Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.21

О ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУПРЕМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ В СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Д. А. Коршунов

Аннотация: Рассматривается случайное блуждание $\{S_n\}$ с отрицательным сносом, имеющее приращения с тяжелыми хвостами. Изучается асимптотическое поведение на бесконечности плотности распределения супремума $\sup\limits_n S_n$.

Ключевые слова: случайное блуждание, субэкспоненциальное распределение, асимптотика хвостов, локальная асимптотика.

Любимому учителю по случаю 75-летия посвящается

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общим распределением $F(B) = \mathbf{P}\{\xi_1 \in B\}$ и отрицательным средним $\mathbf{E}\xi_1 = -m < 0$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $M = \sup\{S_n, n \geq 0\}$. Ввиду усиленного закона больших чисел супремум M конечен с вероятностью 1; его распределение обозначим через $\pi(B) = \mathbf{P}\{M \in B\}$. Хвост произвольного распределения G обозначаем через $\overline{G}(x) = G((x, \infty))$.

В настоящей заметке рассматривается случай тяжелых хвостов, когда $\mathbf{E}e^{\lambda\xi_1} = \infty$ для любого $\lambda > 0$. В этой ситуации изучаются большие уклонения распределения M. Принцип формирования больших уклонений супремума хорошо известен — основной вклад вносит одно большое слагаемое. В результате асимптотическое поведение хвоста меры π определяется хвостом распределения F и обычно выписывается в терминах распределения F_I, задаваемого равенством

$$\overline{F}_I(x) = \min\left(1, \int\limits_x^\infty \overline{F}(y)\,dy\right), \quad x > 0.$$

В случае тяжелых хвостов важную роль играет класс $\mathscr{S}$ субэкспоненциальных распределений. Распределение G на неотрицательной полуоси с неограниченным носителем называется *субэкспоненциальным*, если $\overline{G * G}(x) \sim 2\overline{G}(x)$ при $x \to \infty$. Известна

Теорема 1 $[1, 2]$. *Следующие два утверждения эквивалентны:*
(i) *распределение F_I субэкспоненциально;*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00810) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–8980.2006.1).

(ii) $\mathbf{P}\{M > x\} \sim m^{-1}\overline{F}_I(x)$ *при* $x \to \infty$.

Однако в рассматриваемом субэкспоненциальном случае из интегральной асимптотики $\bar{\pi}(x) \sim m^{-1}\overline{F}_I(x)$ невозможно получить информацию о локальных вероятностях для супремума; можно извлечь лишь, что для любого фиксированного t справедливо соотношение $\pi((x, x+t]) = o(\bar{\pi}(x))$ при $x \to \infty$. В большинстве задач, связанных с локальными вероятностями, этого недостаточно. Оказывается, что для локального аналога теоремы 1 ключевую роль играет класс распределений $\mathscr{S}^*$, включающий в себя все распределения G на неотрицательной полуоси с неограниченным носителем и конечным средним значением такие, что

$$\int\limits_0^x \overline{G}(x-y)\overline{G}(y)\,dy \sim 2\overline{G}(x)\int\limits_0^\infty \overline{G}(y)\,dy \quad \text{при } x \to \infty.$$

Известно (см. [3]), что $G \in \mathscr{S}^*$ влечет $G \in \mathscr{S}$ и $G_I \in \mathscr{S}$.

Пусть F_0 — мера, порожденная F на $(0,\infty)$, т. е. $F_0(B) = F(B \cap (0,\infty))$.

Теорема 2 [4]. *Если распределение $F_0/\overline{F}(0)$ нерешетчато и принадлежит классу $\mathscr{S}^*$, то для любого фиксированного $x_0 > 0$*

$$\pi((x, x+x_0]) \sim \frac{x_0}{m}\overline{F}(x) \quad \textit{при } x \to \infty. \tag{1}$$

Из работы [5, теорема 2(b)] вытекает, что верно и обратное утверждение: если асимптотика (1) справедлива для любого $x_0 > 0$ и F имеет длинный хвост, то $F_0/\overline{F}(0) \in \mathscr{S}^*$. В работе [6, теорема 4.2] приведено некоторое достаточное для выполнения (1) условие.

