Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 512.623.4

ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНОСТИ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ В НОРМИРОВАННЫХ ПОЛЯХ

Ю. Л. Ершов

Аннотация: В литературе по нормированным полям известен ряд теорем, которые носят название теорем о непрерывности корней. Цель настоящей работы — дать улучшение констант δ для известных трех теорем, формулируемых на языке ε, δ. Доказательства базируются на основном предложении, установленном в работе автора [1].

Ключевые слова: нормированные поля, непрерывность корней.

Основные определения и необходимые свойства нормированных полей можно найти в гл. 1 книги [2].

Пусть $\mathbb{F} = \langle F, R\rangle$ — нормированное поле, $\widetilde{\mathbb{F}} = \langle \widetilde{F}, \widetilde{R}\rangle \geq \mathbb{F}$ — расширение такое, что $\widetilde{F}$ — алгебраическое замыкание F. В дальнейшем для нормирования $v_{\widetilde{R}}$ и группы нормирования $\Gamma_{\widetilde{R}}$ будут использоваться упрощенные обозначения v и Γ соответственно.

Нормирование v расширяется до нормирования (обозначаемого также через v) поля рациональных функций $\widetilde{F}(x)$ так: $vf \rightleftharpoons \min\{v(a_i) \mid i \leq n\}$ для многочлена $f = a_0x^n + \dots + a_n \in \widetilde{F}[x]$ и $v(fg^{-1}) \rightleftharpoons vf - vg$ для рациональной функции fg^{-1}; $f, g \in \widetilde{F}[x]$, $g \neq 0$.

Через $H(\mathbb{F}) = \langle H_R(F), H(R)\rangle$ обозначается гензелизация поля $\mathbb{F}$; $\mathbb{F} \leq H(\mathbb{F}) \leq \widetilde{\mathbb{F}}$. Поле $\mathbb{F}$ гензелево тогда и только тогда, когда $\mathbb{F} = H(\mathbb{F})$.

В литературе по нормированным полям известен ряд теорем, которые носят название теорем о непрерывности корней (такие, как предложение 1.3.7 в [2], теорема 2.4.7 в [3], теорема 7.4.9 в [4], теорема 2 в [5]). Цель настоящей работы — дать улучшение констант δ для первых трех утверждений, формулируемых на языке ε, δ. Интересная теорема 2 в [5] имеет другой вид и здесь не рассматривается.

В основе доказательств лежит следующее предложение, установленное автором в [1].

Основное предложение. *Пусть $f \in F[x]$ — унитарный многочлен, $a \in F$ и $\alpha \in \widetilde{F}$ — корень многочлена f, наиболее близкий к a, т. е.*

$$v(a-\alpha) = \max\{v(a-\alpha') \mid f(\alpha') = 0,\ \alpha' \in \widetilde{F}\}.$$

Тогда

(a) *имеют место неравенства*

$$vf(a) \leq v(a-\alpha) + vf'(a), \quad vf(a) \leq v(a-\alpha) + vf'(\alpha);$$

(б) *если α единственный, т. е. $f'(\alpha) \neq 0$ и $v(a-\alpha) > v(a-\alpha')$ для любого $\alpha' \neq \alpha \in \widetilde{F}$ такого, что $f(\alpha') = 0$, то $\alpha \in H_R(F)$ и имеют место равенства $vf(a) = v(a-\alpha) + vf'(a)$ и $vf'(a) = vf'(\alpha)$.*

Пусть $f \in F[x]$ — унитарный многочлен, $\alpha \in \widetilde{F}$ и $f(\alpha) = 0$. Полагаем

$$\varkappa_{f,\alpha} \rightleftharpoons \begin{cases} \omega, & \text{если } f'(\alpha) = 0 \text{ (т. е. } \alpha \text{ — кратный корень } f); \\ \max\{v(\alpha-\alpha') \mid \alpha' \in \widetilde{F},\ f(\alpha') = 0,\ \alpha \neq \alpha'\}, & \text{если } f'(\alpha) \neq 0; \end{cases}$$

$$\sigma_{f,\alpha} \rightleftharpoons \varkappa_{f,\alpha} + vf'(\alpha); \quad \varkappa_f \rightleftharpoons \max\{\varkappa_{f,\alpha} \mid \alpha \in \widetilde{F},\ f(\alpha) = 0\};$$

$$\sigma_f \rightleftharpoons \max\{\sigma_{f,\alpha} \mid \alpha \in \widetilde{F},\ f(\alpha) = 0\}; \quad \Delta_f \rightleftharpoons \max\{vf'(\alpha) \mid \alpha \in \widetilde{F}, f(\alpha) = 0\}$$

(константа σ_f введена в работе [5] и названа там *сепарантом* многочлена f).

