Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.21

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ СТАТИСТИК МИЗЕСА, ПОСТРОЕННЫХ ПО ЗАВИСИМЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

И. С. Борисов, А. А. Быстров

Аннотация: Исследовано предельное поведение нормированных статистик Мизеса произвольной размерности с вырожденными (каноническими) ядрами, заданных на выборках растущего объема из последовательности стационарно связанных наблюдений с условием ψ-перемешивания. Соответствующие предельные распределения описываются в виде кратных стохастических интегралов от указанных ядер по стохастическим элементарным продакт-мерам (шумам), порожденным центрированными гауссовскими процессами с неортогональными приращениями.

Ключевые слова: предельные теоремы, стохастический интеграл, кратный стохастический интеграл, элементарная стохастическая мера, гауссовские процессы, стационарные последовательности случайных величин, перемешивание, U- и V-статистики.

Нашему Учителю
академику Александру Алексеевичу Боровкову
посвящается

1. Формулировка основных результатов

В работе исследуется предельное поведение вырожденных статистик Мизеса, построенных по стационарно связанным наблюдениям с условием ψ-перемешивания. Метод основан на представлении вырожденных статистик Мизеса в виде кратных стохастических интегралов по соответствующей эмпирической продакт-мере, а также на результатах статьи [1], обеспечивающих задание соответствующих предельных распределений в виде кратных стохастических интегралов от неслучайных ядер по гауссовским шумам, которые являются в известном смысле предельными для упомянутых выше эмпирических мер.

Пусть $\{X_i;\, i \in \mathbf{Z}\}$ — стационарная (в узком смысле) последовательность случайных величин со значениями в произвольном измеримом пространстве $\{\mathfrak{X}, \mathscr{A}\}$ и маргинальным распределением P. Рассмотрим измеримую функцию $f(t_1, \dots, t_d) : \mathfrak{X}^d \to \mathbf{R}$. Определим статистику *Мизеса* (или V-статистику) по формуле

$$V_n := n^{-d/2} \sum_{1 \le i_1, \dots, i_d \le n} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_d}), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06–01–00738 и 05–01–00810), а также гранта INTAS (03–51–5018).

© 2006 Борисов И. С., Быстров А. А.

где $d \geq 2$, индексы суммирования i_k пробегают независимо друг от друга все значения от 1 до n, а функция f удовлетворяет условию вырожденности

$$\mathbf{E}f(t_1, \dots, t_{k-1}, X_k, t_{k+1}, \dots, t_d) = 0 \tag{2}$$

при всех $t_1, \dots, t_d \in \mathfrak{X}$ и $k = 1, \dots, d$. Функция f называется *ядром статистики Мизеса.*

В случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ статистики такого типа изучались с середины прошлого века (обзор литературы и конкретные примеры таких статистик см. в [2]). Впервые предельные теоремы для них были получены в работах Мизеса [3] и Хефдинга [4]. Наряду с V-статистиками изучались близкие к (1) функционалы, так называемые U-статистики:

$$U_n := n^{-d/2} \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_d \leq n} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_d}) \tag{3}$$

или

$$U_n^0 := n^{-d/2} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} f_0(X_{i_1}, \dots, X_{i_d}), \tag{4}$$

причем ядро f_0 в (4) дополнительно предполагается симметричным относительно всех перестановок своих аргументов. Отметим, что для «выравнивания» предельного поведения статистик V_n, U_n и U_n^0 нередко вместо $n^{-d/2}$ в (4) ставят $\left(C_n^d\right)^{-1/2}$.

Основное отличие U-статистик от V-статистик состоит в отсутствии в области суммирования соответствующих кратных сумм в (3) и (4) так называемых *диагональных подпространств*, т. е. отсутствие у ядер кратных индексов суммирования. В широких условиях на распределение $\{X_i\}$ и ядра это отличие оказывается несущественным, поскольку число различных мультииндексов $(i_1, \dots, i_d)$ в вышеприведенных суммах при наличии кратных координат имеет порядок $O(n^l)$, $l < d$, где l — число свободных («несвязанных») координат i_k (или, как говорят, *размерность* диагонального подпространства). Поэтому при соответствующих дополнительных моментных ограничениях на ядро f нетрудно установить эквивалентность по вероятности представлений (1) и (3). Также легко видеть, что формы (3) и (4) записи U-статистик, по сути, эквивалентны: если мы положим в (4)

$$f_0(t_1, \dots, t_d) := \sum f(t_{i_1}, \dots, t_{i_d}),$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $i_1, \dots, i_d$ чисел $1, \dots, d$, то сведем представление (3) к (4).

Если распределение P не содержит атомов, то U-статистики в представлении (4) с точностью до множителя $(d!)^{-1}$ совпадают по распределению с соответствующими статистиками Мизеса с симметричными ядрами, равными нулю на всех диагональных подпространствах $\mathfrak{X}^d$. Это замечание является центральным в предельной теории U-статистик. Отметим также, что любая U-статистика представима в виде конечной линейной комбинации вырожденных U-статистик размерностей от 1 до d — это так называемое *разложение Хефдинга* (подробнее см. [2, 5]), что позволяет сводить к последним асимптотический анализ произвольных U- и V-статистик. Поэтому нередко вырожденные U- и V-статистики и их ядра называются *каноническими.* Несомненное преимущество канонических V-статистик перед U-статистиками заключается в нижеследующем интегральном представлении.