Ввиду теорем 1 и 2 естествен также вопрос, при каких условиях π имеет (в каком-либо смысле) плотность (или ненулевую абсолютно непрерывную компоненту) и как можно описать асимптотику этой плотности в субэкспоненциальном случае, в частности, когда эта плотность эквивалентна $\overline{F}(x)/m$ при $x \to \infty$. Сразу отметим, что распределение π никогда не является абсолютно непрерывным относительно меры Лебега, поскольку всегда обладает атомом в нуле весом

$$q \equiv \mathbf{P}\{M = 0\} = \mathbf{P}\{S_n \le 0 \text{ для любого } n \ge 1\} > 0. \tag{2}$$

В связи с этим уточним используемую нами терминологию, относящуюся к плотностям.

Говорим, что распределение G имеет *плотность* $g(x)$ при $x > \hat{x}$, если для любого борелевского множества $B \subseteq (\hat{x}, \infty)$ справедливо

$$G(B) = \int\limits_B g(y)\,dy.$$

В этом случае свертка $G * G$ гарантированно имеет плотность при $x > 2\hat{x}$.

Будем говорить, что плотность g на $(\hat{x}, \infty)$ имеет *длинный хвост* (и писать $g \in \mathscr{L}$), если функция $g(x)$ ограничена на множестве $(\hat{x}, \infty)$, $g(x) > 0$ при всех достаточно больших x и $g(x+t) \sim g(x)$ при $x \to \infty$ равномерно по $t \in [0,1]$. В частности, если $g \in \mathscr{L}$, то $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Будем говорить, что распределение G на неотрицательной полуоси с плотностью $g(x)$ на множестве $(\hat{x}, \infty)$ *принадлежит классу* $\mathscr{S}_{ac}$, если $g \in \mathscr{L}$ и

$$g^{*2}(x) \equiv 2\int\limits_0^{\hat{x}} g(x-y)G(\,dy) + \int\limits_{\hat{x}}^{x-\hat{x}} g(x-y)g(y)\,dy \sim 2g(x)$$

при $x \to \infty$; в этом случае плотность g называется *субэкспоненциальной.* Будем говорить, что неотрицательная мера G на неотрицательной полуоси с плотностью $g(x)$ на множестве $(\hat{x}, \infty)$ *принадлежит классу* $\mathscr{S}_{ac}$, если $G/G([0,\infty)) \in \mathscr{S}_{ac}$.

Из определений вытекает, что распределение F_I имеет субэкспоненциальную плотность тогда и только тогда, когда $F_0/\overline{F}(0) \in \mathscr{S}^*$. В работе [7] фактически доказана следующая

Теорема 3. *Предположим, что $F_0/\overline{F}(0) \in \mathscr{S}^*$, распределение F имеет плотность f на $(0,\infty)$ и эта плотность имеет длинный хвост. Тогда распределение π имеет плотность на $(0,\infty)$, эквивалентную $\overline{F}(x)/m$ при $x \to \infty$.*

В работе [7] теорема 3 сформулирована при несколько другом условии. А именно, предполагалось, что распределение F имеет плотность f не на $(0,\infty)$, а на $(\hat{x},\infty)$ при некотором $\hat{x}$. Коротко заметим, что доказательство, приведенное в [7] для $\hat{x} > 0$, некорректно в том отношении, что в ключевом предложении 8 этой работы величины $A_k(x_0)$, вообще говоря, не определены. Точнее, свертка F^{*n} может не иметь плотности при $x \le n\hat{x}$, а эта граница растет при $n \to \infty$, если $\hat{x} > 0$.

Более того, распределение π всегда содержит в качестве своей компоненты F_0 с весом не менее q (определено в (2)), а также любое из F_0^{*n} с весом также не менее q. Поэтому если распределение F имеет атом в некоторой точке $u > 0$, то распределение π имеет в каждой точке ku, $k \in \mathbf{Z}^+$, атом весом не менее $(F\{u\})^k q$.

Несколько слов о предыстории теоремы 3. В работе [8] рассматривался случай одноканальной системы обслуживания с пуассоновским входным потоком. В терминах случайного блуждания это эквивалентно случаю $\xi_1 = \sigma_1 - \tau_1$, где случайные величины σ_1 и τ_1 неотрицательны и независимы, σ_1 является типичным временем обслуживания, а τ_1 — типичным временем между приходами вызовов и имеет показательное распределение. Тогда распределение ξ_1 имеет плотность на всей действительной оси и теорема 4.1 работы [8] (в части, относящейся к субэкспоненциальному случаю) — частный случай теоремы 3. В предложении 1 из статьи [4] предпринята попытка обобщить результат из [8] на случай общего случайного блуждания. Правда, доказательство отсутствует, и, по-нашему мнению, приведенные условия некорректны.