Заметим, что имеют место эквивалентности

$$\varkappa_f \neq \omega \Leftrightarrow \sigma_f \neq \omega \Leftrightarrow \Delta_f \neq \omega \Leftrightarrow f \text{ — сепарабельный многочлен.}$$

Укажем два следствия основного предложения.

Следствие 1. *Пусть $f \in F[x]$ — унитарный многочлен, $a \in F$ и $\alpha \in \widetilde{F}$, как в условии основного предложения. Если $vf(a) > \sigma_{f,\alpha}$, то имеет место случай* (б) *основного предложения и $v(a-\alpha) = vf(a) - vf'(a) > \sigma_{f,\alpha} - vf'(a) = \sigma_{f,\alpha} - vf'(\alpha) = \varkappa_{f,\alpha}$ ($\geq v(\alpha-\alpha')$, $\alpha \neq \alpha' \in \widetilde{F}$, $f(\alpha') = 0$).*

Из условий следует, что $\sigma_{f,\alpha} \neq \omega$ (тогда и $\varkappa_{f,\alpha} \neq \omega$). Предположим, что α не единственный. Тогда существует $\alpha \neq \alpha' \in \widetilde{F}$ такой, что $f(\alpha') = 0$ и $v(a-\alpha') = v(a-\alpha)$. Из последнего равенства вытекает, что $v(\alpha-\alpha') = v(\alpha - a + a - \alpha') \geq v(a-\alpha)$. Далее, $v(\alpha-\alpha') \leq \varkappa_{f,\alpha}$, и заключение п. (а) предложения дает неравенство $vf(a) \leq v(a-\alpha') + vf'(\alpha)$. Имеем

$$vf(a) > \sigma_{f,\alpha} = \varkappa_{f,\alpha} + vf'(\alpha) \geq v(\alpha-\alpha') + vf'(\alpha) \geq v(a-\alpha) + vf'(\alpha).$$

Отсюда $v(a-\alpha) + vf'(\alpha) \leq \sigma_{f,\alpha} < vf(a) \leq v(a-\alpha) + vf'(\alpha)$; противоречие. □

Следствие 2 (лемма Краснера). *Пусть $\mathbb{F}$ гензелево, $f \in F[x]$ — унитарный многочлен, $a, \alpha \in \widetilde{F}$, $f(\alpha) = 0$ и $v(a-\alpha) > \varkappa_{f,\alpha}$. Тогда $\alpha \in F(a)$.*

Действительно, рассматривая гензелево поле $F(a)$ вместо F, видим, как выше, что для корня α многочлена $f \in F(a)[x]$ имеет место заключение (б) основного предложения. □

Еще одно следствие сформулируем как отдельную теорему.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{F}$ гензелево, $f \in F[x]$ — унитарный сепарабельный многочлен, $a \in F$ и $vf(a) > \sigma_f$. Тогда существует единственный корень α многочлена f такой, что $\alpha \in F$ и*

$$v(a-\alpha) = vf(a) - vf'(a) > \varkappa_{f,\alpha} \quad (\geq v(\alpha-\alpha'),\ \alpha \neq \alpha' \in \widetilde{F},\ f(\alpha') = 0).$$

Пусть $\alpha \in \widetilde{F}$, как в основном предложении; тогда $vf(a) > \sigma_f \geq \sigma_{f,\alpha}$ и следствие 1 показывает, что имеет место случай (б) основного предложения. Тогда $\alpha \in H_R(F) = F$ и $v(a-\alpha) = vf(a) - vf'(a)$. □

Приступим к теоремам о непрерывности корней. Сначала рассмотрим случай унитарных сепарабельных многочленов с коэффициентами из R.