Случайный процесс

$$S_n(B) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} (I(X_i \in B) - P(B)), \quad B \in \mathscr{A},$$

будем называть *эмпирической мерой* (знакопеременной), построенной по наблюдениям $X_1, \ldots, X_n$. Известно (см., например, [2, 6]), что статистика V_n допускает представление в виде d-кратного стохастического интеграла, который задается «потраекторно» как обычный интеграл Лебега от конечной знакопеременной меры (так как «стохастическая» часть $S_n(\cdot)$ — чисто атомарная мера):

$$V_n = \int\limits_{\mathfrak{X}^d} f(x_1, \ldots, x_d) S_n(dx_1) \ldots S_n(dx_d). \tag{5}$$

Известно (см. [4, 6, 7]), что если случайные величины $\{X_i\}$ независимы и

$$\sum_{1 \le j_1, \ldots, j_d \le d} \mathbf{E} f^2(X_{j_1}, \ldots, X_{j_d}) < \infty,$$

то слабый предел последовательности V_n описывается в виде кратного стохастического интеграла, совпадающего при некоторых дополнительных условиях (скажем, если распределение P имеет ограниченную плотность) с соответствующим интегралом Винера — Ито (см. [2, 8, 9]):

$$V_n \xrightarrow{d} \int\limits_{\mathfrak{X}^d} f(t_1, \ldots, t_d) W_P(dt_1) \ldots W_P(dt_d) \tag{6}$$

при $n \to \infty$, где символ «$\xrightarrow{d}$» здесь и далее обозначает слабую сходимость соответствующих распределений, $W_P(A)$ — «белый шум» со структурной функцией P, т. е. элементарная ортогональная гауссова стохастическая мера на $\mathscr{A}$ с нулевым средним и ковариацией $\mathbf{E} W_P(A) W_P(B) = P(A \cap B)$. Отметим, что интеграл в (6) без дополнительных условий на ядро нельзя определить в отличие от (5) «потраекторно» с вероятностью 1, так как «белый шум» имеет неограниченную вариацию почти наверное для любых неатомарных распределений P, скажем, в $\mathbf{R}^k$.

Наша цель состоит в доказательстве аналогичных (6) предельных соотношений в случае, когда наблюдения слабо зависимы. В этом направлении для вырожденных U- и V-статистик сделано не так много. Прежде всего упомянем работу [10], в которой доказано, что в случае $d = 2$ для стационарно связанных наблюдений с φ-перемешиванием при некоторых дополнительных ограничениях на $f(x, y)$ и скорость убывания коэффициента перемешивания последовательность статистик вида (3) сходится по распределению к случайной величине

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \bigl(\tau_k^2 - 1\bigr), \tag{7}$$

где $\{\lambda_k\}$ — собственные числа интегрального оператора с ядром f, которые предполагаются суммируемыми, а $\{\tau_k\}$ — гауссова последовательность случайных величин с ковариацией, определяемой как собственными функциями упомянутого интегрального оператора, так и корреляцией элементов последовательности $\{X_i\}$. Отметим, что для независимых $\{X_i\}$ случайные величины $\{\tau_k\}$

будут также независимыми. Как будет следовать из результатов настоящей работы, случайная величина в (7) допускает представление в виде двумерного стохастического интеграла по элементарной стохастической мере, порожденной некоторым гауссовским процессом с неортогональными приращениями. Эти интегралы в рассматриваемой общности были введены в [1]. В случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ аналогичное (7) представление было получено еще в основополагающей работе Мизеса [3]. Позже оно было распространено на статистики произвольной размерности (см. [11]), и, кроме того, была дана иная интерпретация упомянутых предельных законов в виде стохастических интегралов вида (6) (см. [7–9]). На наш взгляд, подобная интерпретация предельного закона более конструктивна, чем представление (7), поскольку исчерпывающий спектральный анализ упомянутого выше интегрального оператора (т. е. описание множества его собственных чисел и функций) возможен только для ядер f из очень узкого класса.

Упомянем также работу [12], в которой исследованы предельные распределения для вырожденных U-статистик от специально построенных наблюдений — детерминированного преобразования стационарно связанных сильно зависимых (т. е. без условий перемешивания) гауссовских величин. Тем самым в рамках достаточно частной конструкции в [12] изучаются совершенно иные эффекты, нежели в настоящей работе. При этом предельные распределения в [12] описаны как детерминированные преобразования классических случайных объектов — кратных стохастических интегралов Винера — Ито.

Наконец, отметим, что нормированный скалярный квадрат суммы слабо зависимых стационарно связанных центрированных случайных величин со значениями в произвольном гильбертовом пространстве также допускает представление (1) при $d = 2$. Этот частный случай исследован достаточно полно (см., например, [13]), и соотношение (6) следует из соответствующей центральной предельной теоремы.

Теперь введем основные ограничения на параметры рассматриваемой задачи, которые всюду в дальнейшем будут предполагаться выполненными. Обозначим через $\mathscr{F}_j^k$ сигма-алгебру событий, порожденную случайными величинами $X_j, \dots, X_k,\ j \le k$. Для $m \ge 1$ определим

$$\psi(m) := \sup\left\{\left|\frac{\mathbf{P}(AB)|}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1\right|;\ A \in \mathscr{F}_{-\infty}^k,\ B \in \mathscr{F}_{k+m}^\infty,\ \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) > 0\right\}. \quad (8)$$

Очевидно, последовательность $\{\psi(m)\}$ не возрастает. Стационарная в узком смысле последовательность случайных величин называется *последовательностью с ψ-перемешиванием*, если $\lim\limits_{m\to\infty} \psi(m) = 0$. Такие условия зависимости исследованы в [14–16]. Заметим, что если последовательность случайных величин удовлетворяет условиям ψ-перемешивания, то она является последовательностью с равномерно сильным (т. е. φ-) перемешиванием.

