda_{bi}(t,\cdot,\cdot)$ и распределения величин $\{X_{bi}\}$ будем налагать аналогичные условия.

Предположение 3.2. *При всех* n, i *и при некотором* $t > 0$ *имеет место одно из следующих трех условий:*

(А$_b$) *случайная величина* X_{bi} *нормально распределена со средним* b_i *и с известной дисперсией* σ^2_{bi}*, функция* $\gamma_i(t,\cdot,\cdot)$ *дифференцируема по третьему аргументу, и справедливы соотношения* (18)*;*

(Б$_b$) *случайная величина* X_{bi} *имеет равномерное распределение на интервале* $(0, 2b_i)$*, выполнено условие* (48)*, и* $\lambda_{bi}(t,\cdot,\cdot) = \lambda_{obi}(t,\cdot,\cdot)/2$*;*

(В$_b$) *случайная величина* X_{bi} *имеет показательное распределение со средним* b_i*, верно условие* (48)*, и* $\lambda_{bi}(t,\cdot,\cdot) = \lambda_{obi}(t,\cdot,\cdot)$.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этого параграфа.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* 2.10*, а предположения* 3.1 *и* 3.2 *имеют место при* $t = \theta$*. В этом случае*

$$\forall n, i \quad \delta_i(\theta) = \delta_{ai}(\theta) = \delta_{bi}(\theta) = 0 \tag{49}$$

и, в частности, справедливы условия (15), (37) *и* (40).

Если дополнительно верно предположение 2.2*, а предположения* 3.1 *и* 3.2 *имеют место при всех* $t \in (\theta/2, 3\theta/2)$*, то выполнено и условие* (34).

Замечание 3.3. На самом деле есть еще ряд частных случаев, когда мы умеем находить функции $\{\lambda_{ai}(\cdot, X_{ai}, X_{bi})\}$ и $\{\lambda_{bi}(\cdot, X_{ai}, X_{bi})\}$, удовлетворяющие тождествам (49) при некоторых специально подобранных $\{\gamma_i(\cdot, X_{ai}, X_{bi})\}$. Отметим самый простой из таких случаев, который получится, если приводимое ниже следствие 5 будет верно при $\gamma_i(t,a,b) = \gamma_{oi}(t) + a\gamma_{ai}(t) + b\gamma_{bi}(t)$, где $\gamma_{oi}(\cdot)$, $\gamma_{ai}(\cdot)$ и $\gamma_{bi}(\cdot)$ — некоторые известные функции.

3.2. Предположим теперь, что нам неизвестны распределения величин $\{\epsilon_{ai}\}$ и $\{\epsilon_{bi}\}$, но известны их дисперсии $\{\sigma^2_{ai}\}$ и $\{\sigma^2_{bi}\}$.

Предположение 3.4. *Пусть выполнено условие*

$$\sum \left(\sigma^3_{ai} + \sigma^3_{bi}\right) = o(\sqrt{n}), \tag{50}$$

а функции $\{\gamma_i(\theta,\cdot,\cdot)\}$ *дважды дифференцируемы по второму и третьему аргументам, причем*

$$C_2 := \sup_{n,i} \Big(\sup_{a\in\mathscr{A}} |\mathbf{E}\gamma''_{ai}(\theta, a, X_{bi})| + \sup_{b\in\mathscr{B}} |\mathbf{E}\gamma''_{bi}(\theta, X_{ai}, b)| \Big) < \infty, \tag{51}$$

где промежутки $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{B}$ *определены в предположении* 1.2 *и где использованы сокращенные обозначения*

$$\gamma''_{ai}(t,a,b) = \frac{\partial^2 \gamma_i(t,a,b)}{\partial a^2} \quad \text{и} \quad \gamma''_{bi}(t,a,b) = \frac{\partial^2 \gamma_i(t,a,b)}{\partial b^2}. \tag{52}$$

Следствие 5. *Пусть при всех n и i дисперсии σ^2_{ai} и σ^2_{bi} известны, верно предположение* 3.4, *а предположение* 1.3 *выполнено при*

$$\lambda_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot) = \gamma'_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot)\sigma^2_{ai}, \quad \lambda_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot) = \gamma'_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot)\sigma^2_{bi}, \quad i = 1,\dots,n. \tag{53}$$

В этом случае имеют место сходимости (15) *и* (16).

Замечание 3.5. Пусть справедливы все условия следствия 5 и дополнительно при всех n дисперсии σ^2_{ai} и σ^2_{bi} не зависят от i. В этом важном частном случае условие (50) примет следующий простой вид:

$$\bar{\sigma}_a = o(n^{-1/6}) \quad \text{и} \quad \bar{\sigma}_b = o(n^{-1/6}). \tag{54}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае оценка $\hat{\theta}$ является асимптотически нормальной при более слабом условии, чем (3).

3.3. Приведем еще несколько замечаний о задачах, которые мы решали в пп. 3.1 и 3.2.

Замечание 3.6. Если у нас нет никакой информации о распределении погрешностей $\{\epsilon_{ai}\}$ и $\{\epsilon_{bi}\}$, то в задаче о выборе функций $\{\lambda_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ и $\{\lambda_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ у нас есть только тривиальная возможность (8) при всех i положить $\lambda_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot) \equiv \lambda_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot) \equiv 0$. Эта возможность исследована в работе [14] и ведет к ограничительным предположениям типа (3).

Ясно, что нетривиальный выбор функций $\{\lambda_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ и $\{\lambda_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$, приводящий к ослаблению условия (3), возможен лишь при наличии определенной информации о распределении погрешностей $\{\epsilon_{ai}\}$ и $\{\epsilon_{bi}\}$. Приведенные выше теорема 3 и следствие 5 подтверждают эту мысль и позволяют высказать гипотезу, что при наличии для всех i полной информации о совместных распределениях величин (X_{ai}, X_{bi}) всегда можно найти функции $\{\lambda_{ai}(\cdot, X_{ai}, X_{bi})\}$ и $\{\lambda_{bi}(\cdot, X_{ai}, X_{bi})\}$, использование которых достаточно для выполнения условий из первой группы (см. замечание 2.16) при более слабых предположениях, чем в случае тривиального выбора этих функций.

Замечание 3.7. В задачах, о которых говорилось в замечании 2.16, естественно предположить, что мы имеем возможность провести дополнительные испытания используемой нами аппаратуры до, во время или после основных экспериментов. В результате таких испытаний мы можем получить нужную нам информацию о распределении погрешностей величин $\{\epsilon_{ai}\}$ и $\{\epsilon_{bi}\}$, возникающих в результате работы этой аппаратуры.

Если в этих задачах измерения каждой из групп величин $\{X_{ai}\}$ и $\{X_{bi}\}$ производится разными приборами, то и используемое в § 2 предположение 2.10 окажется естественным.

3.4. В этом пункте мы рассмотрим вопрос о минимизации асимптотической дисперсии $d(\gamma_{\theta\bullet})$. Как уже отмечалось выше, эта задача решена нами в [8, 14] при естественных дополнительных предположениях. Для удобства читателя сформулируем кратко полученные в [14] результаты. Нам потребуется

Предположение 3.8. *Дисперсии* $\{\sigma^2_{yi}\}$ *представимы в виде*

$$\sigma^2_{yi} = \sigma^2_y w^2_i(\theta, a_i, b_i), \quad i = 1,\dots,n, \tag{55}$$

где $\{w_i(\cdot,\cdot,\cdot) > 0\}$ — *известные функции, а параметр* $\sigma^2_y > 0$ *может быть неизвестным.*

Положим

$$\gamma_{wi}(t,a,b) := \frac{ab}{w^2_i(t,a,b)(1+bt)^3}, \quad \gamma_{\theta wi} := \gamma_{wi}(\theta, a_i, b_i) \equiv \frac{a_i b_i}{w^2_i(\theta, a_i, b_i)(1+b_i\theta)^3}. \tag{56}$$

Далее через $d(\gamma_{\theta w \bullet})$ будем обозначать величину, которая получится, если в определении (12) и (16) величины $d(\gamma_{\theta\bullet})$ числа $\{\gamma_{\theta i}\}$ заменить на $\{\gamma_{\theta wi}\}$. Условимся полагать, что $d^2(\gamma_{\theta\bullet}) = \infty$ при $A_\gamma = 0$. При таком соглашении величина $d^2(\gamma_{\theta\bullet})$ оказывается определенной для всех функций $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$.

Следующее утверждение доказано в п. 9.3 работы [14].

Теорема 4. *Пусть выполнено предположение* 3.8. *В этом случае*

$$d^2(\gamma_{\theta\bullet}) \geq d^2(\gamma_{\theta w\bullet}) \equiv \sigma_y^2 / \sum b_i y_i \gamma_{\theta wi}$$

для всех функций $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$. *Кроме того,*

$$1 \leq \frac{d^2(\gamma_{\theta\bullet})}{d^2(\gamma_{\theta w\bullet})} \leq 1 + \frac{(H/h-1)^2}{4H/h}, \quad \text{если} \quad \forall i \quad 0 < h \leq \frac{\gamma_{\theta i}}{\gamma_{\theta wi}} \leq H. \tag{57}$$

В частности,

$$1 \leq d(\gamma_{\theta\bullet})/d(\gamma_{\theta w\bullet}) \leq 1.25, \quad \text{если} \quad \forall i \quad 1/2 \leq \gamma_{\theta i}/\gamma_{\theta wi} \leq 2. \tag{58}$$

Замечание 3.9. Это утверждение дает нам метод поиска оптимальных функций. Действительно, если справедливо предположение 3.8, а введенные в (56) функции $\{\gamma_{wi}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ являются регулярными (см. замечание 2.14), то мы рекомендуем использовать оценку $\hat\theta$ при $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot) \equiv \gamma_{wi}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ и при некоторых $\{\lambda_{ai}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ и $\{\lambda_{bi}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$, выбранных в соответствии с замечанием 2.13. В силу теоремы 4 в этом случае оценка $\hat\theta$ будет иметь оптимальную асимптотическую дисперсию.

Если предположение 3.8 справедливо, но функции $\{\gamma_{wi}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ не являются регулярными, то мы должны подобрать регулярные функции $\{\gamma_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}$, которые будут близкими в нужном нам смысле к этим функциям $\{\gamma_{wi}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$. Из неравенств (57) и (58) следует, что мы немного потеряем, если будем использовать функции, которые повторяют поведение оптимальных функций лишь с точностью до константы.

Если же предположение 3.8 не справедливо, то мы сможем руководствоваться лишь общими указаниями из замечаний 2.13 и 2.14.

Замечание 3.10. Напомним два соображения, которые уже приводились в [8] и [14] и которые показывают, что у нас нет оснований считать, что существуют оценки, имеющие асимптотические дисперсии, меньшие, чем $d^2(\gamma_{\theta w\bullet})$.

Во-первых, в [8, замечание 2] отмечено, что если бы точные значения величин $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ были известны, наблюдения $Y_1,\dots,Y_n$ имели бы нормальные распределения со средними $y_1,\dots,y_n$ соответственно, а функции $\{w_i(\theta,a_i,b_i)\}$ из (55) не зависели бы от θ, то величина $1/d^2(\gamma_{\theta w\bullet})$ совпала бы с суммарной информацией Фишера для выборки $Y_1,\dots,Y_n$. Тем самым ввиду неравенства Рао — Крамера в описанной ситуации несмещенные оценки не могут иметь дисперсии, меньшие, чем $d^2(\gamma_{\theta w\bullet})$.