Теорема 2. *Пусть $f, g \in R[x]$ — унитарные многочлены одной и той же степени n, f сепарабелен и $f = \prod_{i<n}(x - \alpha_i)$ — разложение f над $\widetilde{F}$ ($\alpha_i \in \widetilde{R}$, $i < n$). Если $v(f - g) > \sigma_f$, то g сепарабелен, $\varkappa_f = \varkappa_g$, $\sigma_g = \sigma_f$, $\Delta_g = \Delta_f$; существует (единственная) нумерация $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ всех корней многочлена g такая, что $\varkappa_{g,\beta_i} = \varkappa_{f,\alpha_i}$, $\sigma_{g,\beta_i} = \sigma_{f,\beta_i}$, $v(\beta_i - \alpha_i) > \varkappa_{f,\alpha_i}$ для всех $i < n$.*

Из условия $f \in R[x]$ следует, что $v(f(\gamma) - g(\gamma)) > \sigma_f$, $v(f'(\gamma) - g'(\gamma)) > \sigma_f$ для любого $\gamma \in \widetilde{R}$. Кроме того, для любого $\alpha \in \widetilde{F}(\widetilde{R})$ такого, что $f(\alpha) = 0$, имеем $vf'(\alpha) \le \sigma_{f,\alpha}$ $(= \varkappa_{f,\alpha} + vf'(\alpha)) \le \sigma_f$; следовательно, $v(g'(\alpha) - f'(\alpha)) > \sigma_f$ влечет, что $vg'(\alpha) = vf'(\alpha)$.

Для α_i $(i < n)$ выберем (произвольный) ближайший корень β_i многочлена g. Тогда по основному предложению имеет место неравенство $vg(\alpha_i) \le v(\alpha_i - \beta_i) + vg'(\alpha_i)$. Далее, $vg(\alpha_i) = v(g(\alpha_i) - f(\alpha_i)) > \sigma_f \ge \sigma_{f,\alpha_i} = \varkappa_{f,\alpha_i} + vf'(\alpha_i)$; по отмеченному выше $vg'(\alpha_i) = vf'(\alpha_i)$. Следовательно, $v(\alpha_i - \beta_i) > \varkappa_{f,\alpha_i}$. Пусть $j \ne i$ и β — (произвольный) корень многочлена g такой, что $v(\alpha_j - \beta) > \varkappa_{f,\alpha_j}$ (такой β существует по доказанному выше). Покажем, что $v(\beta_i - \beta) = v(\alpha_i - \alpha_j)$. Имеем

$$v(\beta_i - \beta) = v((\beta_i - \alpha_i) + (\alpha_i - \alpha_j) + (\alpha_j - \beta)); \quad v(\alpha_i - \alpha_j) \le \varkappa_{f,\alpha_i}, \varkappa_{f,\alpha_j};$$

$$v(\beta_i - \alpha_i) > \varkappa_{f,\alpha_i}, \quad v(\alpha_j - \beta) > \varkappa_{f,\alpha_j};$$

тогда $v(\beta_i - \beta) = v(\alpha_i - \alpha_j)$. Отсюда следует, что отображение $\alpha_i \mapsto \beta_i$, $i < n$, разнозначно и корень β_i многочлена g единственный ближайший к α_i, $i < n$. Значит, g сепарабелен,

$$g = \prod_{i<n}(x - \beta_i), \quad \varkappa_{g,\beta_i} = \varkappa_{f,\alpha_i}, \quad vf'(\alpha_i) = vg'(\beta_i),$$

$$\sigma_{g,\beta_i} = \sigma_{f,\alpha_i}, \ i < n; \quad \varkappa_g = \varkappa_f, \quad \sigma_g = \sigma_f, \quad \Delta_g = \Delta_f. \quad \square$$

Следствие. *В условиях (и обозначениях) теоремы при условии, что $\mathbb{F}$ гензелево, имеют место равенства $F(\alpha_i) = F(\beta_i)$, $i < n$.*

Это вытекает из следствия 2 основного предложения и неравенств

$$v(\alpha_i - \beta_i) > \varkappa_{f,\alpha_i}(= \varkappa_{g,\beta_i}), \quad i < n. \qquad \square$$

Замечание 1. Предложение 1.3.7 в [2] утверждает заключение следствия в предположении, что $v(f - g) > v\delta_f^2$, где δ_f — дискриминант f. Но условие $v(f - g) > \sigma_f$, вообще говоря, заметно слабее, так как $\sigma_f \le v\delta_f \le 2v\delta_f = v\delta_f^2$.