Отметим также, что, как следует из (8), любые конечномерные распределения последовательности с ψ-перемешиванием будут абсолютно непрерывными относительно соответствующей продакт-меры, порожденной маргинальным распределением. Скажем, если случайная величина X_1 распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$, то пара (X_0, X_m) имеет абсолютно непрерывное распределение на $[0, 1]^2$ с плотностью, ограниченной константой $1 + \psi(m)$. Аналогичное утверждение для любых конечных наборов $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_m}\}$ легко можно получить по индукции.

Основные предположения и обозначения.

I. $\mathfrak{X} = [0,1]$.

II. Стационарная последовательность случайных величин $\{X_i;\ i \in \mathbf{Z}\}$ удовлетворяет условию ψ-перемешивания.

III. Случайная величина X_0 равномерно распределена на отрезке $[0,1]$.

Отметим, что выбор равномерного на $[0,1]$ распределения в качестве маргинального не сужает общности рассмотрения, поскольку любая случайная величина совпадает по распределению с соответствующим квантильным преобразованием от равномерно распределенной на $[0,1]$ случайной величины. Стало быть, после соответствующего преобразования ядра исходной V-статистики мы будем иметь дело с новой V-статистикой от выборки стационарно связанных равномерно распределенных на $[0,1]$ случайных величин.

Обозначим через $F_k(t,s)$ функции совместного распределения пар (X_0, X_k). Как было отмечено, $F_k(t,s)$ имеют плотности (обозначим их через $p_k(t,s)$), которые в силу (8) равномерно ограничены на квадрате $[0,1]^2$. Введем в рассмотрение центрированный гауссовский процесс $Y(t)$ с ковариационной функцией

$$\mathbf{E}Y(t)Y(s) = \min(t,s) - ts + \sum_{k\geq 1}(F_k(t,s) + F_k(s,t) - 2ts), \tag{9}$$

где $t, s \in [0,1]$. Отметим, что определение (8) и условие суммируемости коэффициентов $\psi(k)$ (которое вытекает из нижеследующего условия (15)) обеспечивают абсолютную сходимость функционального ряда в правой части (9) и его равномерную ограниченность на $[0,1]^2$.

Гауссовские процессы с ковариацией (9) возникают как слабые пределы для последовательности классических эмпирических процессов $S_n((-\infty, t))$ при выполнении определенных условий зависимости случайных величин $\{X_k\}$. В частности, данная сходимость будет иметь место, если последовательность $\{X_k\}$ удовлетворяет условию φ-перемешивания (и тем более — ψ-перемешивания) при следующих ограничениях на скорость убывания соответствующего коэффициента (см. [17]):

$$\sum_{k\geq 1}\psi^{1/2}(k) < \infty. \tag{10}$$

Нам понадобится результат из [1], касающийся корректного задания кратных стохастических интегралов по приращениям гауссовских процессов вида $Y(t)$. Введем необходимые обозначения.

Пусть μ — элементарная стохастическая мера (шум), порожденная приращениями введенного выше гауссовского процесса $Y(t)$ на отрезке $[0,1]$:

$$\mu((t, t+\delta]) = Y(t+\delta) - Y(t), \quad \mu([0,\delta]) = Y(\delta) - Y(0).$$

Рассмотрим функциональное пространство

$$S_0 := \Big\{ f : \sum_{1\leq j_1,\dots,j_d\leq d} \mathbf{E}f^2(X^*_{j_1}, \dots, X^*_{j_d}) < \infty \Big\},$$

где $\{X^*_j\}$ — *независимые* равномерно распределенные на $[0,1]$ случайные величины. На этом пространстве введем комбинированную L_2-норму

$$\|f\|^2 := \sum_{1\leq j_1,\dots,j_d\leq d} \mathbf{E}f^2(X^*_{j_1}, \dots, X^*_{j_d}). \tag{11}$$

Заметим, что нормированное функциональное пространство S_0 *вкладывается* в нормированное пространство S, введенное в [1]. Это вытекает из условий I–III и равномерной ограниченности (в силу (8) и условия II) на квадрате $[0,1]^2$ функции

$$b(t,s) := \sum_{k\geq 1} |p_k(t,s) + p_k(s,t) - 2|,$$

играющей ключевую роль при построении соответствующего стохастического интеграла в [1]. Поэтому из [1] сразу следует

Теорема 1. *Пусть $f \in S_0$. Тогда существует последовательность простых функций вида*

$$f_N(x_1,\dots x_d) := \sum_{j_1,\dots,j_d=1}^{N} f_{j_1,\dots,j_d} \prod_{k=1}^{d} I(x_k \in B_{j_k}), \tag{12}$$

сходящаяся при $N \to \infty$ к f в норме (11) *пространства S_0, где при любом $k \leq d$ измеримые* (*по Лебегу*) *подмножества $\{B_{j_k}\}$ образуют разбиение отрезка* $[0,1]$. *Кроме того, последовательность*

$$\eta(f_N) := \sum_{j_1,\dots,j_d=1}^{N} f_{j_1,\dots,j_d} \prod_{k=1}^{d} \mu(B_{j_k}) \tag{13}$$

при $N \to \infty$ сходится в среднеквадратичном к некоторому пределу $\eta(f)$, не зависящему от последовательности f_N.

