Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 517.982.27

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА И МАРЦИНКЕВИЧА, «БЛИЗКИХ» К L_∞

С. В. Асташкин, К. В. Лыков

Аннотация: Вводится понятие экстраполяционного симметричного пространства на $[0,1]$. Получены достаточные (являющиеся в ряде случаев необходимыми) условия для того, чтобы пространства Марцинкевича и Лоренца были экстраполяционными. Доказанные результаты, с одной стороны, обобщают и усиливают прежние, а с другой, позволяют определить границы возможности подобного описания пространств, а тем самым и доказательства утверждений, подобных теореме Яно. В частности, приведены примеры пространств, в некотором смысле «близких» к L_∞, но для которых такого описания нет.

Ключевые слова: симметричные пространства, пространства Лоренца, пространства Марцинкевича, экстраполяционные пространства, интерполяция операторов.

Введение

Хорошо известно, что многие важные операторы анализа такие, например, как максимальный оператор Харди — Литтльвуда, сингулярный оператор Гильберта, оператор перехода к сопряженной функции в гармоническом анализе, ограниченно действуют в L_p-пространствах при $1 < p < \infty$, но не ограничены на «концах» этой шкалы — в пространствах L_∞ и L_1 (или хотя бы в одном из них). Это обстоятельство стало одной из причин возникновения экстраполяционных утверждений, первым из которых, видимо, стала классическая теорема Яно (см. [1] или [2, гл. 12, теорема 4.41]). Часть ее, относящуюся к операторам, ограниченным в пространствах, «близких» к L_∞, можно сформулировать следующим образом: если линейный оператор T ограничен в $L_p = L_p[0,1]$ для всех достаточно больших $p < \infty$ и при некотором $\alpha > 0$ имеет место оценка

$$\|Tx\|_{L_p} \le Cp^\alpha \|x\|_{L_p},$$

где $C > 0$ не зависит ни от $x = x(t)$, ни от α, то T ограниченно действует из L_∞ в пространство Зигмунда $\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}$ с нормой

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}} = \sup_{0<t\le 1} \log_2^{-\alpha}\left(\frac{2}{t}\right) x^*(t).$$

Здесь и всюду далее $x^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$.

Следующий важный шаг в развитии теории экстраполяции операторов связан с именами Яверса и Мильмана, которые, разрабатывая общие подходы теории, выявили «источник» теорем типа Яно — существование экстраполяционных конструкций, позволяющих описывать предельные пространства таких теорем [3–5]. В частности, они показали (см., например, [5, с. 22, 23]), что

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^{1/\alpha}} \asymp \sup_{1<p<\infty} (p^{-\alpha}\|x\|_{L_p}). \tag{1}$$

Легко видеть, что теорема Яно — непосредственное следствие (1), а также еще одного элементарного экстраполяционного соотношения

$$\|x\|_{L_\infty} = \sup_{1<p<\infty} \|x\|_{L_p}.$$

Более общие пространства и конструкции рассматривались в работах [6, 7]. В частности, там было получено экстраполяционное описание экспоненциальных пространств Орлича $\operatorname{Exp} L^\Phi$ (Φ — функция Орлича на $(0,\infty)$), состоящих из всех функций $x = x(t)$, $t \in [0,1]$, для которых

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^\Phi} = \inf\left\{ u > 0 : \int\limits_0^1 \left(\exp\Phi\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) - 1 \right) dt \le 1 \right\} < \infty.$$

А именно [7, следствие 1], для произвольной функции Орлича Φ

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^\Phi} \asymp \sup_{1<p<\infty} \frac{\|x\|_{\Phi(p)}}{p}. \tag{2}$$

Будучи обобщением пространств Зигмунда, экспоненциальные пространства Орлича одновременно образуют подкласс симметричных пространств Марцинкевича, играющих важную роль во многих приложениях теории операторов. В связи с этим возник вопрос о возможности экстраполяционного описания симметричных пространств, в частности пространств Марцинкевича и Лоренца. Как выяснилось в последнее время, такое описание интересно не только само по себе. Оно оказалось важным инструментом при изучении сходимости рядов по ортонормированным системам в пространствах, «близких» к L_∞. Отметим в этой связи (ни в коей мере не претендуя на полноту) работы [8–10].

Работа построена следующим образом. В § 1 содержатся основные определения и некоторые предварительные сведения из теории симметричных пространств. Кроме того, здесь вводится определение экстраполяционных («близких» к L_∞) пространств относительно шкалы L_p $(1 < p < \infty)$.

Основные результаты располагаются в § 2 и посвящены экстраполяционному описанию пространств Марцинкевича. Здесь изучаются два варианта такого описания, один из которых универсален в том смысле, что любое экстраполяционное пространство Марцинкевича описывается этим способом. Получены необходимые и достаточные условия, при которых пространство Марцинкевича экстраполяционно, в терминах свойств функции, его порождающей. Эти результаты являются, с одной стороны, далеко идущим обобщением соотношений (1) и (2), а с другой, позволяют определить границы возможности подобного описания пространств, а тем самым и доказательства утверждений, подобных теореме Яно. В частности, приведены примеры пространств, в некотором смысле «близких» к L_∞, но для которых такого описания нет.

В § 3 аналогичные вопросы рассматриваются для пространств Лоренца, которые являются предсопряженными по отношению к пространствам Марцинкевича. Найденные здесь необходимые и достаточные условия для некоторого вполне определенного экстраполяционного описания этих пространств уточняют недавние результаты С. Ф. Лукомского [10], применявшиеся им при изучении сходимости рядов Фурье.

§ 1. Определения и предварительные сведения

Всюду далее вложение одного банахова пространства в другое понимается как непрерывное, т. е. $X_1 \subset X_0$ означает, что из $x \in X_1$ следует: $x \in X_0$ и $\|x\|_{X_0} \le C\|x\|_{X_1}$ для некоторого $C > 0$. Под равенством $X_1 = X_0$ для банаховых пространств будем подразумевать их совпадение с эквивалентностью норм. Выражение вида $F_1 \asymp F_2$ означает, что $cF_1 \le F_2 \le CF_1$ для некоторых $c > 0$ и $C > 0$, причем эти константы не зависят от всех или части аргументов F_1 и F_2.

Обозначим через $\mathscr{F}$ класс непрерывных возрастающих вогнутых функций ψ, определенных на [0,1], таких, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(t) > 0$ $(0 < t \le 1)$. Напомним, что для любой непрерывной квазивогнутой на $[0,1]$ функции $\psi(t)$ (т. е. $\psi(t)$ положительна и возрастает, а $\psi(t)/t$ убывает при $t > 0$) такой, что $\psi(0) = 0$, существует $\varphi \in \mathscr{F}$, для которой $\varphi(t) \asymp \psi(t)$ [11, с. 70].

В дальнейшем речь будет идти о симметричных (перестановочно инвариантных) функциональных пространствах, подробное изложение теории которых можно найти в монографиях [11–13]. Напомним, что банахово пространство X измеримых функций, определенных на $[0,1]$, называется *симметричным*, если выполнены следующие условия:

а) из того, что $y = y(t) \in X$ и $|x(t)| \le |y(t)|$, следует, что $x = x(t) \in X$ и $\|x\| \le \|y\|$;

б) если $y = y(t) \in X$ и $x^*(t) = y^*(t)$, то $x \in X$ и $\|x\| = \|y\|$ (через $x^*(t)$ обозначена перестановка функции $|x(t)|$, т. е. равноизмеримая с $|x(t)|$ невозрастающая функция).