Действительно, не уменьшая общности, предположим, что $\sigma_f = \sigma_{f,\alpha_0}$ $(= vf'(\alpha_0) + \varkappa_{f,\alpha_0})$, а $\varkappa_{f,\alpha_0} = \max\{v(\alpha_0 - \alpha_i) \mid i > 0\} = v(\alpha_0 - \alpha_1)$. Имеем

$$\pm\delta_f = \prod_{i<n} f'(\alpha_i) = f'(\alpha_0) \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot \prod_{i>1}(\alpha_1 - \alpha_i) \cdot \prod_{j>2} f'(\alpha_j),$$

тогда

$$v(\delta_f) \ge vf'(\alpha_0) + v(\alpha_1 - \alpha_0) = \sigma_f,$$

так как $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \widetilde{R}$.

Замечание 2. Теорема 2 была доказана автором к константой $\varkappa_f + \Delta_f$ вместо σ_f $(\le \varkappa_f + \Delta_f)$. Независимо Бринк [5] установил ее с константой σ_f. Однако предложенное автором доказательство (изложенное выше) справедливо и для σ_f и существенно проще доказательства этой теоремы в [5].

Теорема 3. *Пусть $f, g \in R[x]$ — унитарные многочлены одной и той же степени n, f сепарабелен и $f = \prod\limits_{i<n}(x-\alpha_i)$ — разложение f над $\widetilde{F}$. Пусть $\varepsilon \geq \varkappa_f$ и $\delta \rightleftharpoons \varepsilon + \Delta_f$. Если $v(f-g) > \delta$, то g сепарабелен и существует (единственная) нумерация $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ всех корней многочлена g такая, что $v(\alpha_i - \beta_i) > \varepsilon$, $i < n$.*

Так как $\varepsilon \geq \varkappa_f$, то $\delta \geq \varkappa_f + \Delta_f \geq \sigma_f$. По теореме 2 g сепарабелен и существует нумерация $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ всех корней многочлена g такая, что $v(\alpha_i - \beta_i) > \varkappa_{f,\alpha_i}$, $i < n$. При доказательстве теоремы 2 было фактически установлено, что имеют место равенства $vf(\beta_i) = v(\alpha_i - \beta_i) + vf'(\alpha_i)$, $i < n$ (заключение (б) основного предложения). Кроме того,

$$vf(\beta_i) = v(f(\beta_i) - g(\beta_i)) > \delta = \varepsilon + \Delta_f \geq \varepsilon + vf'(\alpha_i).$$

Отсюда $v(\alpha_i - \beta_i) > \varepsilon$. $\square$

Обратимся теперь к случаю произвольного унитарного сепарабельного многочлена $f \in F[x]$. Пусть

$$\gamma_f \rightleftharpoons \min\{v(\alpha) \mid \alpha \in \widetilde{F},\ f(\alpha) = 0\}, \quad \gamma_f^* \rightleftharpoons \min\{0, \gamma_f\}\ (\gamma_f^* \leq 0);$$
$$\varkappa_f^* \rightleftharpoons \varkappa_f - (n-1)\gamma_f^*; \quad \sigma_f^* \rightleftharpoons \sigma_f - (n-1)\gamma_f^*.$$

Теорема 4. *Пусть $f, g \in F[x]$ — унитарные многочлены одной и той же степени n, f сепарабелен и $f = \prod\limits_{i<n}(x - \alpha_i)$ — разложение f над $\widetilde{F}$. Если $v(f-g) > \sigma_f^*$, то g сепарабелен, $\varkappa_g = \varkappa_f$, $\sigma_g = \sigma_f$, $\Delta_g = \Delta_f$ и существует (единственная) нумерация $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ всех корней многочлена g такая, что $\varkappa_{g,\beta_i} = \varkappa_{f,\alpha_i}$, $\sigma_{g,\beta_i} = \sigma_{f,\alpha_i}$ и $v(\alpha_i - \beta_i) > \varkappa_{f,\alpha_i}$, $i < n$.*