Случайную величину $\eta(f)$ мы и назовем *d-кратным стохастическим интегралом* от функции f по процессу $Y(t)$:

$$\eta(f) := \int\limits_{\mathfrak{X}^d} f(t_1,\dots,t_d)\, dY(t_1)\dots dY(t_d). \tag{14}$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* I–III, *причем*

$$\Psi(d) := \sum_{k\geq 1} \psi(k) k^{2d-2} < \infty. \tag{15}$$

Тогда для любого $f \in S_0$ при $n \to \infty$

$$V_n \xrightarrow{d} \int\limits_{\mathfrak{X}^d} f(t_1,\dots,t_d) dY(t_1)\dots dY(t_d). \tag{16}$$

2. Доказательство теоремы 2

Прежде всего докажем несколько вспомогательных утверждений. Нам понадобится следующий элементарный факт (см. [2, 15]).

Лемма 1. *Пусть случайная величина ξ измерима относительно $\mathscr{F}_{-\infty}^{k}$, а случайная величина η — относительно $\mathscr{F}_{k+m}^{\infty}$ $(m \geq 1)$, причем $\mathbf{E}|\xi| < \infty$, $\mathbf{E}|\eta| < \infty$. Тогда*

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta| \leq \psi(m)\mathbf{E}|\xi|\mathbf{E}|\eta|. \tag{17}$$

Обозначим $\widetilde{I}_k(A) := I(X_k \in A) - P(A)$, $A \in \mathscr{A}$; здесь и далее маргинальное распределение P — мера Лебега на $[0,1]$.

Лемма 2. *Для любых натуральных q и $l_1, \dots, l_q$, а также для любых попарно несовместных измеримых подмножеств $A_1, \dots, A_q \subseteq [0,1]$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{E}\big|\widetilde{I}_k^{\,l_1}(A_1)\dots\widetilde{I}_k^{\,l_q}(A_q)\big| \le (q+1)P(A_1)\dots P(A_q). \tag{18}$$

Доказательство проведем индукцией по q.

1. Случай $q = 1$. Очевидно,

$$\mathbf{E}\big|\widetilde{I}_k^{\,l_1}(A)\big| \le \mathbf{E}|\widetilde{I}_k(A)| \le 2P(A).$$

2. Пусть теперь неравенство (18) верно для некоторого $q \ge 1$. Докажем, что оно останется верным и для $q+1$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big|\widetilde{I}_k^{\,l_1}(A_1)\dots\widetilde{I}_k^{\,l_{q+1}}(A_{q+1})\big| &\le \mathbf{E}|\widetilde{I}_k(A_1)\dots\widetilde{I}_k(A_{q+1})| \\ &\le \mathbf{E}|\widetilde{I}_k(A_1)\dots\widetilde{I}_k(A_q)I_k(A_{q+1})| + P(A_{q+1})\ \mathbf{E}|\widetilde{I}_k(A_1)\dots\widetilde{I}_k(A_q)| \\ &= \mathbf{E}|(-1)^q P(A_1)\dots P(A_q)I_k(A_{q+1})| + P(A_{q+1})\ \mathbf{E}|\widetilde{I}_k(A_1)\dots\widetilde{I}_k(A_q)| \\ &\le P(A_1)\dots P(A_{q+1}) + P(A_{q+1})(q+1)P(A_1)\dots P(A_q).\end{aligned}$$

Предпоследнее равенство имеет место в силу несовместности $A_1, \dots, A_{q+1}$, а последнее неравенство — в силу индукционного предположения. Таким образом,

$$\mathbf{E}\big|\widetilde{I}_k^{\,l_1}(A_1)\dots\widetilde{I}_k^{\,l_{q+1}}(A_{q+1})\big| \le (q+2)P(A_1)\dots P(A_{q+1}).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $q_1 < \dots < q_s$ — произвольные натуральные числа. Рассмотрим произвольные s наборов измеримых подмножеств единичного отрезка: $\{A_1, \dots A_{q_1}\}, \dots, \{A_{q_{s-1}+1}, \dots A_{q_s}\}$, где внутри каждого набора множества A_i попарно несовместны. Обозначим*

$$\nu_{k_i} := \widetilde{I}_{k_i}^{\,l_{q_{i-1}+1}}(A_{q_{i-1}+1})\dots\widetilde{I}_{k_i}^{\,l_{q_i}}(A_{q_i}).$$

Тогда для любых натуральных $k_1 < \dots < k_s$ и $l_1, \dots, l_{q_1}, \dots, l_{q_s}$ имеет место оценка

$$\mathbf{E}|\nu_{k_1}\dots\nu_{k_s}| \le C(\psi(1), s, q_s)P(A_1)\dots P(A_{q_s}), \tag{19}$$

где постоянная $C(\cdot)$ зависит только от указанных аргументов.

Доказательство. В силу (18) имеем

$$\mathbf{E}|\nu_{k_i}| \le (q_i - q_{i-1} + 1)P(A_{q_{i-1}+1})\dots\mathbf{P}(A_{q_i}).$$

Очевидно, случайные величины ν_{k_i} удовлетворяют условиям ψ-перемешивания. Поэтому, применяя (17), получаем

$$\mathbf{E}|\nu_{k_1}\dots\nu_{k_s}| \le \prod_{j=1}^{s-1}(1+\psi(k_{j+1}-k_j))\mathbf{E}|\nu_{k_1}|\dots\mathbf{E}|\nu_{k_s}| \le C(\psi(1), s, q_s)P(A_1)\dots P(A_{q_s}).$$

Лемма доказана.

Один из решающих фрагментов доказательства основного утверждения — это оценки смешанных моментов вида $\mathbf{E}S_n(A_1)\dots S_n(A_{2d})$.

Лемма 4. *Пусть d — произвольное натуральное число, $l_1, \dots, l_q$ — набор натуральных чисел таких, что $l_1 + \dots + l_q = 2d$, $d \geq 2$, а $A_1, \dots, A_q$ — попарно несовместные измеримые подмножества отрезка $[0, 1]$. Пусть к тому же выполнено условие* (15). *Тогда имеет место оценка*

$$\left|\mathbf{E} S_n^{l_1}(A_1) \dots S_n^{l_q}(A_q)\right| \leq C(d, \Psi(d)) P(A_1) \dots P(A_q), \tag{20}$$

где постоянная $C(\cdot)$ зависит только от указанных аргументов.

Доказательство. Начнем со следующей простой оценки:

$$\left|\mathbf{E} S_n^{l_1}(A_1) \dots S_n^{l_q}(A_q)\right| \leq n^{-d} \sum_{k_1, \dots, k_{2d} \leq n} |\mathbf{E} \widetilde{I}_{k_1}(A_1) \dots \widetilde{I}_{k_{l_1}}(A_1) \dots \widetilde{I}_{k_{2d-l_q+1}}(A_q) \dots \widetilde{I}_{k_{2d}}(A_q)|,$$

где индексы суммирования k_i независимо друг от друга пробегают все значения от 1 до n. Сумму в правой части этого неравенства можно оценить сверху конечной суммой «диагональных» подсумм вида

$$\sum_{k_1 < \dots < k_r \leq n} |\mathbf{E} \nu_{k_1} \dots \nu_{k_r}|. \tag{21}$$

Здесь $\nu_{k_i} := \widetilde{I}_{k_i}^{\,s_1(i)}(A_1) \dots \widetilde{I}_{k_i}^{\,s_q(i)}(A_q)$, где целые числа $s_j(i)$ определяются соответствующим «диагональным подпространством» индексов суммирования в исходной кратной сумме и удовлетворяют условиям $0 \leq s_j(i) \leq l_j$ для всех $i \leq r$ и $j \leq q$, а также $\sum\limits_{i \leq r} \sum\limits_{j \leq q} s_j(i) = 2d$.

Пусть $r \leq d$. Тогда, оценивая каждое слагаемое в (21) при помощи (19) и учитывая нормировку n^{-d} и порядок $O(n^r)$ числа слагаемых в сумме (21), получаем требуемую оценку.

Условимся, что в дальнейшем мы не будем фиксировать достаточно очевидную зависимость постоянных C или C_i от параметров задачи, как, скажем, в лемме 3. При этом индексы будут использоваться лишь при необходимости подчеркнуть различие тех или иных постоянных. Отметим только, что с учетом монотонности функции $\Psi(\cdot)$ можно утверждать, что итоговая постоянная зависит только от величин d и $\Psi(d)$.

Пусть теперь $r > d$. Условимся называть случайную величину ν_{k_i} *коротким блоком*, если $\sum\limits_{j \leq q} s_j(i) = 1$, т. е. $\nu_{k_i} = \widetilde{I}_{k_i}(A_{q_i})$ для некоторого $q_i \leq q$. Заметим, что если ν_{k_i} — короткий блок, то $\mathbf{E}\nu_{k_i} = 0$. Рассмотрим вспомогательную для оценки суммы (21) подсумму вида

$$\sum_{k_{v_1} < \dots < k_{v_2} \leq n} |\mathbf{E} \nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_{v_2}}|, \tag{22}$$

здесь $1 \leq v_1 < v_2 \leq r$, при этом $v := v_2 - v_1 + 1$ — кратность соответствующей подсуммы, а блоки ν_{k_i} определены в (21). Введем обозначение $e_j(i) := \min\{1, s_j(i)\}$. Сначала докажем следующее утверждение: если в слагаемых этой подсуммы имеется хотя бы m коротких блоков, где $0 \leq m \leq v$, то справедлива оценка

$$\sum_{k_{v_1} < \dots < k_{v_2} \leq n} |\mathbf{E} \nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_{v_2}}| \leq C n^{v - m/2} \prod_{j \leq q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1, v_2)}, \tag{23}$$

где $\alpha_j(v_1, v_2) := \sum\limits_{i=v_1}^{v_2} e_j(i)$. Заметим, что функция множества $\alpha_j(a, b)$ аддитивна на интервалах $[a, b]$.

Докажем оценку (23) индукцией по m при всех v_1 и v_2 таких, что $v \geq m$ и $v \leq r$.

Пусть $m = 1$, т. е. моменты в (22) содержат хотя бы один короткий блок. Обозначим его через ν_{k_l}, где $k_{v_1} \leq k_l \leq k_{v_2}$. Заметим, что с помощью введенных обозначений мы можем переформулировать утверждение леммы 3 для каждого слагаемого в сумме (22) следующим образом:

$$\mathbf{E}|\nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_{v_2}}| \leq C \prod_{j \leq q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)}.$$

Принимая во внимание это замечание, с помощью (17) и (19) оценим каждое слагаемое в (22), положив в (17) $\xi := \nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_l}$ и $\eta := \nu_{k_{l+1}} \dots \nu_{k_{v_2}}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_{v_1} < \dots < k_{v_2} \leq n} |\mathbf{E}\nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_{v_2}}| \\
&\quad \leq \sum_{k_{v_1} < \dots < k_{v_2} \leq n} \psi(k_{l+1} - k_l)\mathbf{E}|\nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_l}|\mathbf{E}|\nu_{k_{l+1}} \dots \nu_{k_{v_2}}| \\
&\quad + \sum_{k_{v_1} < \dots < k_l \leq n} |\mathbf{E}\nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_l}| \sum_{k_{l+1} < \dots < k_{v_2} \leq n} \mathbf{E}|\nu_{k_{l+1}} \dots \nu_{k_{v_2}}| \\
&\quad \leq C_1 n^{v-1} \prod_{j \leq q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)} \sum_{i \geq 1} \psi(i) \\
&+ C_2 n^{v_2 - l} \prod_{j \leq q} P(A_j)^{\alpha_j(l+1,v_2)} \sum_{k_{v_1} < \dots < k_l \leq n} \psi(k_l - k_{l-1})\mathbf{E}|\nu_{k_1} \dots \nu_{k_{l-1}}|\mathbf{E}|\nu_{k_l}| \\
&\leq (C_3 n^{v-1} + C_4 n^{v_2 - l} n^{l - v_1}) \prod_{j \leq q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)} \leq C_5 n^{v-1/2} \prod_{j \leq q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. В этой цепочке соотношений второе неравенство верно в силу оценки (17) и того факта, что $\mathbf{E}\nu_{k_j} = 0$. База индукции обоснована.

Перейдем к доказательству шага индукции. Пусть неравенство

$$\sum_{k_{v_1} < \dots < k_{v_2} \leq n} |\mathbf{E}\nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_{v_2}}| \leq C n^{v - z/2} \prod_{j \leq q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)}$$

верно для всех минимальных возможных чисел $z < m$ коротких блоков и всех допустимых кратностей v сумм вида (22), а моменты в сумме (22) содержат не менее m коротких блоков. Пусть это блоки $\nu_{k_{j_1}}, \dots, \nu_{k_{j_m}}$. Рассмотрим $m-1$ пар соседних блоков вида $\nu_{k_{j_s}}, \nu_{k_{j_s+1}}$, $s = 1, \dots, m-1$. Обозначим разности между индексами в этих парах через $t_1, \dots, t_{m-1}$. Имеем

$$\sum_{k_{v_1} < \dots < k_{v_2} \leq n} |\mathbf{E}\nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_{v_2}}| \leq R_1 + \dots + R_{m-1},$$

где подсумма R_s берется по множеству индексов

$$I_s := \{(k_{v_1}, \dots, k_{v_2}) : k_{v_1} < \dots < k_{v_2} \leq n,\ t_s = \max t_i\}.$$

В подсумме R_s оценим каждое слагаемое по неравенству (17), положив $\xi := \nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_{j_s}}$ и $\eta := \nu_{k_{j_s+1}} \dots \nu_{k_{v_2}}$:

$$\begin{aligned}
R_s \leq \sum_{I_s} \psi(k_{j_s+1} - k_{j_s})\mathbf{E}|\nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_{j_s}}|\, \mathbf{E}|\nu_{k_{j_s+1}} \dots \nu_{k_{v_2}}| \\
+ \sum_{k_{v_1} < \dots < k_{j_s}} |\mathbf{E}\nu_{k_{v_1}} \dots \nu_{k_{j_s}}| \sum_{k_{j_s+1} < \dots < k_{v_2}} |\mathbf{E}\nu_{k_{j_s+1}} \dots \nu_{k_{v_2}}|. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Рассмотрим первую сумму в правой части (24). В силу (19) имеем

$$\sum_{I_s} \psi(k_{j_s+1}-k_{j_s})\mathbf{E}|\nu_{k_{v_1}}\dots\nu_{k_{j_s}}|\,\mathbf{E}|\nu_{k_{j_s+1}}\dots\nu_{k_{v_2}}| \le C\prod_{j\le q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)}\sum_{I_s}\psi(t_s)$$
$$\le C\prod_{j\le q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)} n^{v-(m-1)}\sum_{t_i:\,t_i\le t_s}\psi(t_s)$$
$$\le C\prod_{j\le q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)} n^{v-m+1}\sum_{k}\psi(k)k^{m-2}$$
$$\le C\Psi(m/2)n^{v-m+1} \le C_1 n^{v-m/2}\prod_{j\le q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)}.$$

Отметим, что последнее неравенство имеет место для всех $m \ge 2$.

Рассмотрим теперь произведение сумм в правой части (24). Пусть слагаемые в первой из этих сумм содержат m_1 выделенных выше коротких блоков (соответственно в слагаемых второй суммы имеется $m-m_1$ выделенных коротких блоков). По построению $1 \le m_1 \le m-1$, так что для обеих сумм мы можем применить индукционное предположение. Имеем

$$\sum_{k_{v_1}<\dots<k_{j_s}} |\mathbf{E}\nu_{k_{v_1}}\dots\nu_{k_{j_s}}| \sum_{k_{j_s+1}<\dots<k_{v_2}} |\mathbf{E}\nu_{k_{j_s+1}}\dots\nu_{k_{v_2}}|$$
$$\le Cn^{j_s-m_1/2}n^{v-j_s-(m-m_1)/2}\prod_{j\le q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)} \le C_1 n^{v-m/2}\prod_{j\le q} P(A_j)^{\alpha_j(v_1,v_2)},$$

что и требовалось доказать. Таким образом, для R_s мы получили требуемую оценку, а значит, и оценку (23) (с другой константой). Проведение индукции закончено.

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что, во-первых, по построению $\alpha_j(1,r) \ge 1$ при всех $j \le q$ и, во-вторых, в слагаемых суммы (21) при $r > d$ с необходимостью имеется не менее чем $2(r-d)$ коротких блоков. Таким образом, положив в (23) $v_1 := 1$, $v_2 := r$, $m := 2(r-d)$ и $v := r$, получим следующую оценку для суммы (21):

$$\sum_{k_1<\dots<k_r\le n} |\mathbf{E}\nu_{k_1}\dots\nu_{k_r}| \le Cn^d\prod_{j\le q} P(A_j)^{\alpha_j(1,r)} \le Cn^d P(A_1)\dots P(A_q).$$

Отсюда немедленно следует оценка (20). Лемма доказана.

Замечание. Утверждение леммы 4 с чуть более жесткими условиями на скорость убывания $\psi(k)$ содержится в [16] (см. также [2]). Однако доказательство там проведено лишь для $d = 2$, при этом в константу C в оценке (20) мультипликативно входит величина $(1+\psi(0))^2$. Нетрудно видеть, что если маргинальное распределение P имеет абсолютно непрерывную компоненту (в нашем случае P — равномерное распределение на отрезке $[0,1]$) или счетное число атомов, то величина $\psi(0)$ не ограничена. Для этого достаточно в определении (8) положить $A = B$, где событие A принадлежит σ-алгебре $\mathscr{F}_0^0$, порожденной одной случайной величиной X_0. Так что при сделанных допущениях относительно P, очевидно,

$$\psi(0) \ge \sup_{A\in\mathscr{F}_0^0,\,P(A)>0} (1/P(A)-1) = \infty.$$

Рассмотрим теперь интегральные суммы для статистик Мизеса (5), построенные по ранее введенным простым функциям f_N:

$$I_N^n := \sum_{j_1,\dots,j_d\le N} f_{j_1,\dots,j_d}\prod_{k=1}^d S_n(B_{j_k}) = \int\limits_{X_d} f_N(x_1,\dots,x_d)\prod_{k=1}^d S_n(dx_k). \qquad (25)$$

Лемма 5. *Пусть простые функции* (12) *приближают f в метрике пространства S_0. Тогда случайные величины* (25) *сходятся в среднеквадратичном к соответствующей статистике Мизеса* (5) *равномерно по n.*

Доказательство. Достаточно установить равномерную по n фундаментальность последовательности $\{I_N^n\}$ при $N\to\infty$.

Обозначим $f_{M,N}(x_1,\dots,x_d) := f_N(x_1,\dots,x_d) - f_M(x_1,\dots,x_d)$. Заметим, что ступенчатые функции $f_N(x_1,\dots,x_d)$ и $f_M(x_1,\dots,x_d)$ можно представить как линейные комбинации индикаторов одних и тех же множеств, причем в количестве, не большем, чем MN. Обозначив эти множества через A_j, а соответствующие значения на них ступенчатой функции $f_{M,N}(x_1,\dots,x_d)$ — через $f^{N,M}_{j_1,\dots,j_d}$, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(I_N^n - I_M^n)^2 &= \mathbf{E}\Bigg(\int\limits_{\mathfrak{X}_d} f_{M,N}(x_1,\dots,x_d)\prod_{k=1}^d S_n(dx_k)\Bigg)^2\\ &= \sum_{j_1,\dots,j_{2d}} f^{N,M}_{j_1,\dots,j_d} f^{N,M}_{j_{d+1},\dots,j_{2d}}\mathbf{E}S_n(A_{j_1})\dots S_n(A_{j_{2d}})\\ &\le C\sum_{i_1,\dots,i_{2d}\le d}\mathbf{E}|f_{M,N}(X^*_{i_1},\dots,X^*_{i_d})f_{M,N}(X^*_{i_{d+1}},\dots,X^*_{i_{2d}})|.\end{aligned}$$

Здесь последнее неравенство следует из (20), поскольку смешанный момент $\mathbf{E}S_n(A_{j_1})\dots S_n(A_{j_{2d}})$ с учетом кратности индексов j_k может быть представлен так же, как и в лемме 4. Остается только воспользоваться неравенством Коши — Буняковского и элементарной оценкой для кратной суммы в правой части предыдущего неравенства, что позволяет получить неравенство

$$\mathbf{E}\big(I_N^n - I_M^n\big)^2 \le C\|f_{M,N}\|^2 = C\|f_M - f_N\|^2.$$

Правая часть этой оценки не зависит от n и стремится к нулю при $M,N\to\infty$, так как по условию теоремы последовательность f_N сходится в метрике S_0, а значит, она фундаментальна. Таким образом, мы доказали среднеквадратическую фундаментальность последовательности $\{I_N^n\}$ равномерно по n, а следовательно, и требуемую среднеквадратическую сходимость интегральных сумм (по эмпирической мере) к соответствующему интегралу — статистике Мизеса вида (5). Лемма доказана.

Лемма 6. *Последовательность случайных величин I_N^n, введенных в* (25), *при $n\to\infty$ сходится по распределению к случайной величине $\eta(f_N)$ в* (13).

Доказательство. Это утверждение является непосредственным следствием многомерной центральной предельной теоремы для конечномерных проекций стандартных эмпирических процессов, построенных по стационарно связанным наблюдениям с φ- или ψ-перемешиванием, которая, в свою очередь, будет следовать из одномерной центральной предельной теоремы для стационарных последовательностей случайных величин и из классического приема Крамера —

Уолда, позволяющего сводить многомерный случай к одномерному (см., например, [15, 17]). Отметим только, что для применимости центральной предельной теоремы для конечномерных распределений эмпирических процессов достаточно потребовать условие
$$\sum_{k\geq 1} \psi^{1/2}(k) < \infty,$$
которое следует из (15) при $d = 2$ в силу неравенства Коши — Буняковского:
$$\sum_{k\geq 1} \psi^{1/2}(k) \leq \sum_{k\geq 1} \psi(k)k^2 \sum_{k\geq 1} k^{-2}.$$
В свою очередь, это условие вместе с леммой 1 обеспечивает выполнение условий теоремы 6 в [15] — центральной предельной теоремы для стационарных последовательностей случайных величин.

Следующее элементарное утверждение, по существу, содержится в [17, теорема 4.2]. Мы приведем его в удобной для наших целей редакции.

Лемма 7. *Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность случайных элементов со значениями в произвольном измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathscr{B})$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Пусть $\mathscr{F} := \{F\}$ — семейство $\mathscr{B}$-измеримых функционалов на $\mathfrak{X}$, для которого $F(\xi_n) \xrightarrow{d} F(\xi)$ при $n \to \infty$. Предположим, что существуют такие скалярные случайные величины $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots$, заданные на $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, что для некоторой последовательности $F_k \in \mathscr{F}$ при $k \to \infty$ имеют место следующие соотношения:*

(a) *$F_k(\xi) \to \eta$ в среднеквадратичном,*

(b) *$F_k(\xi_n) \to \eta_n$ в среднеквадратичном равномерно по n.*

Тогда $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$.

Доказательство теоремы 2. Положим в лемме 7
$$\eta := \eta(f) = \int\limits_{\mathfrak{X}^d} f(t_1, \dots, t_d)\, dY(t_1) \dots dY(t_d), \quad \eta_n := V_n,$$
$$\xi := \mu(\cdot), \quad F_k(\xi) := \eta(f_k), \quad \xi_n := S_n(\cdot), \quad F_k(\xi_n) := I_k^n.$$
Здесь мы рассматриваем в качестве $\mathscr{F}$ класс всех полилинейных преобразований вида (25), которые заданы на множестве всех элементарных стохастических мер. Без ограничения общности можем считать, что все введенные случайные величины заданы на одном вероятностном пространстве (например, можно считать, что случайный процесс $Y(t)$ не зависит от последовательности $\{X_i\}$). Сходимость (a) вытекает из теоремы 1, а сходимость (b) следует из леммы 5. Наконец, слабая сходимость $F(\xi_n) \xrightarrow{d} F(\xi)$ доказана в лемме 6.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Авторы выражают свою глубокую признательность рецензенту за ряд замечаний и пожеланий, которые нашли отражение в окончательном варианте статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисов И. С., Быстров А. А.* Построение стохастического интеграла от неслучайной функции без условия ортогональности интегрирующей меры // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50, № 1. С. 52–80.

2. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Теория U-статистик. Киев: Наук. Думка, 1989.
3. *Von Mises R.* On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions // Ann. Math. Statist. 1947. V. 18. P. 309–348.
4. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution // Ann. Math. Statist. 1948. V. 19, N 3. P. 293–325.
5. *Hoeffding W.* The strong law of large numbers for $\mathscr{U}$-statistics // Inst. Statist. Mimeo Ser. 1961. N 302. P. 1–10.
6. *Борисов И. С., Саханенко Л. А.* Центральная предельная теорема для обобщенных статистик Мизеса с вырожденными ядрами // Мат. тр. 2001. Т. 4, № 1. С. 3–17.
7. *Филиппова А. А.* Теорема Мизеса о предельном поведении функционалов от эмпирических функций распределения и ее статистические применения // Теория вероятностей и ее применения. 1962. Т. 7, № 1. С. 26–60.
8. *Ito K.* Multiple Wiener integral // J. Math. Soc. Jap. 1951. V. 3, N 1. P. 157–169.
9. *Dynkin E. B., Mandelbaum A.* Symmetric statistics, Poisson point processes and multiple Wiener integrals // Ann. Statist. 1983. V. 11, N 3. P. 739–745.
10. *Eagleson G. K.* Orthogonal expansions and U-statistics // Austral. J. Statist. 1979. V. 21, N 3. P. 221–237.
11. *Rubin H., Vitale R. A.* Asymptotic distribution of symmetric statistics // Ann. Statist. 1980. V. 8, N 1. P. 165–170.
12. *Dehling H., Taqqu M. S.* The empirical process of some long-range dependent sequences with an application to U-statistics // Ann. Statist. 1989. V. 17, N 4. P. 1767–1783.
13. *Тихомиров А. Н.* О точности нормальной аппроксимации вероятности попадания в шар суммы слабо зависимых гильбертовозначных случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36, № 4. С. 699–710.
14. *Blum J. R., Hanson D. L., Koopmans L. H.* On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes // Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1963. Bd 2, H. 1. S. 1–11.
15. *Philipp W.* The central limit problem for mixing sequences of random variables // Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1969. Bd 12, H. 2, S. 155–171.
16. *Sen P. K.* Limiting behavior of regular functionals of empirical distributions for stationary *-mixing processes // Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1972. Bd 25, H. 1. S. 71–82.
17. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 3 февраля 2006 г.

Борисов Игорь Семенович, Быстров Александр Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sibam@math.nsc.ru, bystrov@ngs.ru