В настоящей заметке, в частности, предпринимается попытка понять, что происходит, когда F имеет плотность лишь на множестве $(\hat{x},\infty)$ при $\hat{x} > 0$. Сформулируем и докажем утверждение об абсолютно непрерывной компоненте распределения M (ср. с теоремой в статье [9], посвященной абсолютно непрерывной компоненте меры восстановления).

Теорема 4. *Пусть мера F_0 допускает разложение на две неотрицательные меры $F_0 = F_1 + F_2$, где F_1 — абсолютно непрерывная мера с плотностью $f(x)$, а для F_2 существует $\lambda_2 > 0$ такое, что*

$$\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda_2 x} F_2(dx) < \infty. \tag{3}$$

Если $F_0/\overline{F}(0) \in \mathscr{S}^*$ и $f \in \mathscr{L}$, то имеет место представление $\pi = \pi_1 + \pi_2$, где мера π_1 абсолютно непрерывная с плотностью, эквивалентной $\overline{F}(x)/m$ при $x \to \infty$, а хвост меры π_2 допускает для некоторого $\lambda > 0$ оценку $\bar{\pi}_2(x) \le ce^{-\lambda x}$.

Если распределение F имеет плотность при $x > \hat{x}$, то это является частным случаем теоремы 4, а мера F_2 имеет ограниченный носитель. Если к тому же $\hat{x} = 0$, то это соответствует случаю $F_2 = 0$.

Вообще говоря, мера π_1 не представляет собой всю абсолютно непрерывную компоненту меры π. Теорема 4 ничего не говорит о плотности, возможно, ненулевой абсолютно непрерывной компоненты меры π_2. Тем не менее для проведения различных вычислений часто бывает достаточно экспоненциальной оценки хвоста меры π_2.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим момент остановки

$$\eta = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\} \leq \infty,$$

имеющий несобственное распределение, и пусть $\{\psi_n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$G(B) \equiv \mathbf{P}\{\psi_n \in B\} = \mathbf{P}\{S_\eta \in B \mid \eta < \infty\}.$$

Хорошо известно (см., например, [10, гл. 12]), что распределение максимума M совпадает с распределением случайно остановленной суммы $\psi_1 + \dots + \psi_\nu$, где момент остановки ν независим от последовательности $\{\psi_n\}$ и имеет геометрическое распределение с параметром $p = \mathbf{P}\{M > 0\} < 1$, т. е. $\mathbf{P}\{\nu = k\} = (1-p)p^k$ для любого $k = 0, 1, \dots$; при этом на множестве $\{\nu = 0\}$ считаем сумму равной нулю. Эквивалентно

$$\mathbf{P}\{M \in B\} = (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} p^k G^{*k}(B). \tag{4}$$

Распределение G допускает следующее представление:

$$G(B) = \int_{-\infty}^{0} F_0(B-y)H(dy), \quad B \in \mathscr{B}(0,\infty),$$

где мера восстановления с запретами H задается как

$$H(dy) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_j \leq 0 \text{ для всех } j \leq n,\ S_n \in dy\}, \quad y \leq 0.$$

Значит, справедливо следующее разложение меры G:

$$G(B) = \int_{-\infty}^{0} F_1(B-y)H(dy) + \int_{-\infty}^{0} F_2(B-y)H(dy) \equiv G_1(B) + G_2(B).$$

Так как мера F_1 абсолютно непрерывна с плотностью f, мера G_1 также абсолютно непрерывна с плотностью

$$g(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x-y)H(dy), \quad x > 0.$$

По условию теоремы $f \in \mathscr{L}$, поэтому применение леммы 3 из [7] (при $v(x) = f(x)$) приводит к эквивалентности

$$g(x) \sim (1-p)\overline{F}_1(x)/pm.$$

Поскольку обе меры F и F_1 имеют тяжелые хвосты, а мера F_2 — легкий хвост (экспоненциально быстро убывающий хвост), то $\overline{F}(x) \sim \overline{F}_1(x)$ при $x \to \infty$ и

$$g(x) \sim (1-p)\overline{F}(x)/pm. \tag{5}$$

Ввиду $F_0/\overline{F}(0) \in \mathscr{S}^*$ плотность g субэкспоненциальна.

В силу условия (3) мера G_2 удовлетворяет условию Крамера для любого $\lambda < \lambda_2$:

$$\varphi(\lambda) \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\lambda x} G_2(dx) < \infty, \quad \varphi(0) = G_2(0,\infty).$$

Из (4) выводим

$$\pi = (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} p^k \sum_{n=0}^{k} G_1^{*n} G_2^{*(k-n)} \frac{k!}{(k-n)!n!}$$
$$= (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} p^n G_1^{*n} \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} p^{k-n} G_2^{*(k-n)} \frac{k!}{(k-n)!} = (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} p^n G_1^{*n} \frac{1}{n!} H_n,$$

где мера H_n определяется равенством

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (pG_2)^{*k} \frac{(k+n)!}{k!}.$$

Характеристическая функция меры H_n равна

$$\int_0^{\infty} e^{itx} H_n(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} (p\psi(t))^k \frac{(k+n)!}{k!} = \frac{n!}{(1-p\psi(t))^{n+1}},$$

где $\psi(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} G_2(dx)$; последний переход вытекает из разложения Тейлора

$$\frac{n!}{(1-y)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{(k+n)!}{k!}.$$

Поскольку $(1-p\psi(t))^{-1}$ является характеристической функцией меры восстановления

$$J \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (pG_2)^{*k},$$

то $H_n = n! J^{*(n+1)}$, и получаем основное равенство

$$\pi = (1-p)J + (1-p)J * \sum_{n=1}^{\infty} p^n (G_1 * J)^{*n}.$$

Положим

$$\pi_2 \equiv (1-p)J \quad \text{и} \quad \pi_1 \equiv (1-p)J * \sum_{n=1}^{\infty} p^n (G_1 * J)^{*n}.$$

Для любого $\lambda > 0$ такого, что $p\varphi(\lambda) < 1$, имеем экспоненциальную оценку для хвоста меры J:

$$\overline{J}(x) \le e^{-\lambda x} \int_0^{\infty} e^{\lambda y} J(dy) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} p^k \varphi^k(\lambda) = \frac{e^{-\lambda x}}{1-p\varphi(\lambda)}.$$

Распределение F имеет длинный хвост, поэтому

$$J((x,x+1]) = o(\overline{F}(x)) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{6}$$

Как отмечалось ранее, плотность g меры G_1 субэкспоненциальна и, в частности, имеет длинный хвост, т. е. $g(x-y)/g(x) \to 1$ при $x \to \infty$ для любого фиксированного y. В частности, найдется растущий уровень $A(x)\to\infty$ такой, что $g(x-y)/g(x)\to 1$ при $x\to\infty$ равномерно по $|y|\le A(x)$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{A(x)} g(x-y)J(dy)\sim g(x)J((0,\infty))\quad \text{при } x\to\infty.$$

Кроме того, ввиду эквивалентности (5) имеем $g(z)\le c\overline{F}(z)$ для некоторого $c<\infty$; поэтому

$$\int\limits_{A(x)}^{x} g(x-y)J(dy)\le c\int\limits_{A(x)}^{x}\overline{F}(x-y)J(dy)=o\left(\int\limits_{A(x)}^{x}\overline{F}(x-y)\overline{F}(y)\,dy\right)=o(\overline{F}(x))$$

при $x\to\infty$ в силу (6) и $F_0/\overline{F}(0)\in\mathscr{S}^*$. Суммируя, при $x\to\infty$ получаем

$$\int\limits_0^{x} g(x-y)J(dy)\sim J((0,\infty))g(x)=\frac{g(x)}{1-p\varphi(0)}.$$

Следовательно, мера G_1*J имеет плотность, эквивалентную при $x\to\infty$ плотности $g(x)$ с коэффициентом $(1-p\varphi(0))^{-1}$. Таким образом, по теореме 3 из [7] (с поправкой $\hat{x}=0$, см. замечание после теоремы 3) плотность меры π_1 имеет при $x\to\infty$ асимптотику $cg(x)$, где

$$c=(1-p)J((0,\infty))\sum_{n=1}^{\infty}np^nG_1^{n-1}((0,\infty))J^n((0,\infty)).$$

Учитывая, что $G_1((0,\infty))=p-G_2((0,\infty))=1-\varphi(0)$, получаем значение константы:

$$c=\frac{(1-p)p}{(1-p\varphi(0))^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\Big[\frac{p(1-\varphi(0))}{1-p\varphi(0)}\Big]^{n-1}=\frac{p}{1-p}.$$

Вместе с (5) это завершает доказательство теоремы 4.

В случае, когда нарушено условие (3), дополним утверждение теоремы 4 следующим образом.

Теорема 5. *Пусть мера F_0 допускает разложение на две неотрицательные меры $F_0=F_1+F_2$, где F_1 — абсолютно непрерывная мера с плотностью $f(x)$, а для F_2 существует распределение Q на неотрицательной полуоси такое, что $\overline{F}_2(x)\le\overline{Q}(x)$ для любого x, $Q\in\mathscr{S}^*$ и*

$$\overline{Q}(x)=o(\overline{F}(x))\quad \text{при } x\to\infty. \tag{7}$$

Если $F_0/\overline{F}(0)\in\mathscr{S}^*$ и $f\in\mathscr{L}$, то имеет место представление $\pi=\pi_1+\pi_2$, где мера π_1 абсолютно непрерывная с плотностью, эквивалентной $\overline{F}(x)/m$ при $x\to\infty$, а мера π_2 допускает оценку локального типа $\pi_2((x,x+1])=O(\overline{Q}(x))$ при $x\to\infty$.

Доказательство. Мера G_2, построенная в ходе предыдущего доказательства, допускает оценку

$$G_2((x,x+1])=\int\limits_{-\infty}^{0}F_2((x-y,x+1-y])H(dy)\le c_1\overline{F_2}(x)$$

для некоторого $c_1<\infty$. Таким образом, $G_2((x,x+1])=O(Q^I((x,x+1]))$ при $x\to\infty$. Поскольку $Q\in\mathscr{S}^*$, то распределение Q^I является локально субэкспоненциальным; можно применить предложение 4 из [7] и получить оценку сверху

$$J((x,x+1])=O(Q^I((x,x+1]))\quad \text{при } x\to\infty.$$

Следовательно, $\pi_2((x, x+1]) \le c\overline{Q}(x)$ при некотором $c < \infty$. Кроме того, в силу условия (7) мера J удовлетворяет соотношению (6). Это позволяет завершить доказательство так же, как и в теореме 4.

Настоящая статья была написана в основном во время посещения автором the Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork. Автор благодарит за гостеприимство Neil O'Connell и за финансовую поддержку Science Foundation Ireland, грант № SFI 04/RP1/I512. Автор признателен рецензенту за полезные замечания, в частности, за совет привести теорему 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Veraverbeke N.* Asymptotic behavior of Wiener–Hopf factors of a random walk // Stochastic Proc. Appl. 1977. V. 5, N 1. P. 27–37.
2. *Korshunov D.* On the distribution tail of the maxima of a random walk // Stochastic Process. Appl. 1997. V. 72, N 1. P. 97–103.
3. *Klüppelberg C.* Subexponential distributions and integrated tails // J. Appl. Probab. 1988. V. 25, N 1. P. 132–141.
4. *Asmussen S., Kalashnikov V., Konstantinides D., Klüppelberg C., Tsitsiashvili G.* A local limit theorem for random walk maxima with heavy tails // Statist. Probab. Lett. 2002. V. 56, N 4. P. 399–404.
5. *Foss S., Zachary S.* The maximum on a random time interval of a random walk with long-tailed increments and negative drift // Ann. Appl. Probab. 2003. V. 13, N 1. P. 37–53.
6. *Боровков А. А.* О субэкспоненциальных распределениях и асимптотике распределения максимума последовательных сумм // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1235–1264.
7. *Asmussen S., Foss S., Korshunov D.* Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour // J. Theoret. Probab. 2003. V. 16, N 2. P. 489–518.
8. *Klüppelberg C.* Subexponential distributions and characterization of related classes // Probab. Theory Related Fields. 1989. V. 82, N 2. P. 259–269.
9. *Stone C.* On absolutely continuous components and renewal theory // Ann. Math. Statist. 1966. V. 37, N 1. P. 271–275.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.

Статья поступила 1 июля 2005 г.

Коршунов Дмитрий Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korshunov@math.nsc.ru