Для α_i $(i < n)$ выберем (произвольный) ближайший корень β_i многочлена g. Тогда по основному предложению имеет место неравенство

$$vg(\alpha_i) \leq v(\alpha_i - \beta_i) + vg'(\alpha_i).$$

Оценим $vg(\alpha_i)$. Имеем

$$vg(\alpha_i) = v(g(\alpha_i) - f(\alpha_i)) = v\left(\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)\alpha_i^{n-j}\right)$$
$$\geq \min\{v(b_j - a_j) + (n-j)v\alpha_i \mid 0 < j \leq n\},$$
$$v(b_j - a_j) > \sigma_f^*, \quad v\alpha_i \geq \gamma_f^*, \quad (n-j)v\alpha_i \geq (n-j)\gamma_f^* \geq (n-1)\gamma_f^*.$$

Отсюда

$$vg(\alpha_i) > \sigma_f^* + (n-1)\gamma_f^* = \sigma_f - (n-1)\gamma_f^* + (n-1)\gamma_f^* = \sigma_f.$$

Оценим $vg'(\alpha_i)$. Имеем

$$v(g'(\alpha_i) - f'(\alpha_i)) = v\left(\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(b_j - a_j)\alpha_i^{n-j-1}\right)$$
$$\geq \min\{v(b_j - a_j) + (n-j-1)v(\alpha_i) \mid 0 < j < n\} > \sigma_f^* + (n-2)\gamma_f^* = \sigma_f - \gamma_f^*;$$
$$\sigma_f \geq \sigma_{f,\alpha_i} = \varkappa_{f,\alpha_i} + vf'(\alpha_i); \quad \varkappa_{f,\alpha_i} = \max\{v(\alpha_i - \alpha_j) \mid j \neq i\} \geq \gamma_f^*.$$

Тогда $\sigma_f - \gamma_f^* \geq vf'(\alpha_i) + \gamma_f^* - \gamma_f^* = vf'(\alpha_i)$ и $v(g'(\alpha_i) - f'(\alpha_i)) > \sigma_f - \gamma_f^* \geq vf'(\alpha_i)$. Отсюда следует, что $vg'(\alpha_i) = vf'(\alpha_i)$.

Используя полученные оценки, приходим к соотношению

$$\sigma_f < vg(\alpha_i) \leq v(\beta_i - \alpha_i) + vg'(\alpha_i) \quad (= vf'(\alpha_i));$$
$$v(\beta_i - \alpha_i) > \sigma_f - vf'(\alpha_i) \geq \sigma_{f,\alpha_i} - vf'(\alpha_i) = \varkappa_{f,\alpha_i} + vf'(\alpha_i) - vf'(\alpha_i) = \varkappa_{f,\alpha_i}.$$

Итак, $v(\beta_i - \alpha_i) > \varkappa_{f,\alpha_i}$.

Далее рассуждаем, как в доказательстве теоремы 2. $\square$

Теорема 5. *Пусть $f, g \in F[x]$ — унитарные многочлены одной и той же степени n, f сепарабелен и $f = \prod\limits_{i<n}(x-\alpha_i)$ — разложение f над $\widetilde{F}$. Пусть $\varepsilon \geq \varkappa_f$ и $\delta \rightleftharpoons \varepsilon + \Delta_f - (n-1)\gamma_f^*$. Если $v(f-g) > \delta$, то g сепарабелен и существует (единственная) нумерация $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ всех корней многочлена g такая, что $v(\alpha_i - \beta_i) > \varepsilon$, $i < n$.*

Поскольку

$$\delta \geq \varkappa_f - (n-1)\gamma_f^* + \Delta_f = \varkappa_f + \Delta_f - (n-1)\gamma_f^* \geq \sigma_f - (n-1)\gamma_f^* = \sigma_f^*,$$

по теореме 4 g сепарабелен и существует (единственная) нумерация $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ всех корней многочлена g такая, что $v(\alpha_i - \beta_i) > \varkappa_{f,\alpha_i} = \varkappa_{g,\beta_i}$, $i < n$. Из доказательства теоремы 4 также следует, что справедливы равенства $vg(\alpha_i) = v(\alpha_i - \beta_i) + vf'(\alpha_i)$, $i < n$.