Важным и наиболее простым примером симметричных пространств являются L_p-пространства $(1 \le p \le \infty)$ с обычной нормой:

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty) \quad \text{и} \quad \|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le 1} |x(t)|.$$

При этом для $p > q$ имеет место вложение (с константой 1) $L_p \subset L_q$. Кроме того, L_∞ является самым узким из всех симметричных пространств на $[0,1]$, и, как уже говорилось во введении, норма произвольной функции $x(t)$ в L_∞ выражается через ее нормы в L_p при $p < \infty$: $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1<p<\infty} \|x\|_p$.

Другие примеры симметричных пространств — пространства Лоренца и Марцинкевича. Пусть $\varphi(t) \in \mathscr{F}$. Пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0<s\le 1} \frac{\varphi(s)}{s} \int_0^s x^*(t)\,dt.$$

В пространстве Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ $(1 \le p < \infty)$ норма определяется следующим образом:

$$\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)} = \left(\int_0^1 (x^*(t))^p\,d\varphi(t)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Важной характеристикой симметричного пространства X является его фундаментальная функция $\phi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X$, где через $\chi_{(0,t)}$ обозначена характеристическая функция (индикатор) интервала $(0,t)$. В частности, $\phi_{M(\varphi)}(t) = \varphi(t)$,

$\phi_{\Lambda_p(\varphi)}(t) = (\varphi(t))^{\frac{1}{p}}$. Кроме того, пространство $\Lambda(\varphi) := \Lambda_1(\varphi)$ — самое узкое, а $M(\varphi)$ — самое широкое из всех симметричных пространств с фундаментальной функцией $\varphi(t)$ [11, с. 160, 162].

Функция растяжения положительной функции $\varphi(t)$, $t \in (0,1]$, определяется соотношением

$$\mathscr{M}_\varphi(s) = \sup_{0<t\le\min(1,1/s)} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}, \quad 0 < s < \infty.$$

При этом числа

$$\gamma_\varphi = \lim_{s\to 0+} \frac{\ln \mathscr{M}_\varphi(s)}{\ln s} \quad \text{и} \quad \delta_\varphi = \lim_{s\to\infty} \frac{\ln \mathscr{M}_\varphi(s)}{\ln s}$$

называются *нижним* и *верхним показателями растяжения* функции $\varphi(t)$. Если $\varphi \in \mathscr{F}$, то $0 \le \gamma_\varphi \le \delta_\varphi \le 1$ [11, с. 76].

В дальнейшем наш интерес будет связан с симметричными пространствами X такими, что $X \subset L_p$ для всех $p < \infty$. В частности, мы рассмотрим вопрос о том, когда норма в них выражается через L_p-нормы. Более того, есть возможность самим конструировать симметричные пространства указанного вида. А именно, если F — банахово идеальное пространство функций, определенных на $[1,\infty)$, то можно рассмотреть множество $\mathscr{L}_F$ всех функций $x(t)$, для которых $\xi = \xi(p) := \|x\|_p \in F$. Несложно показать, что это множество (с обычным отождествлением функций, равных почти всюду) становится симметричным пространством, если в нем определить норму:

$$\|x\|_{\mathscr{L}_F} := \|\xi\|_F.$$

Вместо пространства функций в качестве параметра экстраполяционного пространства можно брать также банахово идеальное пространство последовательностей, требуя, чтобы ему принадлежала последовательность $\{\|x\|_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 1. Пусть X — симметричное пространство на $[0,1]$ такое, что $X \subset L_p$ для всех $p < \infty$. Будем говорить, что это пространство *экстраполяционно* (при $p \to \infty$), если существует банахово идеальное пространство F, для которого $X = \mathscr{L}_F$. Множество всех экстраполяционных пространств будем обозначать через $\mathscr{E}$.

Если F — банахово идеальное пространство функций, определенных на $[1,\infty)$, а $w = w(p)$ — положительная функция (вес), то через $F(w)$ будем обозначать идеальное пространство функций $x = x(t)$ с нормой $\|x\|_{F(w)} = \|xw\|_F$. Аналогичное определение применяется и для пространств последовательностей.

§ 2. Экстраполяционное описание пространств Марцинкевича

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о том, когда пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ совпадает с пространством вида $\mathscr{L}_F$, т. е. когда оно экстраполяционно.

Пусть $\varphi(t) \in \mathscr{F}$, $\widetilde{\varphi}(t) = t/\varphi(t)$. В случае $\lim\limits_{t\to 0+} \widetilde{\varphi}(t) > 0$ можно считать, что $\varphi(t) = t$, а тогда $M(\varphi) = L_1$. Иначе функция $\widetilde{\varphi}$ абсолютно непрерывна [11, с. 71] и поэтому существует производная $\widetilde{\varphi}'$. Предположим, что

$$\lim_{t\to 0+} \widetilde{\varphi}(t) = 0 \text{ и } \widetilde{\varphi}' \in L_p \quad \text{для всех } p < \infty. \tag{3}$$

Из определения нормы в пространстве Марцинкевича следует, что

$$\int_0^s x^*(t)\,dt \le \|x\|_{M(\varphi)} \int_0^s \widetilde{\varphi}'(t)\,dt, \quad 0 < s \le 1.$$

Но это — неравенство между $\mathscr{K}$-функционалами функций $x(t)$ и $\widetilde{\varphi}'(t)$ в паре пространств (L_1, L_∞) (см., например, [11, с. 108]). Поэтому, так как L_p интерполяционно относительно пары (L_1, L_∞) с константой 1, применяя [11, с. 130], заключаем, что $x \in L_p$ для всех $1 \le p < \infty$ и

$$\|x\|_p \le \|x\|_{M(\varphi)} \|\widetilde{\varphi}'\|_p, \quad 1 \le p < \infty,$$

или

$$\sup_{p \ge 1} \frac{\|x\|_p}{\|\widetilde{\varphi}'\|_p} \le \|x\|_{M(\varphi)}.$$

Последнее неравенство означает, что

$$M(\varphi) \subset \mathscr{L}_{F^\varphi}, \tag{4}$$

где $F^\varphi = L_\infty(1/\|\widetilde{\varphi}'\|_p)$, причем константа вложения (4) равна 1.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \mathscr{F}$. Следующие условия эквивалентны:*
1) $M(\varphi) \in \mathscr{E}$;
2) $M(\varphi) = \mathscr{L}_{F^\varphi}$;
3) *существует $C > 0$ такое, что*

$$\varphi(t) \le C \sup_{p \ge 1} \frac{t^{\frac{1}{p}}}{\|\widetilde{\varphi}'\|_p}, \quad 0 < t \le 1. \tag{5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что соотношения (3) являются следствием каждого из условий 1–3 (в частности, в случае 1 и 2 они вытекают из определения экстраполяционного пространства). Поэтому во всех трех случаях можно считать выполненным вложение (4). Далее, легко видеть, что (5) — это неравенство между фундаментальными функциями пространств $M(\varphi)$ и $\mathscr{L}_{F^\varphi}$. Так как пространство $M(\varphi)$ — самое широкое среди всех симметричных пространств с данной фундаментальной функцией [11, с. 162], то (5) равносильно вложению $\mathscr{L}_{F^\varphi} \subset M(\varphi)$. Следовательно, ввиду предыдущего замечания оно выполнено тогда и только тогда, когда $M(\varphi) = \mathscr{L}_{F^\varphi}$. Тем самым условия 2 и 3 эквивалентны.