Поскольку в модели со случайными коэффициентами (1), (2) имеем еще меньше информации об интересующих нас неизвестных параметрах, то подавно не следует ожидать существования оценок с асимптотической дисперсией, меньшей, чем $d^2(\gamma_{\theta w\bullet})$.

Во-вторых, в [14, п. 4.4] приведен простой пример, в котором оценки максимального правдоподобия и метода наименьших квадратов для параметра θ найдены в явном виде и который позволяет убедиться, что ничего хорошего не получилось. В частности, эти оценки не являются состоятельными в отличие от нашей самой простой оценки θ^*, которая в этом примере является не только состоятельной, но и асимптотически нормальной. Тем самым нет оснований выходить за рамки класса наших оценок $\hat{\theta}$ даже в случае, когда наблюдения имеют нормальные распределения.

Подчеркнем еще раз, что более широкий, чем θ^{**}, класс (6) оценок $\hat{\theta}$ мы ввели не с целью уменьшить асимптотическую дисперсию оценок θ^{**}, а с целью ослабить ограничение (3).

§ 4. Ключевое вспомогательное утверждение

В этом параграфе приведем и докажем некоторое вспомогательное утверждение, которое нам потребуется для доказательства теоремы 2. Это утверждение, как уже отмечалось во введении, может иметь и самостоятельный интерес. Поэтому мы построили этот параграф таким образом, чтобы его можно было читать независимо от всей статьи.

Замечание 4.1. Чтобы воспользоваться результатами данного параграфа в остальной части работы, нам достаточно положить $d_u = d_c$, $d_v = d_{vc}$, $u_i = c_i\epsilon_i/A_c$, $v_i = c_i\big(X_{bi}Y_i - \mathbf{E}(X_{bi}Y_i)\big)/A_c$, $X_i = (Y_i, X_{ai}, X_{bi})$. Этот факт легко заметить, если сравнить приводимые ниже определения (59) и (60) с аналогичными формулами из замечания 2.1 и предположения 2.2.

Подчеркнем, что далее в этом параграфе мы используем обозначение $\|\xi\| := \big(\mathbf{E}\xi^2\big)^{1/2}$, где ξ может быть любой случайной величиной.

4.1. Пусть при каждом $n = 1, 2, \dots$ задан некоторый набор независимых случайных векторов $W_i = (u_i, v_i, X_i)$, $i = 1, \dots, n$, где каждая из величин X_i также может быть случайным вектором. Пусть случайная величина θ^* представима в следующем виде:

$$\theta^* = \theta + U/(1+V) \quad \text{при } U = \sum u_i,\ V = \sum v_i, \tag{59}$$

где $\theta > 0$ неслучайно. Далее будем предполагать, что выполнены условия

$$\forall i\ \mathbf{E}u_i = \mathbf{E}v_i = 0, \quad d_u^2 := \sum \|u_i\|^2 < \infty, \quad d_v^2 := \sum \|v_i\|^2 < \infty. \tag{60}$$

Предположим теперь, что заданы случайные функции $g_i(t) = g_i(t, W_i)$, $i = 1, \dots, n$, и пусть $\bar{g}_i = \bar{g}_i(\theta, W_i)$ — случайные величины, удовлетворяющие условию

$$|g_i(t_2) - g_i(t_1)| \le \bar{g}_i |t_2 - t_1|^r \quad \forall t_1, t_2 \in [\theta/2, 3\theta/2], \tag{61}$$

где r неслучайно, $r \in (0, 1]$. Пусть также

$$\begin{gathered} G_i := \|\bar{g}_i\| = \big(\mathbf{E}\bar{g}_i^2\big)^{1/2}, \quad \mathbb{S}_m(G_\bullet) = \Big(\sum G_i^m\Big)^{1/m} \quad \text{при } m > 0, \\ \mathbb{S}(G_\bullet) := \mathbb{S}_2(G_\bullet), \quad \mathbb{C}_r(G_\bullet) = 3\sum G_i\big(\|u_i\|^r + 2^p d_u^r \|v_i\|^r\big) + d_u^r \mathbb{S}(G_\bullet). \end{gathered} \tag{62}$$

Если $\|\bar{g}_i\| < \infty$, то ввиду (61) при $t \in [\theta/2, 3\theta/2]$ у случайной величины $g_i(t) - g_i(\theta)$ существует математическое ожидание. Значит, в этом случае мы можем ввести обозначение

$$\breve{g}_i(t) = (g_i(t) - g_i(\theta)) - \mathbf{E}(g_i(t) - g_i(\theta)), \quad t \in [\theta/2, 3\theta/2]. \tag{63}$$

Сформулируем основное утверждение настоящего параграфа.

Теорема 5. *Пусть $r \in (0, 1]$ — произвольное неслучайное число и $\mathbb{S}(G_\bullet) < \infty$. В этом случае существует такая случайная величина $\tilde{\theta}$, что одновременно верны следующие неравенства:*

$$\mathbf{P}(\tilde{\theta} \ne \theta^*) \le 4d_v^2 + 16 d_u^2/\theta^2, \quad |\tilde{\theta} - \theta| \le \theta/2, \quad \mathbf{E}|\tilde{\theta} - \theta|^{2r} \le 4^r d_u^{2r}, \tag{64}$$

$$\mathbf{E}\left|\sum \breve{g}_i(\tilde{\theta})\right| \le 2^r \mathbb{C}_r(G_\bullet) \le 2^{r+2} d_u^r \big(1 + 2^r d_v^r\big) \mathbb{S}_{2/(2-r)}(G_\bullet). \tag{65}$$

Замечание 4.2. В конце параграфа, в п. 4.4, будет приведен пример функций $\{g_i(\cdot)\}$, удовлетворяющих всем условиям теоремы 5 и таких, что при всех n

$$0 < \mathbf{E}\Big|\sum \breve{g}_i(\tilde{\theta})\Big| \le 2^{r+2}\big(1+2^r d_v^r\big) d_u^r \mathbb{S}_{2/(2-r)}(G_\bullet) \le 2^4 \mathbf{E}\sum \breve{g}_i(\tilde{\theta}) < \infty. \tag{66}$$

Таким образом, неравенство (65) неулучшаемо с точностью до константы.

Остальная часть параграфа посвящена доказательствам теоремы 5 и утверждения из замечания 4.2. Отметим, что в одном частном случае оценка (65) теоремы 5 получена в [14].

4.2. В этом пункте докажем ряд лемм, которые понадобятся нам при выводе теоремы 5. Будем использовать, как и в [14], следующие функции:

$$f_u(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \le \theta/4, \\ (\theta/4)\operatorname{sign} x, & \text{если } |x| \ge \theta/4, \end{cases} \qquad f_v(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \le -1/2, \\ 1+x, & \text{если } x \ge -1/2. \end{cases}$$

Введем «срезки» величины θ^*, полагая

$$\tilde{\theta} = \theta + f_u(U)/f_v(V), \quad \tilde{\theta}_i = \theta + f_u(U_i)/f_v(V - v_i) \text{ при } U_i = U - u_i,$$
$$\tilde{\theta}_{ij} = \tilde{\theta}_{ji} = \theta + f_u(U_{ij})/f_v(V - v_i - v_j) \quad \text{при } U_{ij} = U_{ji} = U - u_i - u_j. \tag{67}$$

Нам потребуются

Лемма 4.3. *Справедливы первые два неравенства в* (64). *Кроме того,*

$$|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_i| \le \tau_i := 2|u_i| + 4|U_i||v_i|, \quad |\tilde{\theta}_j - \tilde{\theta}_{ji}| \le \tau_{ji} := 2|u_i| + 4|U_{ji}||v_i| \tag{68}$$

при всех i и $j \ne i$.

Лемма 4.4. *При всех i и $j \ne i$ справедливы соотношения*

$$\mathbf{E}|\tilde{\theta}_i - \theta|^{2r} \le 4^r d_u^{2r}, \quad \mathbf{E}\tau_i^{2r} \le \nu_i^2 := \big(2^r\|u_i\|^r + 4^r d_u^r \|v_i\|^r\big)^2, \quad \mathbf{E}\tau_{ji}^{2r} \le \nu_i^2. \tag{69}$$

Кроме того, верно последнее неравенство в (64).

Доказательство леммы 4.3 содержится в [14, лемма 5.2]. При $r = 1$ все оценки из (69) установлены в [14, лемма 5.3]. Но отсюда и из очевидного неравенства $\mathbf{E}\xi^{2r} \le \big(\mathbf{E}\xi^2\big)^r$ следует справедливость всех утверждений леммы 4.4 и при $0 < r \le 1$.

Нам также неоднократно потребуются следующие обозначения:

$$\delta_i = g_i(\tilde{\theta}_i) - g_i(\theta), \quad \delta_{ij} = g_i(\tilde{\theta}_i) - g_i(\tilde{\theta}_{ij}), \quad \tilde{\rho}_i = g_i(\tilde{\theta}) - g_i(\tilde{\theta}_i). \tag{70}$$

Лемма 4.5. *При всех i и $j \ne i$ верны неравенства*

$$\mathbf{E}\delta_i^2 \le 4^r d_u^{2r} G_i^2, \quad \mathbf{E}\delta_{ji}^2 \le \nu_i^2 G_j^2, \quad \mathbf{E}|\tilde{\rho}_i| \le G_i \nu_i.$$

Доказательство. Используя последовательно определения из (70), ввиду условия (61) имеем

$$|\delta_i| \le \bar{g}_i|\tilde{\theta}_i - \theta|^r, \quad |\delta_{ji}| \le \bar{g}_i \tau_{ji}^r, \quad |\tilde{\rho}_i| \le \bar{g}_i|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_i|^r. \tag{71}$$

При выводе второго неравенства в (71) нужно воспользоваться еще второй оценкой в (68).

Учитывая независимость величин $\tilde{\theta}_i$ и $\tilde{g}_i$, из первой оценки в (71) находим

$$\mathbf{E}\delta_i^2 \le \mathbf{E}\big(\bar{g}_i^2|\tilde{\theta}_i - \theta|^{2r}\big) = \mathbf{E}|\tilde{\theta}_i - \theta|^{2r}\mathbf{E}\bar{g}_i^2 \le 4^r d_u^{2r} G_i^2. \tag{72}$$

Выше при выводе заключительного неравенства в (72) использовалось первое утверждение леммы 4.4. Из (72) вытекает первое утверждение леммы 4.5.

Аналогично второе неравенство в (71), независимость величин τ_{ji} и $\bar{g}_j$ и третья оценка в (69) влекут следующую цепочку соотношений:

$$\mathbf{E}\delta_{ji}^2 \le \mathbf{E}\big(\bar{g}_j^2 \tau_{ji}^{2r}\big) = \mathbf{E}\bar{g}_j^2 \cdot \mathbf{E}\tau_{ji}^{2r} \le G_i^2 \cdot \nu_i^2.$$

Из третьей оценки в (71), первого утверждения в (68) и второго утверждения леммы 4.4 получаем, что

$$\mathbf{E}|\tilde{\rho}_i| \le \mathbf{E}(\bar{g}_i|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_i|^r) \le \mathbf{E}\big(\bar{g}_i^2\big)^{1/2}\mathbf{E}(|\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_i|^{2r})^{1/2} \le G_i\big(\mathbf{E}\tau_i^{2r}\big)^{1/2} \le G_i\nu_i. \qquad \square$$

Лемма 4.6. *При всех i имеет место следующая оценка:*

$$\mathbf{E}|\rho_i| \le 2\nu_i G_i \quad \textit{при } \rho_i = \breve{g}_i(\tilde{\theta}) - \breve{g}_i(\tilde{\theta}_i).$$

Доказательство. Определения (63) функций $\breve{g}_i(\cdot)$ и определения (70) величин $\tilde{\rho}_i$ дают равенство $\rho_i = \tilde{\rho}_i - \mathbf{E}\tilde{\rho}_i$. Значит, $\mathbf{E}|\rho_i| \le \mathbf{E}|\tilde{\rho}_i| + |\mathbf{E}\tilde{\rho}_i| \le 2\mathbf{E}|\tilde{\rho}_i|$. Подставляя теперь в это неравенство последнюю оценку из леммы 4.5, получаем утверждение леммы. □

4.3. Приступим непосредственно к доказательству утверждения (65) теоремы 5. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \sum(\breve{g}_i(\tilde{\theta}) - \breve{g}_i(\tilde{\theta}_i)) \equiv \sum \rho_i,\ \Delta_2 = \sum \breve{g}_i^2(\tilde{\theta}_i),\ \Delta_3 = \sum\sum_{j\ne i} \breve{g}_i(\tilde{\theta}_i)\breve{g}_j(\tilde{\theta}_j). \tag{73}$$

Из определений (63) и (73) имеем

$$\sum \breve{g}_i(\tilde{\theta}) = \Delta_1 + \sum \breve{g}_i(\tilde{\theta}_i), \quad \Big(\sum \breve{g}_i(\tilde{\theta}_i)\Big)^2 = \Delta_2 + \Delta_3.$$

Поэтому $\mathbf{E}\big|\sum \breve{g}_i(\tilde{\theta})\big| \le \mathbf{E}|\Delta_1| + \mathbf{E}(\Delta_2+\Delta_3)^{1/2} \le \mathbf{E}|\Delta_1| + (\mathbf{E}\Delta_2+\mathbf{E}\Delta_3)^{1/2}$. Значит,

$$\mathbf{E}\Big|\sum \breve{g}_i(\tilde{\theta})\Big| \le \mathbf{E}\big|\Delta_1\big| + \big(\mathbf{E}\Delta_2\big)^{1/2} + \big|\mathbf{E}\Delta_3\big|^{1/2}. \tag{74}$$

Таким образом, доказательство соотношения (65) свелось к задаче получения оценок для трех слагаемых в правой части неравенства (74). Наиболее сложным делом является получение оценок для $|\mathbf{E}\Delta_3|$. Важную роль при этом будет играть приводимая ниже

Лемма 4.7. *Для любых i и $j \ne i$*

$$\mathbf{E}\breve{g}_i(\tilde{\theta}_i)\breve{g}_j(\tilde{\theta}_j) = \mathbf{E}\rho_{ij}\rho_{ji} \quad \textit{при } \rho_{ij} = \breve{g}_i(\tilde{\theta}_i) - \breve{g}_i(\tilde{\theta}_{ij}). \tag{75}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E}\breve{g}_i^2(\tilde{\theta}_i) \le \mathbf{E}\delta_i^2, \quad \mathbf{E}\rho_{ij}^2 \le \mathbf{E}\delta_{ij}^2, \quad \mathbf{E}|\rho_{ij}\rho_{ji}| \le \big(\mathbf{E}\delta_{ij}^2\mathbf{E}\delta_{ji}^2\big)^{1/2}. \tag{76}$$

Доказательство. Из договоренностей, сделанных в начале этого параграфа, вытекает, что все величины в работе являются в конечном итоге функциями от независимых случайных векторов W_k, $k = 1, \dots, n$. Через $\mathbf{E}_i Z$ будем обозначать условное математическое ожидание, взятое при условии, что фиксированы значения случайных векторов W_k при всех $k \ne i$. Нетрудно заметить, что в этом случае из определения (63) вытекает следующее равенство:

$$\breve{g}_i(Z) = (g_i(Z) - g_i(\theta)) - \mathbf{E}_i(g_i(Z) - g_i(\theta)) \text{ при } Z = \tilde{\theta}_i \quad \text{и} \quad Z = \tilde{\theta}_{ij}, \tag{77}$$

поскольку во всех перечисленных в (77) вариантах случайная величина Z не зависит от случайного вектора W_i, что очень существенно для справедливости (77). Таким образом, из определений (70) и равенств (77) получаем

$$0 = \mathbf{E}_i\breve{g}_i(\tilde{\theta}_i) = \mathbf{E}_i\breve{g}_i(\tilde{\theta}_{ij}) = \mathbf{E}_i\rho_{ij} \quad \text{и} \quad 0 = \mathbf{E}_j\breve{g}_j(\tilde{\theta}_j)$$

при всех i и $j \ne i$. Следовательно,

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\breve{g}_i(\tilde{\theta}_{ij})\breve{g}_j(\tilde{\theta}_j) = \mathbf{E}\mathbf{E}_j\breve{g}_i(\tilde{\theta}_{ij})\breve{g}_j(\tilde{\theta}_j) = \mathbf{E}\breve{g}_i(\tilde{\theta}_{ij})\mathbf{E}_j\breve{g}_j(\tilde{\theta}_j) = 0,\\ \mathbf{E}\rho_{ij}\breve{g}_j(\tilde{\theta}_{ji}) = \mathbf{E}\mathbf{E}_i\breve{g}_j(\tilde{\theta}_{ji})\rho_{ij} = \mathbf{E}\breve{g}_j(\tilde{\theta}_{ji})\mathbf{E}_i\rho_{ij} = 0.\end{gathered} \tag{78}$$

Далее, из определения (75) величины ρ_{ij} находим

$$\rho_{ij}\rho_{ji} = \rho_{ij}\breve{g}_j(\tilde{\theta}_j) - \rho_{ij}\breve{g}_j(\tilde{\theta}_{ji}) = \breve{g}_i(\tilde{\theta}_i)\breve{g}_j(\tilde{\theta}_j) - \breve{g}_i(\tilde{\theta}_{ij})\breve{g}_j(\tilde{\theta}_j) - \rho_{ij}\breve{g}_j(\tilde{\theta}_{ji}).$$

Если теперь возьмем математические ожидания от обеих частей этого тождества и воспользуемся равенствами (78), то получим (75).

Докажем, наконец, неравенства (76). Используя еще раз определения (63), (70) и (75), находим, что

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\breve{g}_i^2(\tilde\theta_i) = \mathbf{E}\mathbf{E}_i(\delta_i - \mathbf{E}_i\delta_i)^2 \le \mathbf{E}\mathbf{E}_i\delta_i^2 = \mathbf{E}\delta_i^2,\\
&\mathbf{E}\rho_{ij}^2 = \mathbf{E}\mathbf{E}_i(\delta_{ij} - \mathbf{E}_i\delta_{ij})^2 \le \mathbf{E}\mathbf{E}_i\delta_{ij}^2 = \mathbf{E}\delta_{ij}^2.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

При выводе (79) мы существенно использовали тот факт, что дисперсия любой случайной величины не больше ее второго момента. Применяя вторую оценку в (79), имеем

$$
\mathbf{E}|\rho_{ij}\rho_{ji}| \le \big(\mathbf{E}\rho_{ij}^2\big)^{1/2}\big(\mathbf{E}\rho_{ji}^2\big)^{1/2} \le \big(\mathbf{E}\delta_{ij}^2\mathbf{E}\delta_{ji}^2\big)^{1/2}.
$$

Тем самым мы вывели и третье утверждение в (76). □

Оценим величины, определенные в (73). С учетом лемм 4.5–4.7 получаем оценки

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}|\Delta_1| \le \sum \mathbf{E}\rho_i \le 2\sum \nu_i G_i, \quad \mathbf{E}\Delta_2 \le \sum \mathbf{E}\delta_i^2 \le 2^{2r} d_u^{2r} \sum G_i^2,\\
&|\mathbf{E}\Delta_3| \le \sum \sum_{j\ne i} |\mathbf{E}\breve{g}_i(\tilde\theta_i)\breve{g}_j(\tilde\theta_j)| \le \sum\sum_{j\ne i}(G_i\nu_i G_j\nu_j) \le \Big(\sum G_i\nu_i\Big)^2.
\end{aligned}
\tag{80}
$$

При выводе последнего неравенства в (80) использована следующая цепочка соотношений:

$$
|\mathbf{E}\breve{g}_i(\tilde\theta_i)\breve{g}_j(\tilde\theta_j)| = |\mathbf{E}\rho_{ij}\rho_{ji}| \le \mathbf{E}|\rho_{ij}\rho_{ji}| \le \big(\mathbf{E}\delta_{ij}^2\mathbf{E}\delta_{ji}^2\big)^{1/2} \le G_i\nu_i G_j\nu_j,
$$

вытекающая из (75), (76) и леммы 4.5. Теперь из (74) и (80) с учетом определений (69) и (62) находим, что

$$
\mathbf{E}\Big|\sum \breve{g}_i(\tilde\theta)\Big| \le 3\sum G_i\nu_i + 2^r d_u^r \mathbb{S}(G_\bullet) \equiv 2^r \mathbb{C}_r(G_\bullet). \tag{81}
$$

Тем самым мы вывели первое неравенство в (65). Чтобы получить вторую оценку в (65), воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$
\begin{aligned}
&\sum G_i\|u_i\|^r \le \Big(\sum G_i^{2/(2-r)}\Big)^{(2-r)/2}\Big(\sum \|u_i\|^2\Big)^{r/2} = d_u^r \mathbb{S}_{2/(2-r)}(G_\bullet),\\
&\sum G_i\|v_i\|^r \le \Big(\sum G_i^{2/(2-r)}\Big)^{(2-r)/2}\Big(\sum \|v_i\|^2\Big)^{r/2} = d_v^r \mathbb{S}_{2/(2-r)}(G_\bullet).
\end{aligned}
$$

Эти оценки и определения (62) дают, что

$$
\mathbb{C}_r(G_\bullet) \le 3d_u^r\big(1 + 2^r d_v^r\big)\mathbb{S}_{2/(2-r)}(G_\bullet) + d_u^r \mathbb{S}(G_\bullet).
$$

Из этого неравенства следует требуемое утверждение леммы, поскольку $\mathbb{S}(\cdot) \equiv \mathbb{S}_2(\cdot) \le \mathbb{S}_{2/(2-r)}(\cdot)$ ввиду монотонности по m норм $\mathbb{S}_m(\cdot)$. □

Таким образом, соотношение (65) доказано полностью. Неравенства из (64) установлены в леммах 4.3 и 4.4. Тем самым мы закончили доказательство теоремы 5.

4.4. В этом пункте подробно рассмотрим один достаточно частный случай изучаемой в данном параграфе задачи, о котором уже говорилось в замечании 4.2 и который позволит сделать вывод о неулучшаемости утверждения (65) теоремы 5. Пусть

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\xi = +1) = \mathbf{P}(\xi = -1) = 1/2, \quad 1/4 \ge \sigma = \sigma^{(n)} > 0, \quad K = K^{(n)} > 0,\\
&u_1 = \sigma\xi, \quad v_1 = \sigma\xi/2, \quad \gamma_1(t) = K|t-1|^r \operatorname{sign}(t-1), \quad g_1(t) = u_1\gamma_1(t).
\end{aligned}
\tag{82}
$$

Лемма 4.8. *Пусть верны предположения* (82) *и* $u_i = v_i = 0 = g_i(\cdot)$ *при всех* $i \geq 2$. *В этом случае при* $\theta = 1$ *имеет место* (66).

Доказательство. При выполнении условий леммы из определений (59) и (60) немедленно получаем, что

$$2V = \sigma\xi = U, \quad \theta^* - \theta \equiv \theta^* - 1 = \sigma\xi/(1 + \sigma\xi/2), \quad |\xi| = 1, \quad 2d_v = \sigma = d_u. \tag{83}$$

В частности, $|V| \leq |U| \leq \sigma \leq 1/4 = \theta/4$ при $\theta = 1$. Но в силу (67) это означает, что $\tilde{\theta} = \theta^*$. Значит, при $\theta = 1$ из определения (63) и равенств (82) и (83) находим, что

$$\breve{g}_1(\tilde{\theta}) = \breve{g}_1(\theta^*) = g_1(\theta^*) - g_1(1) = \sigma\xi \cdot K|\sigma\xi|^r \operatorname{sign}(\xi)/|1 + \sigma\xi/2|^r = K\sigma^{1+r}/|1 + \sigma\xi/2|^r.$$

Из этого соотношения и неравенства Иенсена заключаем, что

$$\mathbf{E}\sum \breve{g}_i(\tilde{\theta}) = \mathbf{E}\breve{g}_1(\tilde{\theta}) = \mathbf{E}\frac{K\sigma^{1+r}}{|1 + \sigma\xi/2|^r} \geq \frac{K\sigma^{1+r}}{|1 + \sigma\mathbf{E}\xi/2|^r} = K\sigma^{1+r}. \tag{84}$$

Пусть теперь $t_2 - t_1 = 2h > 0$. Нетрудно понять, что в этом случае

$$\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \gamma'(t)\,dt = K \int\limits_{t_1}^{t_1+2h} r|t|^{r-1}\,dt$$
$$\leq K \int\limits_{-h}^{h} r|t|^{r-1}\,dt = 2Kh^r = 2^{1-r}K|t_2 - t_1|^r.$$

Отсюда и из (82) находим, что

$$|g(t_2) - g(t_1)| \leq |u_1| \cdot 2^{1-r}K|t_2 - t_1|^r = \sigma|\xi| \cdot 2^{1-r}K|t_2 - t_1|^r = 2^{1-r}K\sigma|t_2 - t_1|^r.$$

Таким образом, при $i = 1$ неравенство (61) верно с $\bar{g} = 2^{1-r}K\sigma$. Поскольку $\bar{g} = g(\cdot) = 0$ при $i \geq 2$ по предположению, из определения (62) получаем, что $\mathbb{S}_m(G_i) = G_1 = \|\bar{g}_1\| = 2^{1-r}K\sigma$ при всех $m > 0$. Отсюда и из (83) следует, что

$$2^{r+2}\big(1 + 2^r d_v^r\big) d_u^r \mathbb{S}_{2/(2-r)}(G_\bullet) = 2^{r+2}(1 + 2^r(\sigma/2)^r)\sigma^r 2^{1-r}K\sigma < 2^4 K\sigma^{1+r}, \tag{85}$$

так как $\sigma < 1$ ввиду (82).

Из (85), (84) и (65) вытекают все неравенства, требуемые в (66). $\square$

§ 5. Доказательство теоремы 2

5.1. Нам потребуется следующее

Предположение 5.1. *Пусть предположение* 2.4 *выполнено при замене в нем условия* (30) *ограничением*

$$B > 0, \quad \alpha_9 := (\mathbb{C}_p(K_\bullet) + \mathbb{C}_q(L_\bullet))\,/B \to 0. \tag{86}$$

Определения величин $\mathbb{C}_r(a_\bullet)$ были приведены в начале § 4 (см. (62)). Подчеркнем, что в силу неравенства $\alpha_3 \leq 4(1 + 2\alpha_1)\alpha_9$, которое следует из замечания 4.1, оценки из (65) и определений (86), (30) предположение 5.1 слабее, чем предположение 2.4.

Далее ввиду замечания 4.1 мы можем воспользоваться результатами § 4. В итоге из неравенств (64) теоремы 5 немедленно получаем, что справедлива

Лемма 5.2. *Пусть выполнено предположение* 2.2. *Тогда существует такая случайная величина* $\tilde{\theta}$, *что*

$$\mathbf{P}(\theta^* \neq \tilde{\theta}) \leq 16\alpha_1 \to 0, \quad |\tilde{\theta} - \theta| \leq \theta/2, \quad \mathbf{E}|\tilde{\theta} - \theta|^{2r} \leq (2d_c)^{2r}, \quad 0 < r \leq 1. \tag{87}$$

Всюду в дальнейшем через $\tilde{\theta}$ будем обозначать только случайную величину, участвующую в лемме 5.2. Благодаря свойствам (87) будем интерпретировать

$\tilde\theta$ как некоторую срезку оценки θ^*. В частности, лемма 5.2 позволяет использовать ограниченную величину $\tilde\theta$ вместо θ^* и дает возможность при изучении функций от оценки θ^* налагать ограничения на поведение этих функций только на отрезке $[\theta/2, 3\theta/2]$.

Далее в работе для любой последовательности $\{a_i\}$ будем использовать обозначение $\mathbb{S}(a_\bullet)$, которое уже вводилось в (62). Напомним, что норма $\mathbb{S}(a_\bullet)$ обладает следующими известными свойствами:

$$\begin{gathered}\mathbb{S}(a_\bullet) := \Big(\sum a_i^2\Big)^{1/2} \le \sum |a_i|, \quad \sum |a_i b_i| \le \mathbb{S}(a_\bullet)\cdot\mathbb{S}(b_\bullet), \\ \mathbb{S}(a_\bullet + b_\bullet) \le \mathbb{S}(a_\bullet) + \mathbb{S}(b_\bullet), \quad \big|\mathbb{S}(a_\bullet) - \mathbb{S}(b_\bullet)\big| \le \mathbb{S}(a_\bullet - b_\bullet),\end{gathered} \tag{88}$$

которыми мы будем пользоваться, часто этого не оговаривая.

5.2. Нам потребуются следующие обозначения, в которых используется введенная в (63) операция $\breve{}$:

$$\tilde\rho_u := \sum \breve\zeta_i(\tilde\theta)/B \xrightarrow{p} 0, \quad \tilde\rho_v := \sum \rho_{vi}/A \quad \text{при} \quad \rho_{vi} := \zeta_{bi}(\tilde\theta) - \zeta_{bi}(\theta), \tag{89}$$

$$\tilde\rho_{uv} := \mathbb{S}(\hat\zeta_\bullet(\tilde\theta)) - \mathbb{S}(\zeta_\bullet(\tilde\theta))/B, \quad \tilde\rho_{uu} := \mathbb{S}(\zeta_\bullet(\tilde\theta))/B - 1. \tag{90}$$

Перечислим вспомогательные утверждения, которые нам потребуются при доказательстве теоремы 2 и вывод которых мы отложим до п. 5.4.

Лемма 5.3. *Пусть выполнено предположение* 5.1. *Тогда* $\tilde\rho_u \xrightarrow{p} 0$.

Лемма 5.4. *Если верно предположение* 5.1, *то*

$$|\tilde\rho_v| \le \sum |\rho_{vi}|/A \xrightarrow{p} 0, \quad \mathbb{S}(\rho_{v\bullet})/A \le \sum |\rho_{vi}|/A \xrightarrow{p} 0. \tag{91}$$

Лемма 5.5. *Пусть выполнено условие* (22) *при* $d = B/A$, *справедливо предположение* 5.1 *и верно первое условие в* (33). *Тогда* $\tilde\rho_{uv} \xrightarrow{p} 0$.

Лемма 5.6. *Пусть справедливо предположение* 5.1 *и выполнено второе условие в* (33). *Тогда* $\tilde\rho_{uu} \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть ρ_u^* и ρ_v^*, ρ_{uv}^* и ρ_{uu}^* — величины, которые получатся при замене величины $\tilde\theta$ на θ^* в определениях (89) и (90) соответственно. В этом случае ввиду первого утверждения леммы 5.2

$$\mathbf{P}(\rho_u^* \ne \tilde\rho_u) + \mathbf{P}(\rho_v^* \ne \tilde\rho_v) + \mathbf{P}(\rho_{uv}^* \ne \tilde\rho_{uv}) + \mathbf{P}(\rho_{uu}^* \ne \tilde\rho_{uu}) \to 0,$$

поэтому в силу лемм 5.3–5.6 (при выполнении, разумеется, соответствующих условий)

$$\rho_u^* \xrightarrow{p} 0, \quad \rho_v^* \xrightarrow{p} 0, \quad \rho_{uv}^* \xrightarrow{p} 0, \quad \rho_{uu}^* \xrightarrow{p} 0. \tag{92}$$

Воспользуемся обозначениями w^* и $\alpha_0(\cdot)$, введенными в (31) и (32), и перепишем второе представление в (21) следующими двумя способами:

$$W(d) = \frac{\sum \zeta_i(\theta^*)/B}{\sum \zeta_{bi}(\theta^*)/A} = \frac{w^* + \rho_u^*}{\alpha_0(A) + \rho_v^*}, \quad \widehat{W} = \frac{\sum \zeta_i(\theta^*)}{\mathbb{S}(\hat\zeta_\bullet(\theta^*))} = \frac{w^* + \rho_u^*}{1 + \rho_{uv}^* + \rho_{uu}^*}. \tag{93}$$

При выводе первого соотношения в (93) мы использовали также определения (89), а при выводе второго — (23) и (90).

Утверждения п. (Б) теоремы, т. е. сходимость $\widehat{W} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, следует из второго представления в (93) и сходимостей (92), поскольку $w^* \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ в силу (31).

Докажем теперь утверждение (A). Если $w^* \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, то $W(d) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ вследствие первого представления в (93), первых двух сходимостей в (92) и условия (32). Если же, наоборот, $W(d) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, то, переписав первое тождество в (93) в следующем виде:

$$w^* = W(d)(\rho_v^* + \alpha_0(A)) - \rho_u^*,$$

из (92) и (32) немедленно получаем сходимость $w^* \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Теорема 2 доказана полностью.

5.3. В этом пункте докажем несколько вспомогательных утверждений, необходимых для вывода лемм 5.3–5.6. Сначала отметим представление

$$\zeta_i(\cdot) = \gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_i - \lambda_i(\cdot) \quad \text{при } \lambda_i(\cdot) = \lambda_{xai}(\cdot) - \theta\lambda_{xbi}(\cdot)Y_i, \tag{94}$$

которое немедленно вытекает из определений в (20).

Лемма 5.7. *Пусть выполнены предположение* 2.2 *и условие* (25). *Тогда условие* (61) *справедливо при* $r = p$ *во всех нижеперечисленных случаях:*

$$\text{при} \quad g_i(\cdot) = \gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_i/B, \quad \bar g_i = K_{xi}|\epsilon_i|/B, \quad G_i \equiv \big(\mathbf{E}\bar g_i^2\big)^{1/2} = K_i/B; \tag{95}$$

$$\text{при} \quad g_i(\cdot) = \gamma_{xi}(\cdot)X_{bi}Y_i/A \quad \text{и} \quad \bar g_i = K_{xi}|X_{bi}Y_i|/A; \tag{96}$$

$$\text{при} \quad g_i(\cdot) = \gamma_{xi}(\cdot)(\epsilon_{ai} - \theta y_i\epsilon_{bi})/B_\gamma \quad \text{и} \quad \bar g_i = K_{xi}(|\epsilon_{ai}| + \theta y_i|\epsilon_{bi}|)/B_\gamma. \tag{97}$$

Лемма 5.8. *Пусть справедливы предположение* 2.2 *и условия* (26) *и* (27). *Тогда условие* (61) *выполнено при* $r = q$ *во всех следующих случаях:*

$$\text{при } g_i(\cdot) = \frac{\lambda_i(\cdot)}{B},\ \bar g_i = \frac{L_{xai} + \theta L_{xbi}|Y_i|}{B} \le \frac{\sqrt{2\big(L_{xai}^2 + \theta^2 L_{xbi}^2 Y_i^2\big)}}{B},\ G_i \le \frac{\sqrt{2}L_i}{B}; \tag{98}$$

$$\text{при} \quad g_i(\cdot) = \lambda_{xbi}(\cdot)Y_i/A \quad \text{и} \quad \bar g_i = L_{xbi}|Y_i|/A; \tag{99}$$

$$\text{при} \quad g_i(\cdot) = \lambda_{xai}(\cdot)/B_\gamma - \theta y_i\lambda_{xbi}(\cdot)/B_\gamma \quad \text{и} \quad \bar g_i = L_{xai}/B_\gamma + \theta y_i L_{xbi}/B_\gamma. \tag{100}$$

Все шесть утверждений, которые содержатся в двух приведенных выше леммах, нетрудно проверить непосредственно, просто сравнивая соответствующие условия. Ниже нам неоднократно потребуются следующие два утверждения.

Лемма 5.9. *Пусть выполнено предположение* 2.2, *а случайные функции* $g(\cdot)$ *и случайные величины* $\bar g_i$ *таковы, что выполнено условие* (61) *при некотором неслучайном* $r \in (0,1]$. *Пусть дополнительно* $\beta := d_c^{rm}\sum \mathbf{E}\bar g_i^m \to 0$ *при некотором неслучайном* $m > 0$. *В этом случае* $\rho := \sum |g_i(\tilde\theta) - g_i(\theta)|^m \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство. Из (61) и (87) имеем

$$|g_i(\tilde\theta) - g_i(\theta)| \le \bar g_i\tilde\delta^r \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\tilde\delta^2 \le (2d_c)^2 \text{ при } \tilde\delta = |\tilde\theta - \theta|.$$

Эти оценки и неравенство Гёльдера при $h = 1/(2 + mr)$ дают соотношения

$$\mathbf{E}|\rho|^{2h} \le \mathbf{E}\Big(\tilde\delta^{2mhr}\Big(\sum \bar g_i^m\Big)^{2h}\Big) \le (\mathbf{E}\tilde\delta^2)^{mhr}\Big(\mathbf{E}\sum \bar g_i^m\Big)^{2h} \le (2\beta)^{2h} \to 0.$$

Из этой сходимости моментов вытекает нужная сходимость по вероятности. □

Лемма 5.10. *Пусть при* $m = 1$ *справедливы предположения леммы* 5.9. *В этом случае* $\sum |g_{oi}(\tilde\theta) - g_{oi}(\theta)| \xrightarrow{p} 0$ *при* $g_{oi}(\cdot) := \mathbf{E}g_i(\cdot)$.

Доказательство. Из (61) и (87) имеем

$$|g_{oi}(t_2) - g_{oi}(t_2)| = |\mathbf{E}g_i(t_2) - \mathbf{E}g_i(t_2)| \le \mathbf{E}|g_i(t_2) - g_i(t_2)| \le \mathbf{E}\bar g_i|t_2 - t_1|^r.$$

Таким образом, функция $g_{oi}(\cdot)$ удовлетворяет условию (61) при $\bar g_{oi} = \mathbf{E}\bar g_i$. Следовательно, утверждение леммы 5.10 вытекает из утверждения леммы 5.9, если в последней положить $m = 1$ и заменить $g_i(\cdot)$ на $g_{oi}(\cdot)$. □

Лемма 5.11. *Пусть справедливо предположение* 5.1. *В этом случае имеют место следующие сходимости:*

$$\mathbb{S}((\gamma_{x\bullet}(\tilde\theta)-\gamma_{x\bullet}(\theta))\epsilon_\bullet)/B \xrightarrow{p} 0, \tag{101}$$

$$\mathbb{S}(\lambda_\bullet(\tilde\theta)-\lambda_\bullet(\theta))/B \xrightarrow{p} 0, \tag{102}$$

$$\sum|\rho_{\gamma vi}|/A \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при } \rho_{\gamma vi}=(\gamma_{xi}(\tilde\theta)-\gamma_{xi}(\theta))X_{bi}Y_i, \tag{103}$$

$$\sum|\rho_{\lambda vi}|/A \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при } \rho_{\lambda vi}=(\lambda_{xbi}(\tilde\theta)-\lambda_{xbi}(\theta))Y_i. \tag{104}$$

Если дополнительно выполнено условие (46), *то*

$$\sum|\rho_{\gamma i}(\tilde\theta)-\rho_{\gamma i}(\theta)|/B_\gamma \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при } \rho_{\gamma i}(\cdot):=\mathbf{E}(\gamma_{xi}(\cdot)(\epsilon_{ai}-\theta y_i\epsilon_{bi})), \tag{105}$$

$$\sum|\rho_{\lambda i}(\tilde\theta)-\rho_{\lambda i}(\theta)|/B_\gamma \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при} \quad \rho_{\lambda i}(\cdot):=\mathbf{E}(\lambda_{xai}(\cdot)-\theta y_i\lambda_{xbi}(\cdot)). \tag{106}$$

Доказательство. Сходимость (101) вытекает из леммы 5.9 при $m=2$, если ее применить к функциям из (95), поскольку в этом случае

$$\beta=d_c^{2p}\sum\mathbf{E}|K_{xi}\epsilon_i|^2/B^2\equiv d_c^{2p}\mathbb{S}^2(K_\bullet)/B^2\le\mathbb{C}^2(K_\bullet)/B^2\le\alpha_9^2\to0.$$

Применяя лемму 5.9 при $m=2$ к функциям из (98), получим (102), так как теперь

$$\beta\le d_c^{2q}\mathbb{S}^2(\sqrt2L_\bullet/B)=2d_c^{2q}\mathbb{S}^2(L_\bullet)/B^2\le2\mathbb{C}^2(L_\bullet)/B^2\le2\alpha_9^2\to0.$$

Далее, используя лемму 5.9 при $m=1$ для функций из (96) и (99), получим (103) и (104), поскольку в этих случаях соответственно

$$\beta=d_c^p\sum\mathbf{E}|K_{xi}X_{bi}Y_i|/A\le\alpha_2\to0 \quad \text{и} \quad \beta=d_c^q\sum\mathbf{E}|L_{xbi}Y_i|/A\le\alpha_2\to0.$$

Наконец, применяя лемму 5.10 к функциям из (97) и (100), имеем последовательно (105) и (106), так как теперь соответственно

$$\beta=\frac{d_c^p}{B_\gamma}\sum(\mathbf{E}|K_{xi}\epsilon_{ai}|+\theta y_i\mathbf{E}|K_{xi}\epsilon_{bi}|)\le\mu_6\to0,$$

$$\beta=\frac{d_c^q}{B_\gamma}\sum(\mathbf{E}L_{xai}+\theta y_i\mathbf{E}L_{xbi})\le\mu_6\to0. \quad \square$$

5.4. В этом пункте докажем леммы 5.3–5.6.

Доказательство леммы 5.3. Из леммы 5.7 и замечания 4.1 следует, что мы можем воспользоваться результатами § 4 для функций из (95). Из теоремы 5 в этом случае получаем

$$\alpha_\gamma:=\mathbf{E}\Big|\sum\breve\gamma_{xi}(\tilde\theta)\epsilon_i\Big|/B\le2^p\mathbb{C}_p(G_\bullet)=2^p\mathbb{C}_p(K_\bullet/B)=2^p\mathbb{C}_p(K_\bullet)/B. \tag{107}$$

Аналогично, применяя теорему 5 к функциям из (98), имеем

$$\alpha_\lambda:=\mathbf{E}\Big|\sum\breve\lambda_i(\tilde\theta)\Big|/B\le2^q\mathbb{C}_q(\sqrt2L_\bullet/B)=2^{q+1/2}\mathbb{C}_q(L_\bullet)/B. \tag{108}$$

Но $\breve\zeta_i(\cdot)=\breve\gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_i-\breve\lambda_i(\cdot)$ ввиду (94). Поэтому из (89), (107) и (108) находим

$$\mathbf{E}|\tilde\rho_u|\le\alpha_\gamma+\alpha_\lambda\le2^p\mathbb{C}_p(K_\bullet)/B+2^{q+1/2}\mathbb{C}_q(L_\bullet)/B\le3\alpha_{10}\to0.$$

При выводе последнего соотношения мы использовали (86). $\square$

Доказательство леммы 5.4. Поскольку $\zeta_{bi}(\cdot)=\gamma_{xi}(\cdot)X_{bi}Y_i-\lambda_{xbi}(\cdot)Y_i$ ввиду (20), из определений в (89), (103) и (104) нетрудно заметить, что

$$\rho_{vi}=\rho_{\gamma vi}-\rho_{\lambda vi}, \quad |\rho_{vi}|\le|\rho_{\gamma vi}|+|\rho_{\lambda vi}|.$$

Но из этих соотношений и сходимостей в (103) и (104) немедленно следуют нужные нам сходимости в (91). $\square$

Доказательство леммы 5.5. Ввиду (20)

$$\hat\zeta_i(\tilde\theta) - \zeta_i(\tilde\theta) = (\theta - \hat\theta)\zeta_{bi}(\tilde\theta) = (\theta - \hat\theta)\big(\zeta_{bi}(\theta) + \rho_{vi}\big).$$

Используя свойства (88) нормы и определения из (90), (22) и (33), имеем

$$|\tilde\rho_{uv}| \le \mathbb{S}(\hat\zeta_\bullet(\tilde\theta) - \zeta_\bullet(\tilde\theta))/B = \mathbb{S}((\theta - \hat\theta)\zeta_{b\bullet}(\tilde\theta))/B = |\hat\theta - \theta|\mathbb{S}(\zeta_{b\bullet}(\tilde\theta))/B$$
$$= |W(d)|\mathbb{S}(\zeta_{b\bullet}(\tilde\theta))/A \le |W(d)|(\mathbb{S}(\zeta_{b\bullet}(\theta)) + \mathbb{S}(\rho_{v\bullet}))/A = |W(d)|(\alpha_4(A) + \mathbb{S}(\rho_{v\bullet})/A). \tag{109}$$

Поскольку $W(d) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ в силу (22), утверждение леммы вытекает из (33), (91) и (109). $\square$

Доказательство леммы 5.6. В силу свойств (88) нормы и (94) имеем

$$|\tilde\rho_{uu}| \le \mathbb{S}(\zeta_\bullet(\tilde\theta) - \zeta_\bullet(\theta))/B + |\mathbb{S}(\zeta_\bullet(\theta))/B - 1| \le \mathbb{S}(\zeta_\bullet(\tilde\theta) - \zeta_\bullet(\theta))/B + |\alpha_5(B) - 1|,$$
$$\mathbb{S}(\zeta_\bullet(\tilde\theta) - \zeta_\bullet(\theta))/B \le \mathbb{S}((\gamma_{x\bullet}(\tilde\theta) - \gamma_{x\bullet}(\theta))\epsilon_i)/B + \mathbb{S}(\lambda_\bullet(\tilde\theta) - \lambda_\bullet(\theta))/B. \tag{110}$$

Из этих соотношений с учетом (33), (101) и (102) немедленно вытекает требуемое утверждение леммы. $\square$

§ 6. Доказательства остальных утверждений

6.1. При проверке условий об асимптотической нормальности в теореме 1 и следствиях 2 и 3 мы используем классическое условие Линдеберга. Для удобства читателя напомним это условие.

Определение 6.1. Будем говорить, что случайные величины $\{\eta_i\}$ удовлетворяют *условию Линдеберга*, если $\{\eta_i\} = \{\eta_i^{(n)} : i = 1, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots\}$, причем при каждом n величины $\{\eta_i : i = 1, \dots, n\}$ независимы в совокупности и

$$\forall n, i \quad \mathbf{E}\eta_i = 0, \quad 0 < \sum \mathbf{D}\eta_i < \infty \quad \text{начиная с некоторого } n,$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum \mathbf{E}\left\{\eta_i^2;\ \eta_i^2 > \varepsilon^2 \sum \mathbf{D}\eta_i\right\} / \sum \mathbf{D}\eta_i \to 0.$$

Нам дважды потребуется также следующее известное свойство условия Линдеберга.

Лемма 6.2. *Если случайные величины $\{\eta_i\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, то*

$$\sum \eta_i / \sqrt{\sum \mathbf{D}\eta_i} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{и} \quad \sum \eta_i^2 / \sum \mathbf{D}\eta_i \xrightarrow{p} 1.$$

Первая сходимость в этом утверждении справедлива в силу центральной предельной теоремы Линдеберга — Феллера. Вторая сходимость является частным случаем закона больших чисел для схемы серий $\big(\eta_i^2 - \mathbf{D}\eta_i\big)/\sum \mathbf{D}\eta_i$. Доказательство леммы 6.2 и подробные комментарии об условии Линдеберга можно найти, например, в [17, гл. 8].

При выводе следствия 3 будем использовать следующее утверждение.

Лемма 6.3. *Пусть при каждом n последовательность $\{\eta_i = \eta_i^{(n)}\}$ состоит из независимых случайных величин и*

$$\beta := \sum \mathbf{E}\min\{\eta_i^2, |\eta_i|\} \to 0. \tag{111}$$

Тогда $\sum(\eta_i - \mathbf{E}\eta_i) \xrightarrow{p} 0$ *и* $\mathbb{S}(\eta_\bullet) \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство. Введем срезанные случайные величины, полагая $\tilde\eta_i = \eta_i$ при $|\eta_i| \le 1$ и $\tilde\eta_i = 0$ при $|\eta_i| > 1$. В этом случае в силу условия (111)

$$\sum \mathbf{D}\tilde\eta_i \le \sum \mathbf{E}\tilde\eta_i^2 \le \beta \to 0, \quad \sum \mathbf{E}|\eta_i - \tilde\eta_i| \le \sum \mathbf{E}\{|\eta_i|; |\eta_i| > 1\} \le \beta \to 0. \tag{112}$$

Используя эти соотношения, а также неравенство Чебышева, находим

$$\sum(\tilde\eta_i - \mathbf{E}\tilde\eta_i) \xrightarrow{p} 0, \quad \sum|\eta_i - \tilde\eta_i| \xrightarrow{p} 0, \quad \sum|\mathbf{E}\eta_i - \mathbf{E}\tilde\eta_i| \to 0. \tag{113}$$

Таким образом, в силу свойств нормы из второй и третьей сходимостей в (113), имеем

$$\left|\left|\sum(\eta_i - \mathbf{E}\eta_i)\right| - \left|\sum(\tilde\eta_i - \mathbf{E}\tilde\eta_i)\right|\right| \le \left|\sum(\eta_i - \tilde\eta_i - \mathbf{E}\eta_i + \mathbf{E}\tilde\eta_i)\right|$$
$$\le \sum|\eta_i - \tilde\eta_i| + \sum|\mathbf{E}\eta_i - \mathbf{E}\tilde\eta_i| \xrightarrow{p} 0.$$

Это соотношение вместе с первой сходимостью в (113) доказывает первое утверждение леммы.

Используя свойства (88), получаем

$$\mathbb{S}(\eta_\bullet) \le \mathbb{S}(\tilde\eta_\bullet) + \mathbb{S}(\eta_\bullet - \tilde\eta_\bullet) \le \mathbb{S}(\tilde\eta_\bullet) + \sum|\eta_i - \tilde\eta_i|.$$

Следовательно, в силу неравенства Гёльдера и (112)

$$\mathbf{E}\mathbb{S}(\eta_\bullet) \le \Big(\sum \mathbf{E}\tilde\eta_i^2\Big)^{1/2} + \sum \mathbf{E}|\eta_i - \tilde\eta_i| \to 0.$$

Последняя сходимость доказывает второе утверждение леммы. □

6.2. Доказательство следствия 2. Из леммы 6.2 при $\eta_i = \zeta_i(\theta) - \delta_i(\theta)$ имеем

$$\sum(\zeta_i(\theta) - \delta_i(\theta))/B_\zeta \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{и} \quad \alpha_{10} := \mathbb{S}(\zeta_\bullet(\theta) - \delta_\bullet(\theta))/B_\zeta \xrightarrow{p} 1. \tag{114}$$

Далее, из условия (39) с учетом определений (32), (33) и (88) нетрудно извлечь, что

$$\mathbf{E}\alpha_0(A_\zeta) = 1, \tag{115}$$

$$\mathbf{E}(\alpha_0(A_\zeta) - 1)^2 = \sum \mathbf{D}\zeta_{bi}(\theta)/A_\zeta^2 \le \sum \mathbf{E}\zeta_{bi}^2(\theta)/A_\zeta^2 \equiv \mathbf{E}\alpha_4^2(A_\zeta) \equiv \alpha_7^2 \to 0.$$

Таким образом, из первой сходимости в (114) и условия (34) при $B = B_\zeta$ следует, что имеет место (31) при $B = B_\zeta$. Условие (32) при $A = A_\zeta$ выполнено ввиду (115). Значит, из п. (А) теоремы 2 немедленно вытекает первое утверждение следствия.

Пусть теперь верно условие (40). Тогда из второй сходимости в (114) и свойств (88) нормы получаем

$$|\alpha_5(B_\zeta) - \alpha_{10}| \equiv |\mathbb{S}(\zeta_\bullet(\theta)) - \mathbb{S}(\zeta_\bullet(\theta) - \delta_\bullet(\theta))|/B_\zeta \le \mathbb{S}(\delta_\bullet(\theta))/B_\zeta \equiv \alpha_8 \to 0.$$

Из этой сходимости и (114) следует, что выполнено второе условие в (33) при $B = B_\zeta$. Справедливость первого предположения в (33) при $A = A_\zeta$ вытекает из (115). Таким образом, из п. (Б) теоремы 2 получаем второе утверждение следствия 2.

6.3. При выводе следствий 3 и 4 будем использовать следующие две леммы.

Лемма 6.4. *Если выполнено предположение* 2.9, *то при* $B = B_\gamma$ *имеют место условие* (35) *и второе соотношение в* (33).

Доказательство. Положим

$$\beta_{0i} := -\gamma_{\theta i}(1 + \theta b_i)\epsilon_{yi}, \quad \beta_{1i} := \rho_{xi}\epsilon_{abi}, \quad \beta_{2i} := -(1 + \theta b_i)\rho_{xi}\epsilon_{yi},$$
$$\beta_{3i} := \gamma_{\theta i}\epsilon_{abi}, \quad \beta_{4i} := -\lambda_{xai}(\theta), \quad \beta_{5i} := \theta\lambda_{xbi}(\theta)Y_i. \tag{116}$$

Из условия Линдеберга и леммы 6.2 при $\eta_i = \beta_{0i}$ находим, что

$$\forall i \quad \mathbf{E}\beta_{0i} = 0, \quad \beta_0 := \sum \beta_{0i}/B_\gamma \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{и} \quad \mathbb{S}(\beta_{0\bullet})/B_\gamma \xrightarrow{p} 1. \tag{117}$$

Заметим теперь, что

$$\beta_k := \sum (\beta_{ki} - \mathbf{E}\beta_{ki})/B_\gamma \xrightarrow{p} 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{S}(\beta_{k\bullet})/B_\gamma \xrightarrow{p} 0 \text{ при } k = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{118}$$

Действительно, при $k = 1$ сходимости в (118) следуют из леммы 6.3, если считать $\eta_i = \beta_{1i}$, а также учесть первое условие в (42). При $k = 2, 3, 4, 5$ сходимости в (118) вытекают из второго условия в (42) и следующей цепочки неравенств:

$$\sum_{k=2}^{5} \mathbf{D}\beta_k = \sum_{k=2}^{5} \sum \mathbf{D}\beta_{ki}/B_\gamma^2 \le \sum_{k=2}^{5} \sum \mathbf{E}\beta_{ki}^2/B_\gamma^2 = \sum_{k=2}^{5} \mathbf{E}\mathbb{S}^2(\beta_{k\bullet})/B_\gamma^2 \equiv \mu_2 \to 0.$$

Поскольку $\gamma_{xi}(\theta)\epsilon_i = (\rho_{xi} + \gamma_{\theta i})(\epsilon_{abi} - (1 + \theta b_i)\epsilon_{yi})$ ввиду (19) и (41), то

$$\zeta_i(\theta) = \sum_{k=0}^{5} \beta_{ki}, \quad \delta_i(\theta) = \mathbf{E}\zeta_i(\theta) = \sum_{k=0}^{5} \mathbf{E}\beta_{ki}, \quad w_0(B_\gamma) = \sum_{k=0}^{5} \beta_k, \tag{119}$$

где мы еще учли определение (35). Первое утверждение леммы, т. е. сходимость $w_0(B_\gamma) \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$, следует теперь из представления (119) и первых сходимостей в (117) и (118).

Далее, из вторых сходимостей в (118) и свойства нормы из (88) имеем

$$|\alpha_5(B_\gamma) - \mathbb{S}(\beta_{0\bullet})/B_\gamma| \equiv |\mathbb{S}(\zeta_\bullet(\theta)) - \mathbb{S}(\beta_{0\bullet})|/B_\gamma \le \sum_{k=1}^{5} \mathbb{S}(\beta_{k\bullet}) \xrightarrow{p} 0.$$

Отсюда и из второй сходимости в (117) получаем, что $\alpha_5(B_\gamma) \xrightarrow{p} 1$, т. е. доказано и второе утверждение леммы. □

Лемма 6.5. *Если верно предположение* 2.9, *то при* $A = A_\gamma$ *справедливы условие* (32) *и первое соотношение в* (33).

Доказательство. Положим

$$\beta_{6i} := \gamma_{\theta i} X_{bi} Y_i, \quad \beta_{7i} := \mu_{xbi} Y_i, \quad \beta_{8i} := \beta_{6i} - \mathbf{E}\beta_{6i}, \quad \beta_{9i} := \mathbf{E}\beta_{6i} - \gamma_{\theta i} b_i y_i. \tag{120}$$

В силу первого условия в (43)

$$\sum \mathbf{E}|\beta_{7i}|/A_\gamma \equiv \mu_3 \to 0 \quad \text{и} \quad \sum |\beta_{7i}|/A_\gamma \xrightarrow{p} 0.$$

Следовательно,

$$\beta_7 := \sum \beta_{7i}/A_\gamma \xrightarrow{p} 0, \quad \mathbb{S}(\beta_{7\bullet})/A_\gamma \le \sum |\beta_{7i}|/A_\gamma \to 0. \tag{121}$$

Заметим теперь, что

$$\beta_8 := \sum \beta_{8i}/A_\gamma \xrightarrow{p} 0, \quad \mathbb{S}(\beta_{6\bullet})/A_\gamma \xrightarrow{p} 0. \tag{122}$$

Эти сходимости следуют из второго условия в (43) ввиду цепочки соотношений

$$\mathbf{E}\beta_8^2 = \mathbf{D}\beta_8 = \sum \mathbf{D}\beta_{8i}/A_\gamma^2 \le \sum \mathbf{D}\beta_{6i}/A_\gamma^2 \le \sum \mathbf{E}\beta_{6i}^2/A_\gamma^2 = \mathbf{E}\mathbb{S}^2(\beta_{6\bullet})/A_\gamma^2 = \mu_4^2 \to 0.$$

Заметим, наконец, что

$$\forall i \quad \mathbf{E}\epsilon_{yi} = 0 \quad \text{и} \quad \beta_{9i} = \gamma_{\theta i}\mathbf{E}(\epsilon_{bi} Y_i), \quad \beta_9 := \sum \beta_{9i}/A_\gamma \equiv \mu_5 \to 0. \tag{123}$$

Действительно, первое равенство в (123) немедленно получаем из условия Линдеберга, которому удовлетворяют величины $\gamma_{\theta i}(1 + \theta b_i)\epsilon_{yi}$. Из него вытекает второе равенство в (123), поскольку $\beta_{9i} = \gamma_{\theta i}\mathbf{E}(b_i \epsilon_{yi} + \epsilon_{bi} Y_i)$ ввиду определений (2) и (120). Третье соотношение в (123) немедленно следует из второго ввиду последнего условия в (43).

Используя определения из (20), (41) и (120)–(123), имеем

$$\zeta_{bi}(\theta) = \beta_{6i} + \beta_{7i} = \beta_{7i} + \beta_{8i} + \beta_{9i} + \gamma_{\theta i} b_i y_i \quad \text{и} \quad \alpha_0(A_\gamma) = 1 + \beta_7 + \beta_8 + \beta_9. \tag{124}$$

При выводе второго равенства из (124) мы учли также определения из (12) и (32). Из первых сходимостей в (121), (122) и из последних соотношений в

(123), (124) немедленно следует нужная нам сходимость (32) при $A = A_\gamma$. Из вторых сходимостей в (121) и (122) вытекает требуемая первая сходимость (33), поскольку

$$\alpha_4(A_\gamma) \equiv \mathbb{S}(\zeta_{b\bullet})/A_\gamma = \mathbb{S}(\beta_{6\bullet} + \beta_{7\bullet})/A_\gamma \le \mathbb{S}(\beta_{6\bullet})/A_\gamma + \mathbb{S}(\beta_{7\bullet})/A_\gamma \xrightarrow{p} 0.$$

При выводе этих неравенств мы использовали еще свойства нормы из (88). □

Для доказательства следствия 4 нам потребуется также

Лемма 6.6. *Пусть* $B = B_\gamma$, *выполнены предположение* 2.4 *и условие* (46). *Тогда имеет место сходимость* (36).

Доказательство. Из представления (45) и определений (14), (105) и (106) имеем

$$\delta_i(\tilde\theta) - \delta_i(\theta) = \delta_{ai}(\tilde\theta) - \delta_{ai}(\theta) - \theta y_i(\delta_{bi}(\tilde\theta) - \delta_{bi}(\theta)) = \rho_{\gamma i}(\tilde\theta) - \rho_{\gamma i}(\theta) - \rho_{\lambda i}(\tilde\theta) + \rho_{\lambda i}(\theta).$$

Используя полученное равенство и сходимости (105) и (106), нетрудно убедиться, что $\alpha_{11}(\tilde\theta) := \sum(\delta_i(\tilde\theta) - \delta_i(\theta))/B_\gamma \xrightarrow{p} 0$. Из этого соотношения и первого утверждением леммы 5.2 находим $\alpha_6(B_\gamma) \equiv \alpha_{11}(\theta^*) \xrightarrow{p} 0$, что доказывает (36) при $B = B_\gamma$. □

Доказательство следствий 3 и 4. Утверждения следствия 3 очевидным образом вытекают из теоремы 2, утверждения ($А_0$) замечания 2.5 и лемм 6.4 и 6.5.

Если же выполнено предположение 2.10, то в силу замечания 2.11 условие (37) совпадает с (15). Поэтому если мы воспользуемся утверждением ($Б_0$) замечания 2.5, то из теоремы 2 и лемм 6.4–6.6 немедленно получим все утверждения следствия 4. □

6.4. В этом пункте выведем утверждение теоремы 1 из введения. Нам потребуется

Лемма 6.7. *Пусть выполнено предположение* 1.3. *Тогда при всех* n, i

$$\rho_{xi}^2 \le C_1^2(|\epsilon_{ai}| + |\epsilon_{bi}|)^2 \le C_1^2\big(\sigma_{ai}^2 + \sigma_{bi}^2\big)\xi_i^2 \quad \text{при } \xi_i^2 = \xi_{ai}^2 + \xi_{bi}^2.$$

Доказательство. Используя формулу Тейлора, имеем

$$\gamma_i(\theta, X_{ai}, X_{bi}) = \gamma_i(\theta, a_i, b_i) + \int_0^1 \gamma'_{ai}(\theta, a_i + \lambda\epsilon_{ai}, X_{bi})\epsilon_{ai}d\lambda + \int_0^1 \gamma'_{bi}(\theta, a_i, b_i + \lambda\epsilon_{bi})\epsilon_{bi}\, d\lambda.$$

Следовательно, в силу условия (10)

$$|\rho_{xi}| = |\gamma_{xi}(\theta) - \gamma_{\theta i}| = |\gamma_i(\theta, X_{ai}, X_{bi}) - \gamma_i(\theta, a_i, b_i)| \le C_1|\epsilon_{ai}| + C_1|\epsilon_{bi}|.$$

Здесь мы учли обозначения (7) и (41). □

Лемма 6.8. *Если выполнено предположение* 1.3, *то при всех* n, i

$$\mathbf{E}\rho_{xi}^2 \le 2C_1^2\big(\sigma_{ai}^2 + \sigma_{bi}^2\big) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\mu_{xi}^2 \le \mathbf{E}|\rho_{xi}\epsilon_{abi}|^2 \le C_3\big(\sigma_{ai}^2 + \sigma_{bi}^2\big)\mathbf{E}\xi_1^4, \tag{125}$$

где $C_3 = 2C_0^2\big(1 + 2C_0^4\big)$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{E}\xi_i^2 = 2$, из леммы 6.7 следует первая оценка в (125). Далее, из определения (41) имеем

$$|\epsilon_{abi}| \le |\epsilon_{ai}| + \theta|Y_i||\epsilon_{bi}| \quad \text{и} \quad \epsilon_{abi}^2 \le \big(1 + \theta^2Y_i^2\big)\big(\epsilon_{ai}^2 + \epsilon_{bi}^2\big) \le \big(1 + \theta^2Y_i^2\big)\big(\sigma_{ai}^2 + \sigma_{bi}^2\big)\xi_i^2.$$

Отсюда с учетом леммы 6.7 находим

$$\rho_{xi}^2\epsilon_{abi}^2 \le \big(1 + \theta^2Y_i^2\big)\big(\sigma_{ai}^2 + \sigma_{bi}^2\big)^2\xi_i^4 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\rho_{xi}^2\epsilon_{abi}^2 \le \big(1 + \theta^2\mathbf{E}Y_i^2\big)\big(\sigma_{ai}^2 + \sigma_{bi}^2\big)^2\mathbf{E}\xi_i^4. \tag{126}$$

При выводе последнего неравенства мы использовали независимость случайных величин Y_i и ξ_i. Но из определения (1) и условия (13) нетрудно извлечь, что

$$\theta \le C_0, \quad \mathbf{E}Y_i^2 = y_i^2 + \sigma_{yi}^2 \le a_i^2 + \sigma_{yi}^2 \le 2C_0^2 \quad \text{и} \quad \sigma_{ai}^2 + \sigma_{bi}^2 \le 2C_0^2.$$

Подставляя эти оценки в (126), немедленно получаем второе утверждение в (125). $\square$

Утверждение теоремы 1 вытекает из следствия 4 и приводимой ниже леммы 6.9.

Лемма 6.9. *Пусть выполнено предположение* 1.3. *Тогда при* $A = A_\gamma$ *и* $B = B_\gamma$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \mu_4 = O\left(1/n\right), \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3^2 + \mu_6^2 = O\left(\bar\sigma_a^2 + \bar\sigma_b^2\right), \quad \mu_5 \equiv 0.$$

Более того, справедливы предположения 2.9 *и* 2.10.

Доказательство. Предположение 2.3, входящее в состав предположения 2.9, выполнено очевидным образом при $p = q = 1$ ввиду предположения 1.2, а справедливость предположения 2.10 гарантирует предположение 1.1.

Далее, поскольку $\max\limits_{k\le n} \gamma_{\theta k}^2 (1+\theta b_k)^2 \sigma_{yk}^2 / B_\gamma^2 \to 0$ с учетом оценок (13), в силу леммы 1 из [8] или предложения 2.9 из [14] случайные величины $\{\gamma_{\theta i}(1+\theta b_i)\epsilon_{yi}\}$ удовлетворяют условию Линдеберга.

Остальные утверждения леммы очевидно следуют из определений соответствующих величин, если только мы воспользуемся оценками леммы 6.8, а при оценивании величин μ_3 и μ_6^2 — еще и неравенством $\left(\sum \sigma_i/n\right)^2 \le \sum \sigma_i^2/n$. $\square$

6.5. Следствие 5 очевидным образом вытекает из теоремы 1 и следующего утверждения.

Лемма 6.10. *Если случайные величины* ϵ_{ai} *и* ϵ_{bi} *независимы и выполнены условия* (44), (51) *и* (53), *то* $|\delta_{ai}(\theta)| \le 2C_2 \mathbf{E}|\epsilon_{ai}|^3$ *и* $|\delta_{bi}(\theta)| \le 2C_2\mathbf{E}|\epsilon_{bi}|^3$.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$\beta_{10} := \gamma_{ai}'(\theta, X_{ai}, X_{bi}) - \gamma_{ai}'(\theta, a_i, X_{bi}) = \int_0^1 \epsilon_{ai}\gamma_{ai}''(\theta, a_i + t\epsilon_{ai}, X_{bi})\, dt,$$

$$\beta_{11} := \gamma_i(\theta, X_{ai}, X_{bi}) - \gamma_i(\theta, a_i, X_{bi}) - \epsilon_{ai}\gamma_{ai}'(\theta, a_i, X_{bi}) = \int_0^1 (1-t)\epsilon_{ai}^2 \gamma_{ai}''(\theta, a_i + t\epsilon_{ai}, X_{bi})\, dt.$$

Но $\delta_{ai}(\theta) = \mathbf{E}(\epsilon_{ai}\beta_{11}) - \sigma_{ai}^2 \mathbf{E}\beta_{10}$ ввиду (14) и (53). Следовательно, в силу (44)

$$|\delta_{ai}(\theta)| \le \int_0^1 (1-t)\left|\mathbf{E}\epsilon_{ai}^3\gamma_{ai}''(\theta, a_i + t\epsilon_{ai}, X_{bi})\right| dt + \sigma_{ai}^2 \int_0^1 \left|\mathbf{E}\epsilon_{ai}\gamma_{ai}''(\theta, a_i + t\epsilon_{ai}, X_{bi})\right| dt.$$

Используя теперь (51) и теорему Фубини, получаем, что

$$|\delta_{ai}(\theta)| \le C_2 \left|\mathbf{E}\epsilon_{ai}^3\right|/2 + \sigma_{ai}^2 C_2 |\mathbf{E}\epsilon_{ai}| \le C_2\left(\mathbf{E}|\epsilon_{ai}|^3/2 + \sigma_{ai}^3\right) \le 3C_2\mathbf{E}|\epsilon_{ai}|^3/2.$$

Отсюда и из аналогичной оценки для $|\delta_{bi}(\theta)|$ вытекает требуемое утверждение леммы. $\square$

6.6. В этом пункте докажем вспомогательные утверждения, которые понадобятся при выводе теоремы 3. В леммах 6.11 и 6.12 будем предполагать, что случайная величина X и функции $g(\cdot)$ и $g_o(\cdot)$ удовлетворяют условиям

$$g_o(x) = \int\limits_0^x g(y)dy, \quad \mathbf{E}|g(X)| + \mathbf{E}|Xg(X)| < \infty. \tag{127}$$

Лемма 6.11. *Пусть случайная величина X имеет показательное распределение со средним c и выполнены условия* (127). *Тогда*

$$\mathbf{E}(Xg(X) - g_o(X)) = \mathbf{E}(g(X)\epsilon) \quad \textit{при } \epsilon = X - c.$$

Доказательство. Поскольку

$$g^+(x) := \max\{g(x), 0\} \ge 0, \quad g^-(x) := \max\{-g(x), 0\} \ge 0,$$

из теоремы Фубини получаем

$$\beta_\pm := \mathbf{E}\int\limits_0^X g^\pm(y)dy = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^t e^{-t/c}g^\pm(y)\,dydt/c = \int\limits_0^\infty\int\limits_y^\infty e^{-t/c}g^\pm(y)\,dtdy/c$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-y/c}g^\pm(y)dy = c\mathbf{E}g^\pm(X) \le c\mathbf{E}|g(X)| < \infty.$$

Следовательно, $\mathbf{E}g_o(X) = \beta_+ - \beta_- = c\mathbf{E}g^+(X) - c\mathbf{E}g^-(X) = c\mathbf{E}g(X)$. Из установленного равенства немедленно вытекает утверждение леммы. □

Лемма 6.12. *Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале $(0, 2c)$ и верны условия* (127). *Тогда*

$$\mathbf{E}(Xg(X) - g_o(X))/2 = \mathbf{E}(g(X)\epsilon) \quad \textit{при } \epsilon = X - c.$$

Доказательство. Применяя опять теорему Фубини, находим

$$\beta_\pm := \mathbf{E}\int\limits_0^X g^\pm(y)dy = \frac{1}{2c}\int\limits_0^{2c}\int\limits_0^t g^\pm(y)dydt = \frac{1}{2c}\int\limits_0^{2c}\int\limits_y^{2c} g^\pm(y)\,dtdy$$

$$= \frac{1}{2c}\int\limits_0^{2c}(2c - y)g^\pm(y)dy = \mathbf{E}((2c - X)g^\pm(X)) \le 2c\mathbf{E}|g(X)| < \infty.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}g_o(X) = \beta_+ - \beta_- = \mathbf{E}((2c-X)g^+(X)) - \mathbf{E}((2c-X)g^-(X)) = \mathbf{E}((2c-X)g(X))$$
$$= \mathbf{E}((X - 2\epsilon)g(X)) = \mathbf{E}(Xg(X)) - 2\mathbf{E}(g(X)\epsilon).$$

Из полученного равенства вытекает утверждение леммы. □

Лемма 6.13. *Пусть случайная величина Y имеет стандартное нормальное распределение, а дифференцируемая функция $h(\cdot)$ удовлетворяет условию*

$$\mathbf{E}|h'(Y)| + \mathbf{E}|Yh(Y)| < \infty. \tag{128}$$

Тогда справедливо известное равенство

$$\beta := \mathbf{E}h'(Y) - \mathbf{E}(Yh(Y)) = \mathbf{E}(h'(Y) - Yh(Y)) = 0. \tag{129}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — плотность стандартного нормального распределения, т. е. $\varphi(t) = (2\pi)^{-1/2}e^{-t^2/2}$. В этом случае

$$\int\limits_0^\infty |t|(|h(t)| + |h(-t)|)\varphi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^\infty |th(t)|\varphi(t)\,dt = \mathbf{E}|Yh(Y)| < \infty.$$

Значит, найдется такая последовательность чисел $T(k)$, что

$$T(k) \to \infty \quad \text{и} \quad (|h(T(k))| + |h(-T(k))|)\varphi(T(k)) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Из этого факта, (128) и (129) получаем, что

$$\beta = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-T(k)}^{T(k)} (h'(t) - th(t))\varphi(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} h(t)\varphi(t)|_{-T(k)}^{T(k)} = 0,$$

поскольку $(h'(t) - th(t))\varphi(t) = (h(t)\varphi(t))'$. $\square$

Лемма 6.14. *Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение со средним c и с дисперсией σ^2, а дифференцируемая функция $g(\cdot)$ удовлетворяет следующему условию:*

$$\mathbf{E}|g'(X)| + \mathbf{E}|\epsilon g(X)| < \infty \quad \text{\textit{при} } \epsilon = X - c.$$

Тогда справедливо равенство $\sigma^2\mathbf{E}g'(X) = \mathbf{E}(g(X)\epsilon)$.

Это утверждение вытекает из леммы 6.13 при $Y = (X - c)/\sigma = \epsilon/\sigma$ и $h(Y) := \sigma g(c + \sigma Y)$.

6.7. Приступим непосредственно к выводу теоремы 3. Нам понадобится

Лемма 6.15. *Пусть при некотором $t > 0$ справедливы предположения* 3.1 *и* 3.2. *В этом случае при данном $t > 0$ верны следующие равенства:*

$$\delta_{ai}(t) = 0 \quad \text{\textit{и}} \quad \delta_{bi}(t) = 0 \quad \text{\textit{при всех} } n,\ i. \tag{130}$$

Доказательство. Пусть при некоторых n, i и $t > 0$ выполнено условие (А_a) предположения 3.1. При любом фиксированном значении случайной величины X_{bi} воспользуемся утверждением леммы 6.14 при $X = X_{ai}$ и $g(\cdot) = \gamma_i(t, \cdot, X_{bi})$. В итоге получим, что верно первое равенство в (130).

Если же выполнено условие (Б_a), то первое равенство в (130) также верно, но уже в силу леммы 6.12. А из леммы 6.11 вытекает справедливость этого равенства в случае справедливости условия (В_a).

Второе равенство в (130) получается аналогично из предположения 3.2. $\square$

Доказательство теоремы 3. Первое утверждение теоремы вытекает из леммы 6.15 при $t = \theta$. Если равенства (130) верны при всех $t \in (\theta/2, 3\theta/2)$, то

$$\forall n \quad \mathbf{P}(\exists\ i \quad \delta_{ai}(\theta^*) \neq 0 \quad \text{или} \quad \delta_{bi}(\theta^*) \neq 0) \leq \mathbf{P}(|\theta^* - \theta| \geq \theta/2).$$

Из этого неравенства и леммы 5.2 следует второе утверждение теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Michaelis L., Menten M. L.* Die Kinetik der Invertinwirkung // Biochem. Z. 1913. Bd 49. S. 333.
2. *Down J. E., Riggs D. S.* A comparison of estimates of Michaelis–Menten kinetic constants from various nonlinear transformation // J. Biol. Chemistry. 1965. V. 240, N 2. P. 863–869.
3. *Cornish-Bowden A., Eisenthal R.* Statistical consideration in the estimation of enzyme kinetic parameters by direct linear plot and other methods // Biochemical J. 1974. V. 139, N 3. P. 721–730.
4. *Atkins G. L., Nimmo I. A.* A comparison of seven methods for fitting the Michaelis–Menten equation // Biochemical J. 1975. V. 149, N 3. P. 775–777.
5. *Currie D. J.* Estimating Michaelis–Menten Parameters: Bias, variance and experimental design // Biometrics. 1982. V. 38, N 4. P. 907–919.
6. *Raaijmakers J.* Statistical analisis of the Michaelis–Menten equation // Biometrics. 1987. V. 43, N 3. P. 793–803.
7. *Ruppert D., Cressie N., Carroll R. J.* A Transformation/weighting model for estimation Michaelis–Menten parameters // Biometrics. 1989. V. 45, N 2. P. 637–656.

8. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 150–163.
9. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Явное асимптотически нормальное оценивание параметров уравнения Михаэлиса — Ментен // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 610–633.
10. *Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е.* Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987.
11. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986. Т. 1–2.
12. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
13. *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 1994–1997 // Comm. Statist. Theory Methods. 1998. V. 27, N 10. P. 2581–2623.
14. *Саханенко А. И., Линке Ю. Ю.* Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах. Сиб. мат. журн. (В печати).
15. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически нормальное оценивание многомерного параметра в задаче дробно-линейной регрессии // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 372–384.
16. *Боровков А. А.* Математическая статистика. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997.
17. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

Статья поступила 30 мая 2006 г.

Саханенко Александр Иванович
Югорский гос. университет, ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
aisakh@mail.ru

Линке Юлиана Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
linke@math.nsc.ru