Оценивая $g(\alpha_i)$, как в доказательстве теоремы 4, получим неравенство

$$vg(\alpha_i) > \delta + (n-1)\gamma_f^* = \varepsilon + \Delta_f - (n-1)\gamma_f^* + (n-1)\gamma_f^* = \varepsilon + \Delta_f \geq \varepsilon + vf'(\alpha_i),$$

и тогда

$$v(\alpha_i - \beta_i) = vg(\alpha_i) - vf'(\alpha_i) > \varepsilon + vf'(\alpha_i) - vf'(\alpha_i) = \varepsilon. \quad \square$$

Покажем, что условие на δ в этой теореме лучше (вообще говоря), чем условие на δ в теореме 2.4.7 из [3]. Там для $\varepsilon \geq \varkappa_f$ в качестве δ_* предлагается взять $\max\{n\varepsilon, n(\varepsilon - \gamma_f)\}$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $\gamma_f \geq 0$ (тогда $\gamma_f^* = 0$).

Это равносильно тому, что $f \in R[x]$. Отсюда $\varkappa_f \geq 0$ и $\varepsilon \geq \varkappa_f$ влечет, что $n\varepsilon \geq n(\varepsilon - \gamma_f)$. В этом случае $\delta_* = n\varepsilon = \varepsilon + (n-1)\varepsilon \geq \varepsilon + (n-1)\varkappa_f \geq \varepsilon + \Delta_f$. Заметим, что неравенство $\Delta_f \leq (n-1)\varkappa_f$ имеет место всегда: пусть α_0 таков, что $\Delta_f = vf'(\alpha_0)$, тогда

$$\Delta_f = vf'(\alpha_0) = \sum_{i=1}^{n-1} v(\alpha_0 - \alpha_i) \leq (n-1)\varkappa_f \quad (\varkappa_f = \max\{v(\alpha_i - \alpha_j) \mid i \neq j\}).$$

Так как $\gamma_f \geq 0$ влечет, что $\gamma_f^* = 0$, то $\delta = \varepsilon + \Delta_f$ и $\delta_* \geq \delta$.

Случай 2. $\gamma_f < 0$ (тогда $\gamma_f^* = \gamma_f$).

Так как $\varkappa_f = \max\{v(\alpha_i - \alpha_j) \mid i \neq j\} \geq \gamma_f$, то $\varepsilon - \gamma_f \geq \varkappa_f - \gamma_f \geq 0$, $n(\varepsilon - \gamma_f) \geq 0$; и в любом случае ($\varepsilon < 0$, $\varepsilon \geq 0$) будет $n(\varepsilon - \gamma_f) > n\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}\delta_* = n(\varepsilon - \gamma_f) = n\varepsilon - n\gamma_f = \varepsilon + (n-1)\varepsilon - n\gamma_f^* \\ > \varepsilon + (n-1)\varkappa_f - (n-1)\gamma_f^* \geq \varepsilon + \Delta_f - (n-1)\gamma_f^* = \delta.\end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $f = x^n + a_0 x^{n-1} + \dots + a_n$ — унитарный, но, может быть, не сепарабельный, а $g = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$ — произвольный многочлены. Установим сначала следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \Gamma$) и $v(f-g) > n\varepsilon - 2nvf$. Тогда для любого корня $\alpha \in \widetilde{F}$ многочлена f существует корень $\beta \in \widetilde{F}$ многочлена g такой, что $v(\alpha - \beta) > \varepsilon - vf$ и $v(f_0 - g_0) > \varepsilon$, где $f_0 \rightleftharpoons f(x-\alpha)^{-1}$, $g_0 \rightleftharpoons g(x-\beta)^{-1}$.*

Заметим, что справедливы неравенства $vf \leq v\alpha$ и $vf \leq 0$.

Оценим $vg(\alpha)$:

$$vg(\alpha) = v(g(\alpha) - f(\alpha)) = v\Big(\sum_{i<n}(b_i - a_i)\alpha^{n-i}\Big) \geq \min\{v(b_i - a_i) + (n-i)v(\alpha) \mid i < n\};$$

$$v(b_i - a_i) + (n-i)v\alpha > n\varepsilon - 2nvf + (n-i)v\alpha \geq n\varepsilon - 2nvf + (n-1)vf \geq n\varepsilon - nvf, \; i < n.$$

Отсюда $vg(\alpha) > n\varepsilon - nvf$.