Так как импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна, остается доказать обратное утверждение. Пусть существует банахово идеальное пространство F_1 такое, что $M(\varphi) = \mathscr{L}_{F_1}$. Если $a = a(p) \in F^\varphi$, то $|a(p)| \le \|a\|_{F^\varphi} \|\widetilde{\varphi}'\|_p$, $p < \infty$. Так как $\widetilde{\varphi}' \in M(\varphi)$, то функция $b = b(p) = \|\widetilde{\varphi}'\|_p$ принадлежит F_1 и, следовательно (так как F_1 — идеальное пространство), из неравенства $|a(p)| \le \|a\|_{F^\varphi} b(p)$ получаем $a \in F_1$ и $\|a\|_{F_1} \le \|a\|_{F^\varphi} \|b\|_{F_1}$, откуда $F^\varphi \subset F_1$. Тем самым $\mathscr{L}_{F^\varphi} \subset \mathscr{L}_{F_1} = M(\varphi)$. Так как противоположное вложению (4) верно всегда, теорема доказана. $\square$

Предположим теперь, что верхний показатель растяжения функции φ нетривиален, т. е. $\delta_\varphi < 1$. Тогда ввиду [11, с. 156]

$$\|x\|_{M(\varphi)} \asymp \sup_{0 < u \le 1} \varphi(u) x^*(u),$$

откуда, используя монотонность $x^*(t)$ и квазивогнутость $\varphi(t)$, получаем

$$\|x\|_{M(\varphi)} \asymp \sup_{p\geq 1} \varphi(2^{-p})x^*(2^{-p}). \tag{6}$$

В этом случае $x_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \in M(\varphi)$. Поэтому из вложения (4) и неравенства $\widetilde{\varphi}' \leq \frac{1}{\varphi}$ следует, что

$$\|1/\varphi\|_p \asymp \|\widetilde{\varphi}'\|_p$$

с константами, не зависящими от $p \in [1, \infty)$. Следовательно, условие (5) из теоремы 1 при $\delta_\varphi < 1$ можно заменить условием

$$\varphi(t) \leq C \sup_{p\geq 1} \frac{t^{1/p}}{\|1/\varphi\|_p}, \quad 0 < t \leq 1. \tag{7}$$

Следствие 1. *Пусть $\varphi \in \mathscr{F}$ такова, что $\delta_\varphi < 1$. Тогда $M(\varphi) \in \mathscr{E}$ в том и только в том случае, если*

$$\sup_{t\in(0;1]} \left\{ \inf_{p\geq 1} \left(\int_0^{1/t} \left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(st)} \right)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty.$$

Доказательство. Так как в условиях следствия неравенства (5) и (7) равносильны, по теореме 1 $M(\varphi) \in \mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{t\in(0;1]} \left\{ \inf_{p\geq 1} \left(\varphi(t) \left(\frac{1}{t} \int_0^1 \frac{1}{\varphi(u)^p}\, du \right)^{\frac{1}{p}} \right) \right\} < \infty.$$

После замены $u = st$ получаем утверждение. $\square$

Вложение (4), верное всегда, можно рассматривать как «аппроксимацию» пространства Марцинкевича экстраполяционным пространством сверху. Найдем подобную «аппроксимацию» снизу в случае, когда $\delta_\varphi < 1$. Учитывая, что

$$\|x\|_p \geq \left(\int_0^{2^{-p}} (x^*(t))^p\, dt \right)^{1/p} \geq \frac{1}{2} x^*(2^{-p}),$$

из (6) получаем

$$\|x\|_{M(\varphi)} \leq C \sup_{p\geq 1} \varphi(2^{-p}) \|x\|_p \tag{8}$$

с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от x. Из (8) и (4) следует, что

$$\mathscr{L}_{F_\varphi} \subset M(\varphi) \subset \mathscr{L}_{F^\varphi}, \tag{9}$$

где $F_\varphi = L_\infty(\varphi(2^{-p}))$.

Пространство $M(\varphi)$ будет экстраполяционным, в частности, если $\mathscr{L}_{F_\varphi} = \mathscr{L}_{F^\varphi}$. В то же время, как следует из теоремы 1, для последнего равенства достаточно совпадения пространств $M(\varphi)$ и $\mathscr{L}_{F_\varphi}$. Выясним, при каких условиях это происходит.

Лемма 1. *Если $\delta_\varphi < 1$, то $M(\varphi) = \mathscr{L}_{F_\varphi}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\int_0^1 \frac{dt}{(\varphi(t))^p} \le C^p \frac{1}{(\varphi(2^{-p}))^p}, \quad p \ge 1, \tag{10}$$

с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от p.

Доказательство. Так как $\widetilde{\varphi}' \le \frac{1}{\varphi}$, из (10) вытекает, что

$$\varphi(2^{-p}) \le C_1 \frac{1}{\|\widetilde{\varphi}'\|_p}.$$

Следовательно, $F^\varphi \subset F_\varphi$, откуда $\mathscr{L}_{F^\varphi} \subset \mathscr{L}_{F_\varphi}$. Объединяя это с (9), заключаем, что

$$\mathscr{L}_{F_\varphi} = M(\varphi) = \mathscr{L}_{F^\varphi}.$$

Пусть теперь $M(\varphi) = \mathscr{L}_{F_\varphi}$. Так как в силу (6) $x_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \in M(\varphi)$, из вложения $M(\varphi) \subset \mathscr{L}_{F_\varphi}$ получаем

$$\varphi(2^{-p})\|1/\varphi\|_p \le \sup_{p\ge1} \varphi(2^{-p})\|x_0\|_p \le C_1\|x_0\|_{M(\varphi)} = C.$$

Поскольку последнее равносильно (10), лемма доказана. □

Покажем, что условие (10) эквивалентно некоторому более явному свойству функции φ.

Определение 2. Будем говорить, что функция $\varphi(t) \in \mathscr{F}$ *удовлетворяет Δ^2-условию* ($\varphi \in \Delta^2$), если существует $\alpha > 0$ такое, что для всех $t \in [0,1]$

$$\varphi(t) \le \alpha\varphi(t^2). \tag{11}$$

Лемма 2. *Пусть $\varphi(t) \in \mathscr{F}$. Для того чтобы $\varphi(t)$ удовлетворяла Δ^2-условию, необходимо и достаточно выполнение условия* (10).

Доказательство. Если выполнено (10), то ввиду возрастания $\varphi(t)$ получаем

$$\frac{2^{-2p}}{\varphi(2^{-2p})^p} \le \int_0^{2^{-2p}} \frac{dt}{(\varphi(t))^p} \le \int_0^1 \frac{dt}{(\varphi(t))^p} \le C^p \frac{1}{(\varphi(2^{-p}))^p},$$

откуда для всех $p \ge 1$

$$\varphi(2^{-p}) \le 4C\varphi(2^{-2p}).$$

После замены $2^{-p} = t$ последнее неравенство превращается в условие (11) при $t \le \frac{1}{2}$, а значит, ввиду квазивогнутости $\varphi(t)$ (11) выполняется при всех $t \in [0,1]$ с константой $8C$.

Пусть теперь $\varphi \in \Delta^2$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\varphi(t) \le \alpha^n\varphi(t^{2^n})$ и, в частности, при $t = 2^{-p}$ имеем

$$\varphi(2^{-p}) \le \alpha^n\varphi(2^{-2^n p}), \quad p \ge 0.$$

Выберем теперь $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы для всех $n \ge n_0$ выполнялось неравенство

$$2^n - (n+1)\log_2\alpha \ge n.$$

Тогда если $p \geq 1$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{(\varphi(t))^p} \leq 2^{2^{n_0}p} \int\limits_0^{2^{-2^{n_0}p}} \frac{dt}{(\varphi(t))^p} = 2^{2^{n_0}p} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int\limits_{2^{-2^{n+1}p}}^{2^{-2^n p}} \frac{dt}{(\varphi(t))^p}$$

$$\leq 2^{2^{n_0}p} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{2^{-2^n p}}{(\varphi(2^{-2^{n+1}p}))^p} \leq 2^{2^{n_0}p} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \alpha^{(n+1)p} 2^{-2^n p} \frac{1}{(\varphi(2^{-p}))^p}$$

$$\leq 2^{2^{n_0}p} \frac{1}{(\varphi(2^{-p}))^p} \sum_{n=n_0}^{+\infty} 2^{-np} = 2^{2^{n_0}p} \frac{2^{-n_0 p}}{1-2^{-p}} \frac{1}{(\varphi(2^{-p}))^p} \leq C^p \frac{1}{(\varphi(2^{-p}))^p},$$

где $C = 2^{2^{n_0}}$, и, таким образом, условие (10) выполнено. $\square$

С помощью лемм 1 и 2 нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(t) \in \mathscr{F}$ и $\delta_\varphi < 1$. Следующие условия эквивалентны:*
1) $\varphi \in \Delta^2$;
2) $\varphi(2^{-p}) \asymp 1/\|\widetilde{\varphi}'\|_p$ $(p \geq 1)$;
3) $M(\varphi) = \mathscr{L}_{F_\varphi}$;
4) $M(\varphi) = \mathscr{L}_{f_\varphi}$, где $f_\varphi = l_\infty(\varphi(2^{-n}))$.

Доказательство. Равносильность условий 1–3 следует из лемм 1 и 2, так как неравенство, противоположное (10), выполняется всегда. Ввиду монотонности функции $f_x(p) = \|x\|_p$ $(p \geq 1)$ и квазивогнутости $\varphi(t)$ имеем $\mathscr{L}_{F_\varphi} = \mathscr{L}_{f_\varphi}$, и, значит, каждое из этих условий равносильно 4. $\square$

Из теоремы 2 следует, что для $\varphi \in \Delta^2$ оба вложения в (9) превращаются в равенства. Если же $\varphi(t)$ не удовлетворяет Δ^2-условию, то, по крайней мере при $\delta_\varphi < 1$, вложение $\mathscr{L}_{F_\varphi} \subset M(\varphi)$ становится строгим. Может ли при этом сохраниться равенство $M(\varphi) = \mathscr{L}_{F^\varphi}$? Приведем пример, показывающий, что ответ положителен.

Пример 1. Рассмотрим функцию $\varphi(t) \in \mathscr{F}$ такую, что при некотором $\theta \in (0,1)$

$$\varphi(t) \asymp \psi(t) = e^{1-\ln^\theta e/t}.$$

Такая функция в классе $\mathscr{F}$ действительно существует, так как при $t \in (0, t_0)$ (где t_0 достаточно мало) $\psi(t) > 0$, $\psi'(t) > 0$, $\psi''(t) < 0$ и $\lim\limits_{t\to 0+} \psi(t) = 0$.

Покажем, что $M(\varphi) \in \mathscr{E}$. Несложно убедиться в том, что $\delta_\varphi = 0 < 1$. Поэтому достаточно доказать неравенство (7) с $\varphi(t) = \psi(t)$.

Оценим L_p-норму функции $\frac{1}{\psi}$:

$$\left\|\frac{1}{\psi}\right\|_p^p = \int\limits_0^1 e^{p\ln^\theta e/t - p}\, dt = e^{-p+1} \int\limits_1^{+\infty} e^{ps^\theta - s}\, ds.$$

Представим подынтегральную функцию в виде

$$e^{ps^\theta - s} = e^{ps^\theta - \beta s} e^{-(1-\beta)s},$$

где $\beta \in (0,1)$ — параметр, и найдем максимум функции $f_\beta(s) = ps^\theta - \beta s$. Так как $f'_\beta(s) = \theta p s^{\theta-1} - \beta$, то $s_0 = (\theta p/\beta)^{\frac{1}{1-\theta}}$ — точка максимума $f_\beta(s)$. Следовательно, при $s \in [1,\infty)$ будет $f_\beta(s) \le f_\beta(s_0) = (1-\theta)p^{\frac{1}{1-\theta}}(\theta/\beta)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$ и

$$\left\|\frac{1}{\psi}\right\|_p^p \le e^{-p+1}\exp\left((1-\theta)p^{\frac{1}{1-\theta}}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\right)\int\limits_0^\infty e^{-(1-\beta)s}\,ds$$

$$= e^{-p+1}\exp\left((1-\theta)p^{\frac{1}{1-\theta}}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\right)\frac{1}{1-\beta}.$$

Таким образом,

$$\left\|\frac{1}{\psi}\right\|_p \le \exp\left((1-\theta)\left(\frac{\theta p}{\beta}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\right)\left(\frac{1}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Положим $\beta = \frac{p^\gamma}{1+p^\gamma}$, где $\gamma = \frac{\theta}{1-\theta}$. Тогда для всех $p \ge 1$

$$(1/(1-\beta))^{\frac{1}{p}} = (1+p^\gamma)^{\frac{1}{p}} \le 2p^{\frac{\gamma}{p}} < C < \infty.$$

Кроме того, так как $(1+x)^\gamma \le 1 + C_\gamma x$ для всех $x \in [0,1]$, то

$$(1-\theta)\left(\frac{\theta p}{\beta}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} = \left(\frac{p}{\beta}\right)^\gamma(1-\theta)\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} = p^\gamma\left(1+\frac{1}{p^\gamma}\right)^\gamma(1-\theta)\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} \le (1-\theta)\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}(p^\gamma+C_\gamma)$$

и, следовательно,

$$\|1/\psi\|_p \le C_1\exp((1-\theta)\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}p^{\frac{\theta}{1-\theta}}). \tag{12}$$

Для доказательства (7) проверим, что с константой $C_2 = C_1 e$ для $p = \frac{1}{\theta}\ln^{1-\theta} e/t$ выполняется неравенство

$$\psi(t)\|1/\psi\|_p \le C_2 t^{1/p}.$$

Действительно, с одной стороны, ввиду (12)

$$\psi(t)\|1/\psi\|_p \le C_1\exp((1-\theta)\ln^\theta e/t)\exp(1-\ln^\theta e/t) = C_2\exp(-\theta\ln^\theta e/t).$$

С другой стороны,

$$t^{1/p} = \exp(\ln t/p) = \exp(\theta\ln^{\theta-1} e/t(1-\ln e/t)) \ge \exp(-\theta\ln^\theta e/t).$$

Таким образом, $M(\varphi) \in \mathscr{E}$. В то же время, как легко видеть, $\varphi \notin \Delta^2$.

Для функции $\varphi(t)$ из примера 1 $\delta_\varphi = 0$. То же самое верно и для всех функций, удовлетворяющих Δ^2-условию. В связи с этим возникает вопрос: существует ли пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ такое, что одновременно $M(\varphi) \in \mathscr{E}$ и $\delta_\varphi > 0$? Частичный ответ на него содержится в следующем утверждении.

Предложение 1. *Пусть $M(\varphi) \in \mathscr{E}$. Тогда если $\delta_\varphi < 1$, то $\delta_\varphi = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $\delta_\varphi \in (0,1)$. Тогда $\mathscr{M}_\varphi(s) > s^\theta$ для некоторого $\theta > 0$, если $s > 1$. Следовательно, для любого $s > 1$ существует $t_0 = t_0(s) \in (0, 1/s)$ такое, что

$$\frac{\varphi(st_0)}{\varphi(t_0)} > s^\theta. \tag{13}$$

Так как $\delta_\varphi < 1$, условие $M(\varphi) \in \mathscr{E}$ равносильно выполнению неравенства (7) или, эквивалентно, тому, что

$$\varphi(t) \le C_1 \sup_{p \ge 2/\theta}\frac{t^{1/p}}{\|1/\varphi\|_p}, \quad 0 < t \le 1. \tag{14}$$

Выберем $s > 1$ так, чтобы $s^{\theta/2} > C_1$. Тогда, поскольку для $p \geq 2/\theta$ выполнено $\theta p - 1 \geq \theta p/2$, ввиду (13) для таких p

$$\left\|\frac{1}{\varphi}\right\|_p^p = \int_0^1 \frac{du}{\varphi(u)^p} \geq \int_0^{t_0} \frac{du}{\varphi(u)^p} \geq \frac{t_0}{\varphi(t_0)^p}$$

$$> \frac{s^{\theta p} t_0}{\varphi(st_0)^p} = s^{\theta p - 1} \frac{st_0}{\varphi(st_0)^p} \geq (s^{\theta/2})^p \frac{st_0}{\varphi(st_0)^p}.$$

Отсюда для $t_1 = st_0$ и всех $p \geq 2/\theta$ получаем

$$\varphi(t_1) > C_1 \frac{t_1^{1/p}}{\|1/\varphi\|_p},$$

что противоречит (14). $\square$

Следствие 2. *Для любого $\theta \in (0,1)$ существует функция $\varphi \in \mathscr{F}$ такая, что $\delta_\varphi = \theta$, $M(\varphi) \subset L_p$ для всех $p < \infty$ и $M(\varphi) \notin \mathscr{E}$.*

Доказательство. Начнем с построения функции $c(t) \asymp \frac{1}{\varphi(t)}$, которую будем искать в виде

$$c(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i \chi_{(2^{-i-1};2^{-i}]}(t), \quad \text{где } 1 = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_n \leq \dots.$$

Для того чтобы функция $\psi(t) = \frac{1}{c(t)}$ была эквивалентна некоторой функции $\varphi(t) \in \mathscr{F}$, достаточно потребовать выполнения условий

$$c_i \leq c_{i+1} \leq 2c_i,\ i = 0, 1, \dots, \quad \text{и} \quad c_i \to \infty \text{ при } i \to \infty. \tag{15}$$

Действительно, если (15) выполнено, то $\psi(t)$ возрастает и при $k \geq i$ имеем $c_k \leq 2^{k-i} c_i$, откуда

$$2^k \psi(2^{-k}) \geq 2^i \psi(2^{-i}).$$

Если теперь $t_1 < t_2$, то $t_1 \in [2^{-k-1}, 2^{-k})$, $t_2 \in [2^{-i-1}, 2^{-i})$, $k \geq i$. При этом

$$\frac{\psi(t_2)}{t_2} \leq 2^{i+1}\psi(2^{-i}) \leq 2^{k+1}\psi(2^{-k}) \leq 2^{k+2}\psi(2^{-k-1}) \leq 4\frac{\psi(t_1)}{t_1}.$$

Тем самым функция $\psi(t)$ эквивалентна некоторой вогнутой функции [11, с. 69]. Кроме того, ввиду (15) $\lim\limits_{t\to 0+} \psi(t) = 0$. В итоге $\psi(t) \asymp \varphi(t) \in \mathscr{F}$.

Для того чтобы $M(\varphi)$ было вложено в L_p для всех $p < \infty$, потребуем, чтобы

$$\|1/\varphi\|_p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

или, равносильно,

$$\|c\|_p = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} c_i^p 2^{-i-1}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{16}$$

Выберем теперь $\{c_i\}_{i=0}^{+\infty}$ так, чтобы выполнялись условия (15) и (16) и, кроме того, $\delta_\varphi = \theta \in (0,1)$. Прежде всего, пусть

0) $n_0 = 1$,

1) $n_{2j+1} = 2n_{2j}$, $j = 0, 1, \dots$,

2) $n_{2j+2} = n_{2j+1} + j$, $j = 0, 1, \dots$.

Определим теперь последовательность $\{c_i\}_{i=0}^{+\infty}$ следующим образом:

a) $c_0 = c_1 = 1$;

b) $c_i = c_{n_{2j}}$, если $n_{2j} \le i \le n_{2j+1}$, $j = 0, 1, \dots$;

c) $c_i = c_{n_{2j+1}} 2^{\theta(i - n_{2j+1})}$, если $n_{2j+1} \le i \le n_{2j+2}$, $j = 0, 1, \dots$.

Соотношение (15) вытекает из определения $\{c_i\}_{i=0}^{+\infty}$. Для проверки (16) проведем преобразования:

$$\sum_{i=2}^{+\infty} c_i^p 2^{-i} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=n_{2k}}^{n_{2k+1}-1} 2^{\theta p \sum\limits_{j=1}^{k}(n_{2j}-n_{2j-1})} 2^{-i}$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=n_{2k+1}}^{n_{2k+2}-1} 2^{\theta p \sum\limits_{j=1}^{k}(n_{2j}-n_{2j-1})} 2^{\theta p (i - n_{2k+1})} 2^{-i}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=n_{2k}}^{n_{2k+1}-1} 2^{\theta p \frac{k(k-1)}{2} - i} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=n_{2k+1}}^{n_{2k+2}-1} 2^{\theta p (\frac{k(k-1)}{2} + i - n_{2k+1}) - i}.$$

Ввиду условий 0–2 будет $n_{2k+1} \ge n_{2k} \ge n_{2k-1} \ge 2^k$ при $k > 0$. Поэтому

$$I_1 := \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=n_{2k}}^{n_{2k+1}-1} 2^{\theta p \frac{k(k-1)}{2} - i} \le 2 \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{\theta p \frac{k(k-1)}{2} - n_{2k}} \le 2 \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{\theta p \frac{k(k-1)}{2} - 2^k} < \infty$$

и аналогично

$$I_2 := \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=n_{2k+1}}^{n_{2k+2}-1} 2^{\theta p (\frac{k(k-1)}{2} + i - n_{2k+1}) - i} \le 2 \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{\theta p (\frac{k(k-1)}{2} + k) - 2^k} < \infty.$$

В итоге

$$\sum_{i=2}^{+\infty} c_i^p 2^{-i} = I_1 + I_2 < \infty,$$

поэтому (16) выполнено. Непосредственная проверка показывает, что $\delta_\varphi = \theta$. Следовательно, ввиду предложения 1 $M(\varphi) \notin \mathscr{E}$. $\square$

При доказательстве вложения $M(\varphi) \subset \mathscr{L}_{F^\varphi}$ (см. (4)) ключевую роль играла импликация (где $x = x(t)$ — произвольная измеримая на $[0,1]$ функция)

$$\int_0^t x^*(s)\,ds \le \int_0^t \widetilde{\varphi}'(s)\,ds \text{ для всех } t \in [0,1] \Rightarrow \|x\|_p \le \|\widetilde{\varphi}'\|_p \text{ для всех } p \ge 1.$$

Как легко видеть, обратное вложение $\mathscr{L}_{F^\varphi} \subset M(\varphi)$ имеет место тогда и только тогда, когда справедлива противоположная импликация

$$\|x\|_p \le \|\widetilde{\varphi}'\|_p \text{ для всех } p \ge 1 \Rightarrow \int_0^t x^*(s)\,ds \le C \int_0^t \widetilde{\varphi}'(s)\,ds \text{ для всех } t \in [0,1].$$

Согласно следствию 2 существует $\varphi \in \mathscr{F}$ такая, что $M(\varphi) \subset L_p$ для всех $p < \infty$, но $M(\varphi) \notin \mathscr{E}$, т. е. для такой функции φ последнее неверно. Приведем утверждение, которое уточняет это замечание и одновременно показывает сложности, возникающие при попытках связать между собой интерполяционные и экстраполяционные конструкции.

Предложение 2. *Не существует универсальной константы $C > 0$ такой, что из неравенства*
$$\|x\|_p \le \|y\|_p, \quad p \ge 1,$$
верного для двух функций $x, y \in L_\infty$, следует, что
$$\int\limits_0^t x^*(s)\,ds \le C \int\limits_0^t y^*(s)\,ds, \quad 0 < t \le 1. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, $\varepsilon = \frac{1}{2(n-1)^n}$, $\tau = (2\varepsilon)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1}$. Рассмотрим функции
$$x(t) = \left(1 - \frac{1}{n\varepsilon}t\right)\chi_{[0,n\varepsilon)}(t) \quad \text{и} \quad y(t) = \chi_{[0,\varepsilon)}(t) + \tau\chi_{[\varepsilon,1)}(t).$$
Тогда $\|y\|_p^p = \varepsilon + \tau^p(1-\varepsilon)$, $\|x\|_p^p = \frac{n\varepsilon}{p+1}$ и для всех $p \ge 1$
$$\|x\|_p^p \le \|y\|_p^p. \tag{18}$$
Действительно, последнее неравенство можно переписать так:
$$\frac{n\varepsilon}{p+1} \le \varepsilon + \tau^p(1-\varepsilon), \quad p \ge 1.$$
Если $n \le p+1$, то оно очевидно. Пусть $1 \le p \le n-1$. Достаточно показать, что
$$\frac{n\varepsilon}{p+1} \le \frac{1}{2}\tau^p, \quad 1 \le p \le n-1. \tag{19}$$
Рассмотрим функцию $\varphi(p) = (p+1)\tau^p$. Так как $\varphi'(p) = \tau^p(1 + (p+1)\ln\tau)$, то $\varphi(p)$ убывает, если $\tau \le 1/\sqrt{e}$. Поэтому (19) достаточно проверить при $p = n-1$, что достигается простой подстановкой: $\tau = (2\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$. Тем самым (18) выполнено. Одновременно если
$$\mathscr{K}(t, x; L_1, L_\infty) = \int\limits_0^t x^*(s)\,ds \quad (0 \le t \le 1),$$
то
$$\frac{\mathscr{K}(n\varepsilon, x; L_1, L_\infty)}{\mathscr{K}(n\varepsilon, y; L_1, L_\infty)} = \frac{n\varepsilon/2}{\varepsilon + (n-1)\tau\varepsilon} = \frac{n}{2 + 2(n-1)\tau} = \frac{n}{4} \to +\infty \text{ при } n \to +\infty,$$
и, таким образом, (17) не имеет места. $\square$

§ 3. Экстраполяционное описание пространств Лоренца

С. Ф. Лукомский [10] доказал следующее утверждение: если существует $\gamma > 0$ такое, что для почти всех $t \in [0,1]$ выполнено неравенство
$$\varphi'(t) \le \gamma t \varphi'(t^2), \tag{20}$$
то пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ экстраполяционно, точне, имеет место соотношение
$$\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)} \asymp \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x\|_n^p 2^{-n}\varphi'(2^{-n})\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{21}$$

В этом параграфе мы найдем необходимые и достаточные условия, при которых справедливо (21), а также приведем пример функции $\varphi \in \mathscr{F}$, для которой не выполнено (20), но тем не менее имеет место (21).

Обозначим через g_p пространство $l_p(2^{-n/p}\varphi'(2^{-n})^{1/p})$, норма в котором совпадает с правой частью (21). Его функциональным аналогом будет пространство $G_p = L_p(2^{-s/p}\varphi'(2^{-s})^{1/p})$ функций, определенных на $[1, \infty)$.

Теорема 3. *Для каждого* $p \in [1, \infty)$ *следующие условия эквивалентны:*
1) $\varphi \in \Delta^2$;
2) $\Lambda_p(\varphi) = \mathscr{L}_{G_p}$;
3) $\Lambda_p(\varphi) = \mathscr{L}_{g_p}$.

Для доказательства теоремы нам понадобится лемма, в которой в качестве экстраполяционного параметра рассматривается пространство $\widetilde{G}_p$ функций, определенных на $[p, \infty)$, с нормой

$$\|y\|_{\widetilde{G}_p} = \left(\int_p^{+\infty} |y(s)|^p 2^{-s} \varphi'(2^{-s})\, ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 3. *Для любого* $p \in [1, \infty)$ *симметричное пространство* $\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}$ p*-выпукло.*

Доказательство. Нужно доказать, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_n$ из $\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}$

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}} \le C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p_{\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}} \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (22)$$

Так как при $s \ge p$ пространство $L_s[0;1]$ p-выпукло с константой 1 [12, предложение 1.d.5], то

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_s \le \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_s^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тем самым

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{\mathscr{L}_{G_p}} \le \left(\int_p^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_s^p \right) 2^{-s} \varphi'(2^{-s})\, ds \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p_{\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

и соотношение (22) доказано. □

Доказательство теоремы 3. Прежде всего, заметим, что пространство $\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}$, фигурирующее в лемме, совпадает с пространством $\mathscr{L}_{G_p}$. Действительно, вложение $\mathscr{L}_{G_p} \subset \mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}$ очевидно. С другой стороны,

$$\left(\int_1^{+\infty} \|x\|_s^p\, 2^{-s} \varphi'(2^{-s})\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_1^{p} \|x\|_s^p\, 2^{-s} \varphi'(2^{-s})\, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \left(\int_p^{+\infty} \|x\|_s^p\, 2^{-s} \varphi'(2^{-s})\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \le 2 \left(\int_{p+1}^{2p} \|x\|_s^p\, 2^{-s} \varphi'(2^{-s})\, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \left(\int_p^{+\infty} \|x\|_s^p\, 2^{-s} \varphi'(2^{-s})\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \le 3\, \|x\|_{\mathscr{L}_{\widetilde{G}}},$$

откуда получаем, что $\mathscr{L}_{G_p} \supset \mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}$. Поэтому далее в доказательстве мы вправе вместо $\mathscr{L}_{G_p}$ рассматривать пространство $\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}$.

Легко показать, что для любой $\varphi \in \mathscr{F}$

$$\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p} \subset \Lambda_p(\varphi). \tag{23}$$

Действительно, так как $x^*(2^{-s}) \le 2\|x\|_s$ $(s \ge 1)$, то

$$\|x\|^p_{\Lambda_p(\varphi)} \le 2^p \int\limits_0^{1/2^p} x^*(t)^p \, d\varphi(t)$$

$$= 2^p \ln 2 \int\limits_p^{+\infty} x^*(2^{-s})^p 2^{-s} \varphi'(2^{-s}) \, ds \le 2^{p+1} \ln 2 \|x\|^p_{\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}}.$$

Как известно [12, с. 54], если X — p-выпуклое банахово функциональное пространство, то можно образовать банахово пространство $X_{(p)}$, состоящее из всех функций $x = x(t)$ таких, что $|x(t)|^{\frac{1}{p}} \in X$, с нормой

$$\|x\|_{X_{(p)}} = \||x|^{\frac{1}{p}}\|^p_X.$$

По лемме 3 эта процедура применима к пространству $\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}$, кроме того, $(\Lambda_p(\varphi))_{(p)} = \Lambda(\varphi)$. Тем самым ввиду (23)

$$(\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p})_{(p)} \subset \Lambda(\varphi). \tag{24}$$

Пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ — самое узкое из всех симметричных пространств с такой же фундаментальной функцией [11, с. 160]. Поэтому вложение, противоположное (24), т. е.

$$\Lambda(\varphi) \subset (\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p})_{(p)},$$

или, эквивалентно,

$$\Lambda_p(\varphi) \subset \mathscr{L}_{\widetilde{G}_p},$$

выполнено тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$\psi_p(t) \le C\varphi(t), \quad 0 < t \le 1, \tag{25}$$

где $\psi_p(t)$ — фундаментальная функция пространства $(\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p})_{(p)}$. Воспользовавшись определением последнего пространства, получим неравенство

$$\int\limits_p^{+\infty} t^{\frac{p}{s}} 2^{-s} \varphi'(2^{-s}) \, ds \le C\varphi(t), \quad 0 < t \le 1.$$

Так как слева и справа стоят квазивогнутые функции, достаточно установить справедливость этого соотношения для $t = 2^{-j}$, $j \ge 2p$. После замены получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{-p} 2^{\frac{jp}{s}} d\varphi(2^s) \le C\varphi(2^{-j}).$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{-j} 2^{\frac{jp}{s}} d\varphi(2^s) \le \varphi(2^{-j}),$$

предыдущее неравенство эквивалентно тому, что

$$\int_{-j}^{-p} 2^{\frac{jp}{s}}\,d\varphi(2^s) \le C\varphi(2^{-j}). \tag{26}$$

Докажем, что это имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi\in\Delta^2$.

Пусть выполнено (26). Тогда, с одной стороны, для $j\ge 2p$

$$\int_{-j}^{-j/2} 2^{\frac{jp}{s}}\,d\varphi(2^s) \le C\varphi(2^{-j}),$$

а с другой,

$$\int_{-j}^{-j/2} 2^{\frac{jp}{s}}\,d\varphi(2^s) \ge 2^{-2p}(\varphi(2^{-j/2})-\varphi(2^{-j})).$$

Отсюда

$$\varphi(2^{-j/2}) \le (2^{2p}C+1)\varphi(2^{-j}), \quad j\ge 2p,$$

и теперь стандартные рассуждения с использованием квазивогнутости φ приводят к тому, что $\varphi\in\Delta^2$.

Предположим, что, наоборот, $\varphi\in\Delta^2$. Прежде всего, заметим, что в этом случае неравенство (25) между фундаментальными функциями достаточно доказать для точек вида $t=2^{-j}$, где $j=2^m$, $m\in\mathbb{N}$. Действительно, пусть для таких t неравенство (25) справедливо и $j\in[2^m,2^{m+1}]$. Тогда

$$\psi_p(2^{-j}) \le \psi_p(2^{-2^m}) \le C\varphi(2^{-2^m}) \le C\alpha\varphi(2^{-2^{m+1}}) \le C\alpha\varphi(2^{-j}),$$

где α — константа из Δ^2-условия. Итак, при доказательстве (26) можно считать, что $j=2^m$, $m\in\mathbb{N}$ и $j\ge p$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned}\int_{-j}^{-p} 2^{\frac{jp}{s}}\,d\varphi(2^s) &\le \int_{-j}^{-1} 2^{\frac{jp}{s}}\,d\varphi(2^s) \le \int_{-j}^{-1} 2^{\frac{j}{s}}\,d\varphi(2^s) = \sum_{k=1}^{m}\int_{-2^k}^{-2^{k-1}} 2^{\frac{j}{s}}\,d\varphi(2^s)\\ &\le \sum_{k=1}^{m} 2^{-2^{m-k}}\varphi(2^{-2^{k-1}}) \le \sum_{k=1}^{m} 2^{-2^{m-k}}\alpha^{m-k+1}\varphi(2^{-2^m})\\ &= \alpha\varphi(2^{-j})\sum_{l=0}^{m-1} 2^{-2^l+l\log_2\alpha} < \alpha\varphi(2^{-j})\sum_{l=0}^{+\infty} 2^{-2^l+l\log_2\alpha} = C\varphi(2^{-j}),\end{aligned}$$

где $C=\alpha\sum\limits_{l=0}^{+\infty}2^{-2^l+l\log_2\alpha}<\infty$, и (26) выполнено. Следовательно, $\Lambda_p(\varphi)\subset\mathscr{L}_{\widetilde{G}_p}$.

Итак, условия 1 и 2 эквивалентны. Для завершения доказательства покажем, что $\mathscr{L}_{G_p}=\mathscr{L}_{g_p}$. Действительно, при $s\in[n,n+1]$ имеем

$$\frac{1}{2}\|x\|_n^p 2^{-n}\varphi'(2^{-n}) \le \|x\|_s^p 2^{-s}\varphi'(2^{-s}) \le 2\|x\|_{n+1}^p 2^{-n-1}\varphi'(2^{-n-1})$$

и, следовательно,

$$\|x\|_{\mathscr{L}_{g_p}}^p = \sum_{n=1}^{+\infty}\|x\|_n^p 2^{-n}\varphi'(2^{-n}) \le 2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\|x\|_s^p 2^{-s}\varphi'(2^{-s})\,ds$$

$$= 2\int_1^{+\infty}\|x\|_s^p\,2^{-s}\varphi'(2^{-s})\,ds = 2\|x\|_{\mathscr{L}_{G_p}}^p \le 4\sum_{n=1}^{+\infty}\|x\|_{n+1}^p 2^{-n-1}\varphi'(2^{-n-1}) \le 4\|x\|_{\mathscr{L}_{g_p}}^p.$$

Поэтому нормы в $\mathscr{L}_{G_p}$ и $\mathscr{L}_{g_p}$ эквивалентны. $\square$

Заметим, что если для функции $\varphi \in \mathscr{F}$ выполнено условие (20), то $\varphi \in \Delta^2$ (достаточно неравенство (20) проинтегрировать). Приведем пример, показывающий, что обратное неверно, т. е. существует функция $\varphi \in \mathscr{F}$ такая, что φ принадлежит Δ^2, но не удовлетворяет условию (20).

Пример 2. Через $\mathscr{F}_1$ будем обозначать класс кусочно-линейных функций из $\mathscr{F}$ вида

$$\varphi(2^{-k}) = \sum_{m \geq k} \Delta_m \quad \text{и} \quad \varphi(t) \text{ линейна на } [2^{-k-1}, 2^{-k}],\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Для того чтобы функция указанного вида принадлежала множеству $\mathscr{F}$, необходимо и достаточно, чтобы

1) $\Delta_k > 0$ (возрастание $\varphi(t)$);
2) $\sum_{k \geq 0} \Delta_k < \infty$ (конечность $\varphi(t)$);
3) $\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} \leq 2$ (вогнутость $\varphi(t)$).

В силу свойств функций класса $\mathscr{F}$ выполнение Δ^2-условия достаточно проверить лишь в точках вида $t_k = 2^{-k}$. Для $\varphi \in \mathscr{F}_1$ это условие равносильно требованию

$$\sum_{k \geq n} \Delta_k \leq C \sum_{k \geq 2n} \Delta_k, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{27}$$

Условие же (20) для $\varphi \in \mathscr{F}_1$ принимает следующий вид:

$$\Delta_k \leq \gamma_1 \min(\Delta_{2k+1}, \Delta_{2k}), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому функция φ не будет удовлетворять условию (20), если

$$\varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\Delta_k}{\Delta_{2k}} = +\infty. \tag{28}$$

Таким образом, достаточно построить пример функции $\varphi \in \mathscr{F}_1$, для которой выполнены условия (27) и (28).

Пусть натуральное число $n_0 \geq 4$, являющееся полным квадратом, таково, что при $n \geq n_0$

$$(n + \sqrt{n})^2 \leq 2^{\sqrt{n}} n^{\frac{3}{2}}. \tag{29}$$

Введем две последовательности натуральных чисел:

$$n_i = n_{i-1}^2 \quad \text{и} \quad m_i = \min\bigl\{k \geq n_i : k^2 \leq 2^{k-n_i} n_i^{\frac{3}{2}}\bigr\}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Ввиду (29) и (30) $m_i \leq n_i + \sqrt{n_i}$ и отрезки $[n_i, m_i]$ $(i = 0, 1, \dots)$ попарно дизъюнктны. Кроме того, никакой отрезок вида $[n, 2n]$ $(n \in \mathbb{N})$ не может пересекаться более чем с одним отрезком вида $[n_i, m_i]$. Действительно, так как $n_i \geq 4$, то $n_i^2 > 2(n_i + \sqrt{n_i})$. Следовательно, если i наименьшее, для которого $[n_i, m_i] \cap [n, 2n] \neq \varnothing$, то $m_i \geq n$ и

$$n_{i+1} - m_i \geq n_i^2 - n_i - \sqrt{n_i} > n_i + \sqrt{n_i} \geq m_i \geq n,$$

откуда $n_{i+1} > m_i + n \geq 2n$. Поэтому $[n_{i+1}, m_{i+1}] \cap [n, 2n] = \varnothing$.

Рассмотрим функцию $\varphi(t)$, для которой

$$\Delta_k = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{если } k = 0, 1, 2; \\ \frac{1}{k^2}, & \text{если } k \geq 3 \text{ и } k \notin [n_i, m_i); \\ 2^{n_i - k} \frac{1}{n_i^{3/2}}, & \text{если } k \in [n_i, m_i). \end{cases}$$

Проверим сначала условия 1–3 принадлежности $\varphi(t)$ классу $\mathscr{F}_1$. Условие 1 очевидно. Так как

$$\sum_{k\geq 0}\Delta_k \leq \frac{3}{10}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=n_i}^{m_i-1}2^{n_i-k}\frac{1}{n_i^{3/2}} \leq \frac{3}{10}+\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{n_i^{3/2}} \leq 3+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_0^k}<\infty,$$

условие 2 также выполняется.

Осталось проверить условие 3. Если $k=0,1,2$, оно очевидно. Если $k,k+1\notin[n_i,m_i)$, то

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}=\frac{(k+1)^2}{k^2}\leq 2,$$

так как $k\geq 3$. Если $k,\ k+1\in[n_i,m_i)$, то $\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}=2$ по определению Δ_k. В случае $k=n_i-1$ при некотором $i=0,1,\dots$

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}=\frac{n_i^{3/2}}{(n_i-1)^2}\leq\frac{n_i^2}{(n_i-1)^2}\leq 2,$$

так как $n_i\geq 4$. Осталось рассмотреть последнюю ситуацию, когда $k=m_i-1$. Используя определение m_i в (30), получаем

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}=\frac{2^{n_i-(m_i-1)}m_i^2}{n_i^{3/2}}\leq\frac{m_i^2}{(m_i-1)^2}\leq 2,$$

поскольку $m_i\geq 4$.

Итак, $\varphi\in\mathscr{F}_1$. Для проверки (28) достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{\Delta_{n_i}}{\Delta_{2n_i}}=\infty.$$

Так как $n_{i+1}-2n_i=n_i^2-2n_i>0$ и $m_i\leq n_i+\sqrt{n_i}<2n_i$, то $2n_i\in(m_i,n_{i+1})$ и поэтому

$$\Delta_{2n_i}=\frac{1}{(2n_i)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta_{n_i}}{\Delta_{2n_i}}=\frac{(2n_i)^2}{n_i^{3/2}}=4\sqrt{n_i}\to+\infty,$$

и тем самым (30) выполнено.

При проверке (27) можно, конечно, считать, что $n\geq 4$. Ввиду (30) для $k\in[n_i,m_i)$

$$\frac{1}{k^2}<\frac{2^{n_i-k}}{n_i^{3/2}}=\Delta_k.$$

Поэтому сумму из правой части (27) можно оценить снизу следующим образом:

$$\sum_{k\geq 2n}\Delta_k\geq\sum_{k\geq 2n}\frac{1}{k^2}\geq\frac{1}{2n},\quad n=1,2,\dots. \tag{31}$$

Сумму из левой части (27) представим в виде

$$\sum_{k\geq n}\Delta_k=\sum_{k=n}^{2n-1}\Delta_k+\sum_{k\geq 2n}\Delta_k. \tag{32}$$

Предположим, что существует i, для которого $[n_i,m_i]\cap[n,2n-1]\neq\varnothing$ (как ранее отмечалось, такой индекс i может быть только один). Тогда первая сумма справа в (32) оценивается следующим образом:

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\Delta_k\leq\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=n_i}^{m_i-1}\Delta_k\leq\frac{2}{n}+\frac{2}{n_i}.$$

Так как $n<m_i\leq n_i+\sqrt{n_i}<2n_i$, то $n_i>\frac{n}{2}$, поэтому ввиду (31)

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\Delta_k\leq\frac{6}{n}\leq 12\sum_{k\geq 2n}\Delta_k.$$

В итоге, используя (32), получаем, что

$$\sum_{k\geq n}\Delta_k\leq 13\sum_{k\geq 2n}\Delta_k,$$

т. е. условие (27) выполнено.

Замечание 1. Только что построенный пример показывает, что существуют функции φ, принадлежащие Δ^2, но не удовлетворяющие условию (20). Для них не применимы результаты работы [10], но применима теорема 3 настоящей работы. В то же время следует сказать о том, что построенная функция $\varphi(t)$ эквивалентна функции $\ln^{-1}(10/t)$, для которой (20), как легко проверить, выполнено. Дело в том, что условие (20) (в отличие от условия $\varphi\in\Delta^2$) не инвариантно относительно перехода к эквивалентным функциям.

Замечание 2. В теореме 3 приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы $\Lambda_p(\varphi)$ совпадало с экстраполяционным пространством $\mathscr{L}_{G_p}$, где параметр G_p имеет специальный вид. Нам неизвестно, существуют ли функции $\varphi\in\mathscr{F}$, $\varphi\notin\Delta^2$, для которых тем не менее $\Lambda_p(\varphi)=\mathscr{L}_H$ для некоторого банахова идеального пространства H.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yano S.* An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3, N 2. P. 296–305.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 2.
3. *Jawerth B., Milman M.* Extrapolation theory with applications // Mem. Amer. Math. Soc. 1991. V. 89, N 440. P. 3–82.
4. *Jawerth B., Milman M.* New results and applications of extrapolation theory // Interpolation spaces and related topics (Haifa, 1990). Israel Math. Conference Proc. 1992. V. 5. P. 81–105.
5. *Milman M.* Extrapolation and optimal decompositions: with applications to analysis // Berlin: Springer-Verl., 1994. (Lecture Notes in Math.; V. 1580).
6. *Асташкин С. В.* Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p-пространств // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 23–42.
7. *Асташкин С. В.* Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 26, № 2. С. 264–289.
8. *Milman M.* Extrapolation spaces and a.e. convergence of Fourier series // J. Approx. Theory. 1995. V. 80, N 1. P. 10–24.
9. *Лукомский С. Ф.* О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L^∞ // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 6. С. 882–889.

10. *Lukomskii S. F.* Convergence of Fourier series in Lorentz spaces // East J. Approx. 2003. V. 9, N 2. P. 229–238.
11. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
12. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. 2. Function spaces. Berlin: Springer-Verl., 1979.
13. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. Boston: Acad. Press, 1988.

Статья поступила 27 октября 2005 г.

Асташкин Сергей Владимирович, Лыков Константин Владимирович
Самарский гос. университет,
ул. Академика Павлова, 1, Самара 443011
astashkn@ssu.samara.ru, lykich@list.ru