Пусть $g = b_0 \prod\limits_{i<n} (x - \beta_i)$ — разложение g над $\widetilde{F}$. Тогда

$$vg(\alpha) = vb_0 + \sum_{i<n} v(\alpha - \beta_i).$$

Условие $v(a_0 - b_0) = v(1 - b_0) > n\varepsilon - 2nvf \geq 0$ влечет, что $v(b_0) = 0$. Если $v(\alpha - \beta_i) \leq \varepsilon - vf$ для всех $i < n$, то $vg(\alpha) \leq n\varepsilon - nvf$; но $vg(\alpha) > n\varepsilon - nvf$; следовательно, существует $i < n$ такое, что для $\beta = \beta_i$ имеет место $v(\alpha - \beta) > \varepsilon - vf$.

Оценим $v(f_0 - g_0)$:

$$v(f_0 - g_0) = v\left(\frac{f}{x-\alpha} - \frac{g}{x-\beta}\right) = v\left(\frac{f}{x-\alpha} - \frac{f}{x-\beta} + \frac{f}{x-\beta} - \frac{g}{x-\beta}\right);$$

$$v\left(\frac{f}{x-\alpha} - \frac{f}{x-\beta}\right) = vf + v\left(\frac{\alpha-\beta}{(x-\alpha)(x-\beta)}\right) \geq vf + v(\alpha - \beta),$$

так как $v\big(\frac{1}{x-\alpha}\big), v\big(\frac{1}{x-\beta}\big) \geq 0$. Но $vf + v(\alpha - \beta) > vf + \varepsilon - vf = \varepsilon$. Итак,

$$v\left(\frac{f}{x-\alpha} - \frac{f}{x-\beta}\right) > \varepsilon,$$

$$v\left(\frac{f}{x-\beta} - \frac{g}{x-\beta}\right) = v(f-g) - v(x-\beta) \geq v(f-g) > n\varepsilon - 2nvf \geq \varepsilon.$$

Отсюда $v(f_0 - g_0) > \varepsilon$. $\square$

Теорема 6. *Пусть $\varepsilon > 0$, $f \in F[x]$ — унитарный многочлен степени n, $g \in F[x]$ — произвольный многочлен степени n и $v(f - g) > n!\varepsilon - (n+1)!vf$. Если $f = \prod\limits_{i<n} (x - \alpha_i)$ — разложение f над $\widetilde{F}$, то существует разложение $g = b_0 \cdot \prod\limits_{i<n} (x - \beta_i)$ над $\widetilde{F}$ такое, что $v(\alpha_i - \beta_i) > \varepsilon$ для $i < n$.*

Пусть $n = 1$, $f = x - \alpha_0$, $g = b_0(x - \beta_0)$ и $v(f - g) > \varepsilon - vf$. Покажем, что $v(\alpha_0 - \beta_0) > \varepsilon$. Условие $v(1 - b_0) > \varepsilon - vf \geq \varepsilon > 0$ влечет $vb_0 = 0$.

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $vf < 0$ (тогда $vf = v\alpha_0 < 0$).

Условия $v(\alpha_0 - b_0\beta_0) > \varepsilon - vf > 0$ и $v(\alpha_0) < 0$ влекут, что $v(\beta_0) = v(b_0\beta_0) = v(\alpha_0)$. Далее,

$$v(\alpha_0 - \beta_0) = v(\alpha_0 - b_0\beta_0 + b_0\beta_0 - \beta_0);$$

$$v(b_0\beta_0 - \beta_0) = v\beta_0 + v(b_0 - 1) = v\alpha_0 + v(b_0 - 1) > vf + \varepsilon - vf = \varepsilon;$$

$$v(\alpha_0 - \beta_0) > \varepsilon - vf \geq \varepsilon.$$

Отсюда $v(\alpha_0 - \beta_0) > \varepsilon$.

Случай 2. $vf = 0$ (тогда $v\alpha_0 \geq 0$).

Имеем

$$v(\alpha_0 - \beta_0) = v(\alpha_0 - b_0\beta_0 + b_0\beta_0 - \beta_0); \quad v(\alpha_0 - b_0\beta_0) > \varepsilon;$$

$$v(b_0\beta_0 - \beta_0) = v\beta_0 + v(b_0 - 1) > v\beta_0 + \varepsilon.$$

Так как $v(\alpha_0) \geq 0$, $v(\alpha_0 - b_0\beta_0) > \varepsilon > 0$, то $0 \leq v(b_0\beta_0) = v(b_0) + v(\beta_0) = v(\beta_0)$. Тогда $v(b_0\beta_0 - \beta_0) > \varepsilon$ и $v(\alpha_0 - \beta_0) > \varepsilon$.

Пусть $n = 2$, $v(f - g) > 2!\varepsilon - 3!vf = 2(\varepsilon - vf) - 4vf$.

Пусть $\alpha_0 \in \widetilde{F}$ — произвольный корень f. По лемме найдется корень $\beta_0 \in \widetilde{F}$ многочлена g такой, что $v(\alpha_0 - \beta_0) > (\varepsilon - vf) - vf = \varepsilon - 2vf \geq \varepsilon$ и $v(f_0 - g_0) > \varepsilon - vf \geq \varepsilon - vf_0$ (так как $vf_0 = v(f(x-\alpha_0)^{-1}) = vf - v(x - \alpha_0) \geq vf$).

Случай $n = 1$ показывает, что $v(f_0 - g_0) > \varepsilon - vf_0$ влечет $v(\alpha_1 - \beta_1) > \varepsilon$, где $f_0 = x - \alpha_1$, $g_0 = b_0(x - \beta_1)$.

Пусть $n > 2$,

$$v(f-g) > n!\varepsilon - (n+1)!vf = n((n-1)!\varepsilon - n!vf) - n!vf \geq n((n-1)!\varepsilon - n!vf) - 2nvf$$

(так как $n > 2$ влечет, что $n! \geq n(n-1) \geq 2n$). Тогда по лемме для произвольного корня $\alpha_0 \in \widetilde{F}$ многочлена f найдется корень $\beta_0 \in \widetilde{F}$ многочлена g такой, что

$$v(\alpha_0 - \beta_0) > ((n-1)!\varepsilon - n!vf) - vf > \varepsilon,$$

$$v(f_0 - g_0) > (n-1)!\varepsilon - n!vf \geq (n-1)!\varepsilon - n!vf_0.$$

Теперь можно применить индукцию для многочленов f_0 и g_0 и для разложения $f_0 = \prod\limits_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i)$ найти разложение $g_0 = b_0 \prod\limits_{i=1}^{n-1} (x - \beta_i)$ такое, что $v(\alpha_i - \beta_i) > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n-1$. $\square$

Рассмотрение произвольных многочленов $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, a_0 \neq 0$, и $g = b_0x^n + \dots + b_n$ может быть сведено к рассмотрению случая, когда f унитарен.

Переформулируем теорему 6 в этом общем случае.

Теорема 6′. *Пусть $\varepsilon > 0$; f и g — многочлены степени n ($a_0 \neq 0$) и*

$$v(f-g) > n!\varepsilon - (n+1)!(vf - va_0) + v(a_0).$$

Если $f = a_0 \prod\limits_{i<n} (x - \alpha_i)$ — разложение f над $\widetilde{F}$, то существует разложение $g = b_0 \prod\limits_{i<n} (x - \beta_i)$ многочлена g над $\widetilde{F}$ такое, что $v(\alpha_i - \beta_i) > \varepsilon$ для всех $i < n$. $\square$

Замечание. В теореме 7.4.9 из [4] вместо величины $\delta \rightleftharpoons n!\varepsilon - (n+1)!(vf - va_0) + va_0$ указана величина $\delta_* \rightleftharpoons n^n\varepsilon - 3n^n(vf - va_0) + va_0$. Замечая, что $n! \leq n^{n-1}$ и $vf - va_0 \leq 0$, видим, что $\delta < \delta_*$ (за исключением случая $n = 1$ и $vf - va_0 = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Расширения Любина — Тейта (элементарный подход) // Изв. РАН. Сер. мат. (В печати).
2. *Ершов Ю. Л.* Кратно нормированные поля. Новосибирск: Научная книга, 2000.
3. *Engler A. J., Prestel A.* Valued fields. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2005.
4. *Kuhlmann F.-V.* Valuation theory of fields, Abelian groups and modules. Heidelberg: Univ. Heidelberg, 1994. (Habilitationsschrift).
5. *Brink D.* New light on Hensel′s lemma. Copenhagen Univ., Denmark, 2005. (Preprint).

Статья поступила 10 апреля 2006 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru