Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 514

МАКСИМАЛЬНЫЕ ТРУБКИ ПРИ ДЕФОРМАЦИЯХ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КОНИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

С. Чой, Дж. Ли

Аннотация: Используя деформации гиперболических конических многообразий, Ходжсон и Керкгоф показали, что мощность множества трехмерных многообразий, полученных хирургиями Дена на гиперболических узлах и не допускающих гиперболическую структуру, конечна. Они поставили следующий вопрос: «Убывает ли квадрат длины меридиана, нормированный площадью, максимальной трубчатой окрестности сингулярного множества конического многообразия при изменении конических углов и возрастает ли, если к нему добавить квадрат конического угла?» В работе дан положительный ответ на этот вопрос в окрестности нулевых конических углов для бесконечного семейства гиперболических конических многообразий, полученных хирургиями Дена вдоль дополнений к зацеплению Уайтхеда. Основной используемый метод опирается на явные вычисления групп голономий с помощью A-полиномов и максимальных трубок. Один из ключевых инструментов — разложение в ряд Тейлора геометрической компоненты множества нулей A-полинома в терминах конических углов. Также показано, что последовательность данных разложений в ряд Тейлора для многообразий, полученных хирургиями Дена, сходится к разложению для предельного гиперболического многообразия.

Ключевые слова: гиперболическое многообразие, коническое многообразие, деформации.

§ 1. Введение

Недавно Ходжсон и Керкгоф [1] получили универсальную оценку числа негиперболических хирургий Дена на гиперболическом многообразии с одним каспом. Их доказательство основано на анализе вариации максимальных трубок вокруг сингулярностей в конических многообразиях фиксированного топологического типа при возрастании конических углов начиная с нуля.

Пусть M — ориентируемое 3-многообразие конечного объема с одним каспом, которое допускает полную гиперболическую структуру. Для каждого наклона γ на каспе многообразия M обозначим через $M(\gamma)$ многообразие, полученное хирургией Дена вдоль γ. По теореме Громова и Тёрстона [2] $M(\gamma)$ допускает метрику отрицательной кривизны, если длина кратчайшей кривой, лежащей на границе орисферической окрестности каспа и изотопной γ, больше 2π. Однако в этом случае остается открытым вопрос: допускает ли $M(\gamma)$ гиперболическую структуру?

Гиперболическое коническое многообразие размерности 3 — это многообразие, локально смоделированное на открытом подмножестве гиперболического

The first author gratefully acknowledges support from Korea Research Foundation (Grant KRF–2002–070–C00010).

пространства или на открытой области в открытом множестве, ограниченном двумя вполне геодезическими плоскостями, пересекающимися по геодезической и отождествленными эллиптической изометрией. По теореме Тёрстона о гиперболической хирургии Дена если $\theta > 0$ мало, то $M(\gamma)$ для любого γ допускает гиперболическую коническую структуру, чьим сингулярным множеством является добавленная замкнутая кривая с некоторым малым коническим углом θ. Обозначим получившееся коническое многообразие через $M_\theta(\gamma)$. Очевидно, что гомотопический класс сингулярного множества соответствует замкнутой кривой, пересекающейся с γ один раз. (Исходное многообразие M мы часто будем рассматривать как $M_0(\gamma)$ с коническим углом $\theta = 0$.)

У любого конического многообразия существует максимальная трубка вокруг его сингулярного множества. Если мы сможем ограничить снизу радиусы максимальных трубок, пока конический угол не достигнет 2π, то получим гиперболическую структуру на $M(\gamma)$ без сингулярностей. Пусть T — плоская торическая граница орисферической окрестности каспа в M. В [1] показано, что если нормированная длина (метрика на T выбрана так, что площадь T равна 1) геодезической на T, изотопной γ, больше 7.515, то мы можем ограничить снизу радиусы максимальных трубок в $M_\theta(\gamma)$, пока конический угол θ не достигнет 2π, и тем самым получить, что $M(\gamma)$ гиперболическое. С учетом этого там же доказано, что существует не больше 60 негиперболических хирургий Дена на гиперболическом многообразии с одним каспом.

В одной из лекций Ходжсон и Керкгоф сформулировали следующий

Вопрос. Пусть $\{M_\theta(\gamma) : 0 < \theta < \theta_0\}$ — непрерывное семейство гиперболических конических структур на $M(\gamma)$ с вышеописанной сингулярностью. Пусть $\mu = \mu(\theta)$ — длина хирургической кривой на границе T_θ максимальной трубки вокруг сингулярного множества $M_\theta(\gamma)$, и пусть $\hat{\mu} = \mu/\sqrt{\mathrm{Area}(T_\theta)}$ — нормированная длина. Верно ли, что $\hat{\mu}^2$ и $\hat{\mu}^2 + \theta^2$ — убывающая и возрастающая функции переменной θ на $[0, \theta_0)$ соответственно?

Ходжсон и Керкгоф показали, что если ответ на этот вопрос положительный, то можно эффективно контролировать радиусы максимальных трубок (см. [3] для более детального описания).

Основной результат данной работы базируется на взаимосвязи между A-полиномами и коническими углами. Пусть M — гиперболическое многообразие конечного объема с двумя каспами, и пусть $\{\mathscr{M}_1, \mathscr{L}_1\}$ — базис периферической подгруппы P фундаментальной группы $\pi_1(M)$, соответствующей первому каспу многообразия M. Выберем базис $\{\mathscr{M}_2, \mathscr{L}_2\}$ для второй периферической подгруппы и зафиксируем эти два базиса. Пусть (p_1, q_1) и (p_2, q_2) обозначают пары взаимно простых целых чисел, а $M(p_1, q_1)$ — 3-многообразие, полученное из M с помощью (p_1, q_1)-хирургии Дена на первом каспе. Пусть $M(\infty, \infty)_\theta(p_2, q_2)$ обозначает гиперболическое коническое многообразие, у которого один касп соответствует первому каспу многообразия M, а на втором каспе выполнена (p_2, q_2)-хирургия Дена, где соответствующий заполненный тор имеет сингулярность конического типа с коническим углом θ. Пусть $M(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$ обозначает гиперболическое коническое многообразие, у которого на первом каспе выполнена (p_1, q_1)-хирургия Дена, а на втором — (p_2, q_2)-хирургия Дена с сингулярностью конического типа с коническим углом $\theta > 0$.

Характеристическое многообразие $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-представлений фундаментальной группы многообразия M — это пространство следов $\pi_1(M) \to \mathbb{C}$, определенных взятием следов голономий фундаментальной группы $\pi_1(M)$ (подробности см. в [4]).

Характеристическое многообразие $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-представлений фундаментальной группы многообразия M, которые оставляют голономии $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{L}_1$ параболическими, задает взаимосвязь между собственными значениями l_1 и m_1 голономий $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{M}_1$ — так в данной статье определяются A-полиномы. Так называемая геометрическая компонента множества нулей A-полинома — это компонента, полученная деформацией гиперболического многообразия, соответствующая коническим структурам второго каспа. Используя геометрическую компоненту A-полинома вместе с соотношением хирургии Дена

$$p\log\frac{m}{m_0}+q\log\frac{l}{l_0}=\frac{\sqrt{-1}\theta}{2},$$

мы можем получить разложения функций m и l в ряд Тейлора по переменной θ, которые нам потребуются только с точностью до третьего порядка.

Аналогично определим A-полином многообразия $M(p_1,q_1)$ относительно базиса $\{\mathscr{M}_2,\mathscr{L}_2\}$. Используя соотношение хирургии Дена, получим ряды Тейлора m_2 и l_2, соответствующие геометрической компоненте A-полинома как функции переменной θ.

В заключение докажем теорему 3.2, устанавливающую сходимость разложений l и m в ряд Тейлора по переменной θ с точностью до третьего порядка, соответствующих A-полиному многообразия $M(p,q)$, к ряду Тейлора, соответствующему многообразию $M(\infty,\infty)$. В связи с громоздкостью доказательства эта теорема будет доказана в последнем § 6.

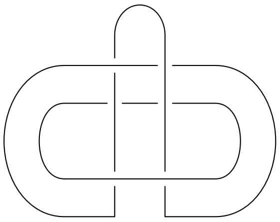

Рис. 1. Зацепление Уайтхеда.

Основной результат данной работы заключается в следующем утверждении: для бесконечного числа гиперболических многообразий $\{W(p_1,q_1)\}$, полученных из дополнения W к зацеплению Уайтхеда хирургией Дена на первом торическом крае, имеем частичный ответ на вопрос Ходжсона — Керкгофа. Пусть W — дополнение к зацеплению Уайтхеда (рис. 1), и пусть $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{L}_2$ — подобранные подходящим образом меридианы и параллели для двух концов W.

Теорема 1.1. *Пусть* $\mu=\mu_{p_1,q_1,p_2,q_2}(\theta)$ *— длина хирургической кривой на границе максимальной трубки* $W(p_1,q_1)_\theta(p_2,q_2)$ *вокруг сингулярности. Пусть* $\hat\mu=\hat\mu_{p_1,q_1,p_2,q_2}(\theta)$ *— нормированная длина хирургической кривой. Если* $|p_1|+|q_1|$ *достаточно большое, то для любой пары* p_2,q_2 *взаимно простых целых чисел, за исключением, быть может, одной,* $\hat\mu^2$ *— убывающая, а* $\hat\mu^2+\theta^2$ *— возрастающая функции в точке* $\theta=0$.

Очевидно, это означает, что функция $\hat\mu$ убывающая. Приведем набросок доказательства теоремы. Для гиперболического многообразия M конечного объема с отмеченным каспом определим орисферическую окрестность каспа, вычисляя элементы $\pi_1(M)$, голономии которых имеют достаточно большие изометрические сферы.

Используем эти элементы — так называемые связующие классы — для нахождения максимальной трубчатой окрестности сингулярности в $M_\theta(p,q)$, когда $|p|+|q|$ большое, а θ малое. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что связующие классы стабильны в окрестности $\theta=0$. (См. § 4 для более подробного описания.)

Теперь выразим длину $\mu_{p,q}(\theta)$ и нормированную длину $\hat{\mu}_{p,q}(\theta)$ хирургической кривой на максимальной трубке вокруг сингулярности в $M_\theta(p,q)$ в терминах следов голономий коммутатора связующего класса и дополнительного элемента (см. предложение 4.2).

Сосредоточим наше внимание на W. Мы можем в точности вычислить представление группы голономий $\pi_1(W)$, соответствующее полной структуре, и определить связующий класс. Заметим, что W с полной гиперболической структурой распадается на четыре идеальных тетраэдра. Каждому тетраэдру поставим в соответствие с точностью до изометрии комплексный инвариант. Данные инварианты z_1, z_2, z_3, z_4 удовлетворяют двум соотношениям, соответствующим двум идеальным ребрам W. Соотношения определяют некоторую комплексную поверхность, параметризующую все гиперболические структуры на W в окрестности полной гиперболической структуры.

Пусть m_1, l_1, m_2, l_2 обозначают собственные значения голономий $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{L}_2$ соответственно. Мы можем записать их как функции от инвариантов тетраэдров z_1, z_2, z_3, z_4.

Далее вычислим представления группы голономий как функции некоторых легко определяемых переменных x, y. Нетрудно заметить, что $x = m_1$, и мы можем записать l_1 как функцию переменных x и y. Таким образом, представления группы голономий являются функциями переменных m_1, l_1. Отсюда можно также найти два соотношения между m_1, l_1 и m_2, l_2.

Выразим $\hat{\mu}^2_{p_1,q_1,p_2,q_2}(\theta)$ как $k_0(p_1,q_1,p_2,q_2) + k_1(p_1,q_1,p_2,q_2)\theta^2 + O(|\theta|^3)$, где функции k_0 и k_1 определены для целых чисел (p_1,q_1,p_2,q_2) при достаточно больших $|p_1|+|q_1|$ и $|p_2|+|q_2|$. По теореме 3.2 $k_1(p_1,q_1,p_2,q_2) \to k_1^\infty(p_2,q_2)$ при $|p_1|+|q_1| \to \infty$ для некоторой функции k_1^∞, принимающей значения в отрезке $[K_1, K_2] \subset (-1, 0)$.

Отметим, что $k_1^\infty(p_2,q_2)$ — соответствующая функция для $W(\infty,\infty,p_2,q_2)$. Применяя предыдущие рассуждения, мы можем вычислить данную функцию и тем самым доказать основную теорему.

В своей кандидатской диссертации Доути [5] под руководством Ходжсона получил аналогичный результат в случае дополнений к узлу «восьмерка». Результат настоящей работы обобщает его результат и дает возможность лучше понять действие хирургии Дена. В перспективе мы надеемся ответить на вопрос Ходжсона и Керкгофа в случае более общих многообразий и без ограничений на конический угол, хотя на данный момент, видимо, нет возможности построить общую теорию. Наш метод интересен тем, что его можно будет применить в дальнейшем для построения новых примеров и методов решений, которые мы сможем использовать для дальнейшего изучения и развития общей теории.

Мы благодарим Д. Купера, К. Ходжсона и С. Керкгофа за многочисленные обсуждения и помощь. Мы также благодарим факультет математики Стенфордского университета за гостеприимство во время написания настоящей статьи.

§ 2. Гиперболические конические многообразия и хирургия Дена

В этом параграфе мы напомним некоторые факты из теории гиперболических конических многообразий и гиперболической хирургии Дена. В конце параграфа мы приведем необходимый нам в дальнейшем результатНоймана и Цагира [6].

Гиперболическое многообразие — это многообразие, наделенное римановой метрикой постоянной секционной кривизны -1. В настоящей статье мы рассматриваем только трехмерные ориентируемые многообразия. Обозначим односвязное полное гиперболическое многообразие через $\mathbb{H}^3$. Группа изометрий $\mathbb{H}^3$, сохраняющих ориентацию, образует группу Ли $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Если M — гиперболическое многообразие, то открытая окрестность каждой точки M изометрична открытому множеству в $\mathbb{H}^3$. Существуют изометрия dev с универсального накрытия $\widetilde{M}$ на $\mathbb{H}^3$ и групповой гомоморфизм $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ такой, что $\mathrm{dev} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \mathrm{dev}$ для каждого γ из группы преобразований наложения $\pi_1(M)$. Таким образом, гиперболическое многообразие изометрично фактор-пространству $\mathbb{H}^3$ по действию дискретной группы сохраняющих ориентацию изометрий $\mathbb{H}^3$.

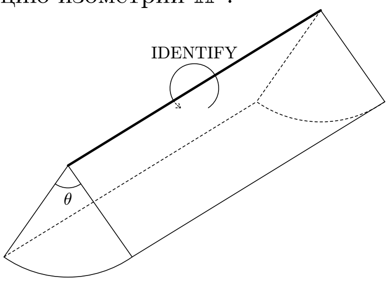

Рис. 2. Окрестность сингулярной точки в гиперболическом коническом многообразии.

Гиперболические конические многообразия возникают в контексте гиперболической хирургии Дена — Тёрстона и вызывают несомненный интерес [3, 7, 8]. Трехмерное многообразие N, наделенное метрикой, является гиперболическим коническим многообразием, если открытая окрестность каждой точки N изометрична открытому множеству в $\mathbb{H}^3$ или метрическому фактор-пространству, полученному из открытого трехмерного шара в $\mathbb{H}^3$ удалением области с границей, состоящей из двух вполне геодезических плоскостей, пересекающихся по геодезической и отождествленных изометрией, оставляющей неподвижной данную геодезическую (рис. 2).

Множество всех точек гиперболического конического многообразия N, у которых не существует открытой окрестности, изометричной открытому множеству в $\mathbb{H}^3$, называется *сингулярным множеством* или *сингулярностью* N и обозначается через Σ_N (или Σ, если N очевидно из контекста). Сингулярное множество — это одномерное подмногообразие, которое является зацеплением, если M — замкнутое многообразие. Каждой компоненте сингулярного множества ставится в соответствие конический угол вокруг компоненты.

Пусть M — гиперболическое многообразие конечного объема с h каспами. Как показал Тёрстон, M можно продеформировать так, что оно будет иметь неполные гиперболические структуры, а метрические пополнения некоторых продеформированных структур индуцируют полные гиперболические конические структуры на многообразиях, полученных хирургиями Дена на концах многообразия M. Теорема о гиперболической хирургии Дена утверждает, что в большинстве случаев многообразие, полученное хирургией Дена на концах M, допускает полную гиперболическую структуру, т. е. структуру без сингулярностей конического типа.

Пусть M — гиперболическое многообразие конечного объема с h каспами, которое может быть получено хирургией Дена на некоторых концах идеально триангулированного гиперболического многообразия. Пусть ν — число идеальных тетраэдров, а $\mathscr{M}_1, \mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{M}_h, \mathscr{L}_h$ — фиксированные меридианы и параллели для концов M. Пусть полная гиперболическая структура M соответствует точке $\mathbf{z}^0 = \left(z_1^0, \dots, z_\nu^0\right) \in \mathbb{C}^\nu$. Тёрстон показал, что множество $\mathscr{V}$, состоящее из точек $\mathbb{C}^\nu$ в окрестности $\mathbf{z}^0$, удовлетворяющих некоторому условию склейки, является гладким аналитическим подмножеством комплексной размерности h в $\mathbb{C}^\nu$. Показано [6], что отображения $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_h) : \mathscr{V} \to \mathbb{C}^h$ и $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_h) : \mathscr{V} \to \mathbb{C}^h$, которые приписывают собственные значения образов голономий $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_h$, $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_h$, соответственно, являются биголоморфными отображениями в точке $\mathbf{z}^0$.

Пусть $(m_1^0, \ldots, m_h^0) = \mathbf{m}(\mathbf{z}^0)$ и $(l_1^0, \ldots, l_h^0) = \mathbf{l}(\mathbf{z}^0)$.

Теорема 2.1 [6]. *Для каждого $i \in \{1, \ldots, h\}$ существует голоморфная функция τ_i, определенная в окрестности начала координат $\mathbb{C}^h$, такая, что*

$$\log\bigl(l_i/l_i^0\bigr) = \log\bigl(m_i/m_i^0\bigr)\tau_i\bigl(\log\bigl(m_1/m_1^0\bigr), \ldots, \log\bigl(m_h/m_h^0\bigr)\bigr).$$

Более того, функция τ_i четна по каждой переменной для любого i, а $\tau_i(0, \ldots, 0)$ — модуль плоской структуры на торической границе окрестности каспа для i-го конца относительно $\mathscr{M}_i$, $\mathscr{L}_i$. В частности, каждое $\tau_i(0, \ldots, 0)$ является комплексным числом.

§ 3. *A*-полиномы и обобщенные хирургии Дена

В данном параграфе определим так называемые A-полиномы для гиперболических многообразий с несколькими каспами относительно некоторого отмеченного каспа, которые мы будем также называть относительными A-полиномами. Мы определим геометрические компоненты алгебраического множества собственных значений голономий, т. е. множество нулей A-полинома. Разложим полиномиальные соотношения геометрических компонент в ряд Тейлора и приведем примеры. Затем мы покажем, как представить геометрическую компоненту в виде функции от конических углов. В заключение покажем, что ряд Тейлора геометрической компоненты многообразия, на одном каспе которого выполнена (p, q)-хирургия Дена, сходится к ряду Тейлора геометрической компоненты многообразия без хирургии при $(p, q) \to (\infty, \infty)$.

3.1. Геометрические компоненты пространств представлений собственных значений. Куллер и Шален [4] определили характеристическое многообразие трехмерного многообразия как алгебраическое множество следов голономий элементов фундаментальной группы, упорядоченных определенным образом.

Обобщим определение A-полинома из [9]. Пусть M — гиперболическое 3-многообразие по крайней мере с одним каспом. Зафиксируем касп и обозначим через P его фундаментальную группу. Обозначим через $R(\pi_1(M))$ пространство представлений фундаментальной группы $\pi_1(M)$ многообразия M в группу $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, а через $R(\pi_1(M))_P$ — подмножество тех представлений, сужение которых на замкнутые петли имеют параболические или тождественные образы во всех каспах, кроме P. Обозначим характеристическое многообразие $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-представлений группы $\pi_1(M)$ через $X(M)$, а каноническую сюръективную проекцию — через $t : R(\pi_1(M)) \to X(M)$ (см. [4]). Будем писать $R(M)$ вместо $R(\pi_1(M))$. Обозначим через $X(M)_P$ образ $R(M)_P$. С учетом рассуждений из [4] $X(M)_P$ является плотным подмножеством конечного объединения характеристик, которое обозначим через $X''(M)_P$ (мы не утверждаем, что они равны).

Пусть $B = \{\mathscr{L}, \mathscr{M}\}$ — фиксированный базис P. Определим отображение сужения $r : X''(M)_P \to X(P)$. Обозначим символом $\triangle$ подпространство диагональных представлений в $R(P)$. Существует изоморфизм $p_B : \triangle \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, определенный равенством $p_B(\rho) = (l, m)$, где ρ задано следующим образом:

$$\rho(\mathscr{L}) = \begin{bmatrix} l & * \\ 0 & l^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \rho(\mathscr{M}) = \begin{bmatrix} m & ** \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix}.$$

Проекция t индуцирует $(2-1)$-отображение $t_\triangle : \triangle \to X(P)$.

Обозначим через $X'(M)_P$ объединение неприводимых компонент $X''(M)_P$, образы которых при отображении r имеют комплексную размерность 1. Для каждой компоненты Z' из $X'(M)_P$ обозначим через Z кривую $t_\triangle^{-1}(\overline{r(Z')}) \subset \triangle$. Определим $D_{M,P}$ как объединение кривых Z, когда Z' пробегает компоненты $X''(M)_P$.

Будем говорить, что $D_{M,P}$ является A-*множеством* многообразия M относительно P. Отметим, что A-множество инвариантно относительно инволюции $(l, m) \mapsto (l^{-1}, m^{-1})$.

Определим A-*полином* $A_{M,P}$ многообразия M относительно P как определяющий полином замыкания $D_{M,P}$ в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. В случае многообразия M с одним каспом наше определение совпадает с определением из [9]. В очевидных ситуациях будем опускать символ P в $A_{M,P}$.

Определение 3.1. Пусть M — гиперболическое многообразие с каспом, а $B = \{\mathscr{L}, \mathscr{M}\}$ — базис фундаментальной группы окрестности каспа многообразия M. Предположим, что $(l^0, m^0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ совпадает с одной из пар $(\pm 1, \pm 1)$ и принадлежит множеству нулей $A_M(l, m)$. Пусть $l(m)$ — голоморфная функция, определенная в окрестности (например, U) m^0 и принимающая значения в окрестности l^0. Будем говорить, что голоморфная функция $l = l(m)$, определенная в окрестности $(l^0, m^0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, является *геометрической кривой* A-множества в точке (l^0, m^0), если существует голоморфное семейство $\{\rho_m : m \in U\}$ представлений группы $\pi_1(M)$ в группу $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такое, что каждое ρ_m является поднятием представления группы голономий гиперболической структуры на M и

$$\rho_m(\mathscr{L}) = \begin{bmatrix} l(m) & * \\ 0 & 1/l(m) \end{bmatrix}, \quad \rho_m(\mathscr{M}) = \begin{bmatrix} m & ** \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что если $l = l(m)$ является геометрической кривой A-полинома $A_M(l, m)$ в точке (m^0, l^0), то $A(l(m), m) = 0$ для всех m в окрестности m^0.

Предложение 3.1. *Компонента A-множества содержит образ геометрической кривой как плотное множество.*

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Геометрической компонентой называется компонента A-множества, содержащая геометрическую кривую как плотное множество, а *геометрическим множителем* — порождающий идеала, определяющего вышеуказанную компоненту.

Пример. Пусть M — дополнение к узлу «восьмерка». Представление Виртингера группы $\pi_1(M)$ имеет вид

$$\langle \alpha, \beta : \ \alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta^{-1} \rangle,$$

где $\{\alpha, \ \beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-2}\beta\alpha\beta^{-1}\}$ — базис периферической подгруппы фундаментальной группы $\pi_1(M)$. A-полином многообразия M относительно данного базиса имеет вид

$$A_M(l, m) = lm^8 - lm^6 - (l^2 + 2l + 1)m^4 - lm^2 + l.$$

Решая уравнение второго порядка по l, получим два решения $l(m)$, содержащих квадратные корни, и два множителя $A_M(l,m)$. Поскольку $A_M(-1,-1)=0$, соответствующие множители можно разложить в ряд по $m+1$:

$$l+1-2\sqrt{-3}(m+1)-(6+\sqrt{-3})(m+1)^2-(6-2\sqrt{-3}/3)(m+1)^3+O(|m+1|^4),$$

$$l+1+2\sqrt{-3}(m+1)-(6-\sqrt{-3})(m+1)^2-(6+2\sqrt{-3}/3)(m+1)^3+O(|m+1|^4).$$

Заметим, что длина сингулярной геодезической возрастает при возрастании конического угла начиная с нуля, т. е. при деформации полного гиперболического многообразия. Таким образом, первый множитель является геометрическим: если взять $m=-\exp(i\theta)$, то $-l$ становится возрастающей функцией вещественной переменной θ начиная с нуля.

3.2. Ряд Тейлора геометрических кривых. Пусть M — трехмерное многообразие, допускающее полную гиперболическую структуру конечного объема с одним каспом. Пусть $\mathscr{M}$, $\mathscr{L}$ — фиксированная пара, состоящая из меридиана и параллели на конце многообразия M, а $A_M(l,m)$ — A-полином многообразия M относительно данной пары.

Предположим, что деформации гиперболических структур на M в окрестности полной структуры задают следующее соотношение между собственными значениями m и l меридиана $\mathscr{M}$ и параллели $\mathscr{L}$ соответственно для поднятия представлений группы голономий в окрестности гиперболических структур:

$$l=l^0+a_1(m-m^0)+\frac{a_2}{2}(m-m^0)^2+\frac{a_3}{6}(m-m^0)^3+O(|m-m^0|^4). \tag{1}$$

Здесь m^0 и l^0 — собственные значения поднятия представления группы голономий полной структуры. Таким образом, m^0 и l^0 принимают значения ±1.

Данное соотношение соответствует геометрическому множителю A-полинома $A_M(l,m)$.

Теперь опишем, как данное соотношение (в окрестности полной структуры) вместе с соотношением хирургии Дена

$$p\log\left(\frac{m}{m^0}\right)+q\log\left(\frac{l}{l^0}\right)=\frac{\sqrt{-1}\theta}{2} \tag{2}$$

позволит нам вычислить коэффициенты ряда Тейлора функций m и l. Для простоты предполагаем, что $m^0=l^0=-1$. В других случаях доказательство аналогично.

Напомним, что a_1 не является вещественным числом, поскольку в общем случае будет модулем плоской структуры каспа относительно $\{\mathscr{M},\mathscr{L}\}$, когда гиперболическая структура полна.

Так как $a_1\neq -p/q$ ввиду невещественности a_1, множества, определенные уравнениями (1) и (2), некасательны в точке $m^0=l^0=-1$. Мы будем рассматривать m и l как локально голоморфные функции переменной θ в окрестности $\theta=0$.

Наша цель — получить коэффициенты ряда Тейлора функций m и l в терминах θ с точностью до третьего порядка. Последовательно дифференцируя уравнения (1) и (2) и вычисляя в точке $\theta=0$, определим искомые коэффициенты.

Дифференцируя (2), получим

$$\frac{p}{m}\frac{dm}{d\theta}+\frac{q}{l}\frac{dl}{d\theta}=\frac{\sqrt{-1}}{2}, \tag{3}$$

и при $\theta = 0$

$$p\frac{dm}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} + q\frac{dl}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}. \tag{4}$$

С другой стороны, дифференцируя (1) и вычисляя в точке $\theta = 0$, имеем

$$\frac{dl}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} = a_1\frac{dm}{d\theta}\bigg|_{\theta=0}. \tag{5}$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$\frac{dm}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} = -\frac{\sqrt{-1}}{2(p+a_1q)}, \quad \frac{dl}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} = -\frac{a_1\sqrt{-1}}{2(p+a_1q)}.$$

Действуя таким же образом, получим

$$\frac{d^2m}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=0} = \frac{p+(a_1^2+a_2)q}{4(p+a_1q)^3}, \quad \frac{d^2l}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=0} = \frac{(a_1-a_2)p+a_1^3q}{4(p+a_1q)^3},$$

$$\frac{d^3m}{d\theta^3}\bigg|_{\theta=0} = \frac{i\{p^2+\big(6a_1^2-2a_1^3+6a_2-2a_1-3a_1a_2-a_3\big)pq\}}{8(p+a_1q)^5} + \frac{i\{\big(a_1^4+3a_1^2a_2+3a_2^2-a_1a_3\big)q^2\}}{8(p+a_1q)^5},$$

$$\frac{d^3l}{d\theta^3}\bigg|_{\theta=0} = \frac{i\{(a_1-3a_2+a_3)p^2\}}{8(p+a_1q)^5} + \frac{i\{\big(6a_1^3-2a_1^4-2a_1^2-6a_1^2a_2-3a_2^2+3a_1a_2+a_1a_3\big)pq+a_1^5q^2\}}{8(p+a_1q)^5},$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Напомним, что $a_2 = a_1 - a_1^2$, если кривая, заданная уравнением (1), инвариантна относительно инволюции $(l,m) \mapsto (1/l, 1/m)$ в окрестности $(l^0, m^0) = (-1,-1)$. Таким образом, нами получены следующие формулы для m, l и $r\log\big(\frac{m}{m^0}\big) + s\log\big(\frac{l}{l^0}\big)$ в терминах θ при $a_2 = a_1 - a_1^2$:

$$m = -1 - \frac{\sqrt{-1}}{2(p+a_1q)}\theta + \frac{1}{8(p+a_1q)^2}\theta^2 + \sqrt{-1}\frac{p+\big(3a_1-3a_1^2+a_1^3-a_3\big)q}{48(p+a_1q)^4}\theta^3 + O(|\theta|^4), \tag{6}$$

$$l = -1 - \frac{a_1\sqrt{-1}}{2(p+a_1q)}\theta + \frac{a_1^2}{8(p+a_1q)^2}\theta^2 + \sqrt{-1}\frac{\big(-2a_1+3a_1^2+a_3\big)p+a_1^4q}{48(p+a_1q)^4}\theta^3 + O(|\theta|^4), \tag{7}$$

$$r\log(-m) + s\log(-l) = \frac{\sqrt{-1}(r+a_1s)}{2(p+a_1q)}\theta + \frac{\sqrt{-1}\big(2a_1-3a_1^2+a_1^3-a_3\big)(ps-qr)}{48(p+a_1q)^4}\theta^3 + O(|\theta|^4). \tag{8}$$

3.3. Сходимость коэффициентов ряда Тейлора геометрических множителей A-полиномов. Пусть M — 3-многообразие, допускающее полную гиперболическую структуру с двумя каспами, а $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{M}_2$ и $\mathscr{L}_2$ — фиксированные меридианы и параллели для концов M. Мы предполагаем, что M

может быть получено хирургией Дена на некоторых концах идеально триангулированного гиперболического многообразия. Пусть ν — число тетраэдров.

Мы имеем голоморфное вложение открытого множества $V \subset \mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^\nu$, образ которого является подмножеством $\mathscr{V} \subset \mathbb{C}^\nu$, состоящим из точек $(z_1, \dots, z_\nu)$, удовлетворяющих условиям склейки (см., например, [6]).

Тёрстон показал, что представления группы голономий в окрестности представления группы голономий полной гиперболической структуры на M имеют поднятия ρ_0 на $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Пусть $m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0$ — собственные значения $\rho_0(\mathscr{M}_1)$, $\rho_0(\mathscr{L}_1)$, $\rho_0(\mathscr{M}_2)$, $\rho_0(\mathscr{L}_2)$. Каждое из $m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0$ принимает значения 1 либо -1. Имеем голоморфное отображение из $\mathscr{V}$ в $\mathbb{C}^4$, которое ставит в соответствие каждой точке $\mathbf{z}$ множества $\mathscr{V}$ собственные значения m_1, l_1, m_2, l_2 образов $\rho(\mathscr{M}_1)$, $\rho(\mathscr{L}_1)$, $\rho(\mathscr{M}_2)$, $\rho(\mathscr{L}_2)$, соответственно, где ρ — поднятие представления группы голономий, соответствующего точке $\mathbf{z}$. Более того, мы выбираем голоморфное отображение так, что значение (m_1, l_1, m_2, l_2) совпадает с $\bigl(m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0\bigr)$ в точке множества $\mathscr{V}$, соответствующей полной структуре.

Если первый конец остается каспом, то собственные значения m_2 и l_2 удовлетворяют следующему соотношению:

$$l_2 = l_2^0 + a_1\bigl(m_2 - m_2^0\bigr) + \frac{a_2}{2}\bigl(m_2 - m_2^0\bigr)^2 + \frac{a_3}{6}\bigl(m_2 - m_2^0\bigr)^3 + O\bigl(\bigl|m_2 - m_2^0\bigr|^4\bigr).$$

Аналогично если p_1, q_1 — взаимно простые целые числа и $|p_1| + |q_1|$ большое, то m_2 и l_2 удовлетворяют соотношению

$$l_2 = l_2^0 + a_1^{p_1,q_1}\bigl(m_2 - m_2^0\bigr) + \frac{a_2^{p_1,q_1}}{2}\bigl(m_2 - m_2^0\bigr)^2 + \frac{a_3^{p_1,q_1}}{6}\bigl(m_2 - m_2^0\bigr)^3 + O\bigl(\bigl|m_2 - m_2^0\bigr|^4\bigr),$$

когда на первом конце выполнена хирургия Дена вдоль наклона (p_1, q_1).

Теорема 3.2. *Пусть M — гиперболическое многообразие с двумя каспами. Пусть $M(p_1, q_1)$ — 3-многообразие, полученное (p_1, q_1)-хирургией Дена на первом каспе многообразия M. Пусть a_i — i-й коэффициент ряда Тейлора функции l_2 переменной m_2 в геометрическом множителе A-полинома второго каспа многообразия M, а $a_i^{p_1,q_1}$ — i-й коэффициент в случае многообразия $M(p_1, q_1)$. Тогда $a_i^{p_1,q_1} \to a_i$ при $|p_1| + |q_1| \to \infty$, $i = 1, 2, 3$.*

Данный результат показывает сходимость последовательности коэффициентов ряда Тейлора геометрических компонент (определенных в п. 3.1) A-полиномов многообразий $M(p_1, q_1)$, полученных хирургией Дена на первом конце гиперболического многообразия M с двумя каспами. Хотя мы показали сходимость коэффициентов разложений с точностью только до третьего порядка, мы можем легко расширить наше доказательство и установить, что сходимость имеет место и для более высоких порядков.

Мы докажем теорему 3.2 в § 6.

§ 4. Максимальные трубки в гиперболических конических многообразиях

В этом параграфе рассмотрим в общем случае максимальные трубки в гиперболических конических многообразиях. Сперва определим связующие классы, кратчайшие негомотопные пути, соединяющие сингулярности. Мы обсудим стабильность связующих классов при геометрической сходимости и получим формулу для радиуса максимальной трубки, используя следы некоторых элементов, включая коммутатор связующих классов. В заключение получим длину и нормированную длину меридиана в терминах радиуса максимальной трубки, конических углов и длины сдвига.

У гиперболического многообразия конечного объема с отмеченным каспом существует окрестность каспа в виде оришара. Наибольшая из таких окрестностей называется *орисферической* или *максимальной окрестностью* каспа.

Аналогично гиперболическое коническое многообразие, сингулярным множеством которого является узел, имеет стандартные трубчатые окрестности сингулярного множества, а наибольшая из таких окрестностей называется *максимальной трубчатой окрестностью* или *максимальной трубкой вокруг сингулярного множества*.

Пусть M — гиперболическое многообразие конечного объема с каспом и P — периферическая подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Граница орисферической окрестности каспа — это тор, например T, который касается сам себя в конечном числе точек. В каждой точке касания x существует единственная геодезическая, ортогональная T в точке x и стремящаяся к концу каспа в обоих направлениях. Такая геодезическая соответствует единственным образом классу эквивалентности пространства двойных смежных классов $P\backslash\pi_1(M)/P$, т. е. классу эквивалентности относительно отношения $\sim$, определенного на $\pi_1(M)$ по правилу $\alpha \sim \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \gamma_1\beta\gamma_2$ или $\alpha = \gamma_1\beta^{-1}\gamma_2$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in P$. В этом случае данный класс эквивалентности называют *связующим классом* подгруппы P или каспа, соответствующего подгруппе P.

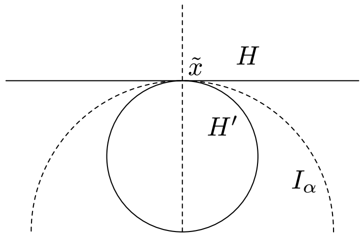

Рис. 3. Представитель связующего класса для орисферической окрестности каспа.

Пусть $\rho_0 : \pi_1(M) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ — представление группы голономий для гиперболической структуры на M такое, что $\rho_0(P)$ фиксирует ∞ в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, реализованном в верхнем полупространстве. Пусть H — горизонтальная плоскость в $\mathbb{H}^3$, которая является поднятием тора T, и пусть $\tilde{x} \in H$ — поднятие точки x. Тогда мы имеем еще одну орисферу H', которая является поднятием T и содержит $\tilde{x}$. Тем самым элемент α группы $\pi_1(M)$ такой, что $\alpha(H') = H$ представляет связующий класс (рис. 3).

Связующий класс можно описать также следующим образом: представитель класса имеет наибольшие изометрические сферы относительно представлений ρ_0, где $\rho_0(P)$ фиксирует ∞.

Определим связующий класс гиперболического конического многообразия. Пусть N — гиперболическое коническое многообразие, сингулярным множеством Σ которого является простая замкнутая кривая, а конический угол меньше 2π. Пусть P — периферическая подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(N-\Sigma)$. Границей максимальной трубки вокруг сингулярного множества является тор T_Σ с несколькими точками самокасания. Для каждой точки самокасания x имеем единственную геодезическую дугу, которая является объединением двух кратчайших путей из x в Σ. Такая геодезическая дуга соответствует классу эквивалентности в двойном смежном классе $P\backslash\pi_1(N-\Sigma)/P$.

Опишем связующий класс в универсальном накрывающем пространстве. Пусть x — точка самокасания на T_Σ, и пусть τ — один из кратчайших путей из x в Σ. Пусть U_Σ — внутренность максимальной трубчатой окрестности вокруг

Σ в $N-\Sigma$, и пусть $\widetilde{U}_0$ — компонента поднятия U_Σ в $\widetilde{N-\Sigma}$, левоинвариантная относительно действия P на $\widetilde{N-\Sigma}$. Пусть $\tilde{x}_0$ — поднятие x в $\widetilde{N-\Sigma}$, лежащее на границе $\widetilde{U}_0$, и пусть $\tilde{\tau}_0$ — поднятие $\tau-\Sigma$ в $\overline{\widetilde{U}_0}$ с одним концом в $\tilde{x}_0$. Продолжая геодезическую дугу $\tilde{\tau}_0$, содержащую $\tilde{x}_0$, получим открытую геодезическую дугу, стремящуюся к концам $\widetilde{N-\Sigma}$ в обоих направлениях. Один конец выходит из $\widetilde{U}_0$, а другой — из образа $\widetilde{U}_0'$ компоненты $\widetilde{U}_0$ при действии $\pi_1(N-\Sigma)$ на $\widetilde{N-\Sigma}$. Тогда связующий класс максимальной трубки в точке x представляется элементом α группы $\pi_1(N-\Sigma)$ таким, что $\alpha(\widetilde{U}_0')=\widetilde{U}_0$.

Пусть $\{M_\theta : 0<\theta<\theta_0\}$ — семейство гиперболических конических многообразий одного топологического типа такое, что M_θ сходится (в смысле Громова — Хаусдорфа) к полному гиперболическому многообразию M_0 конечного объема по крайней мере с одним каспом, и для любого θ многообразие M_θ имеет сингулярное множество Σ_θ с коническим углом θ, а $M_\theta-\Sigma_\theta$ гомеоморфно фиксированному 3-многообразию M_0 относительно отображения $\phi_\theta : M_0 \to M_\theta-\Sigma_\theta$. Тогда мы имеем представления группы голономий $\rho_0 : \pi_1(M_0)\to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ и $\rho_\theta : \pi_1(M_\theta-\Sigma_\theta)\to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, где $0<\theta<\theta_0$, такие, что $\rho_\theta\circ(\phi_\theta)_*\to\rho_0$ — изоморфизм, где $(\phi_\theta)_*$ является индуцированным гомоморфизмом. Пусть P — периферическая подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(M_0)$.

Предложение 4.1. *Если M_0 имеет связующий класс $[\alpha]$, где $\alpha\in\pi_1(M_0)$, каспа, соответствующего P, то коническое многообразие M_θ также имеет связующий класс относительно $(\phi_\theta)_*(P)$, который представляется в виде $(\phi_\theta)_*(\alpha)$ при малых θ.*

Доказательство очевидно в силу свойств топологии Громова — Хаусдорфа, поскольку последовательность максимальных трубок сходится к орисферической окрестности. □

Предложение 4.2. *Пусть N — гиперболическое коническое многообразие, сингулярным множеством которого является простая замкнутая кривая, а конический угол меньше 2π. Пусть P — периферическая подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(N-\Sigma)$, а $\rho : \pi_1(N-\Sigma)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ — представление группы голономий гиперболической структуры на $N-\Sigma$. Пусть $\alpha\in\pi_1(N-\Sigma)$ представляет связующий класс максимальной трубки. Тогда радиус R максимальной трубки вокруг сингулярного множества удовлетворяет соотношению*

$$\cosh(2R)=\frac{|\operatorname{tr}\rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1})-2|+|\operatorname{tr}^2\rho(\gamma)-\operatorname{tr}\rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1})-2|}{|\operatorname{tr}^2\rho(\gamma)-4|},$$

где γ — любой элемент P такой, что $\rho(\gamma)\neq I$.

Доказательство. Пусть dev обозначает отображение развертки $\widetilde{N-\Sigma}\to\mathbb{H}^3$ для гиперболической структуры на $N-\Sigma$ такое, что $\mathrm{dev}\circ\gamma=\rho(\gamma)\circ\mathrm{dev}$ для любых $\gamma\in\pi_1(N-\Sigma)$. Пусть x, $\tilde{x}_0$, τ, $\tilde{\tau}_0$, U_Σ и $\widetilde{U}_0$, как выше. Тогда $\rho(P)$ оставляет неподвижной геодезическую $\widetilde{\Sigma}$ в $\mathbb{H}^3$, а $\mathrm{dev}(\widetilde{U}_0)$ является множеством точек в $\mathbb{H}^3$, лежащих в пределах радиуса максимальной трубки от $\widetilde{\Sigma}$. Пусть $\tilde{x}$ и $\tilde{\tau}$ — образы $\tilde{x}_0$ и $\tilde{\tau}_0$ при отображении $\mathrm{dev}\,|\overline{\widetilde{U}_0}$, соответственно. Тогда $\mathrm{dev}(\widetilde{U}_0)$ и $\mathrm{dev}(\alpha^{-1}(\widetilde{U}_0))$ являются гиперсферическими областями вокруг $\widetilde{\Sigma}$ и $\rho(\alpha^{-1})(\widetilde{\Sigma})$, соответственно, касательными в точке $\tilde{x}$ (рис. 4).

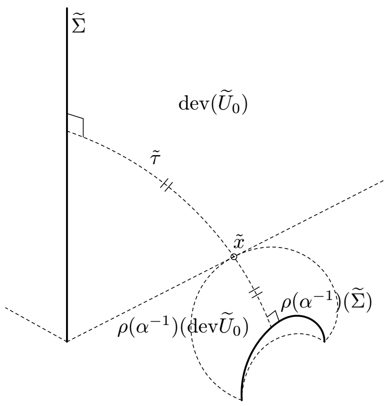

Рис. 4. Представитель связующего класса для максимальной трубки.

Напомним, что R — это половина расстояния между $\widetilde{\Sigma}$ и $\alpha^{-1}(\widetilde{\Sigma})$, а $\widetilde{\Sigma}$ — ось $\rho(\gamma)$ для любого $\gamma \in P$ такого, что $\rho(\gamma) \neq I$. В модели гиперболического пространства, реализованного в верхнем полупространстве, геодезические представляются в виде пар различных чисел, принадлежащих расширенной комплексной плоскости. Мы можем предположить, что $\widetilde{\Sigma}$ является вертикальной геодезической, заданной $(0, \infty)$, а $\rho(\gamma)$ имеет вид $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{bmatrix}$. Пусть $\rho(\alpha) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, где $ad - bc = 1$. Тогда геодезическая $\rho(\alpha^{-1})(\widetilde{\Sigma})$ задается посредством $(-b/a, -d/c)$. Таким образом, по следующей лемме гиперболический косинус cosh расстояния между $\widetilde{\Sigma}$ и $\rho(\alpha^{-1})(\widetilde{\Sigma})$ равен $|ad| + |bc| = |bc| + |bc+1|$. Поскольку $\operatorname{tr}\rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}) - 2 = -bc(u - 1/u)^2 = -bc(\operatorname{tr}^2\rho(\gamma) - 4)$, непосредственным вычислением нетрудно проверить равенство в предложении. $\square$

Лемма 4.3. *Расстояние d между геодезическими (w_1, w_2) и (w_3, w_4) удовлетворяет соотношению*

$$\cosh d = \frac{1 + |[w_1, w_2; w_3, w_4]|}{|1 - [w_1, w_2; w_3, w_4]|},$$

где $[w_1, w_2; w_3, w_4] = \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_2 - w_3)}$ — ангармоническое отношение.

Доказательство. Поскольку ангармонические отношения и гиперболические расстояния инвариантны относительно гиперболических изометрий, достаточно доказать лемму в случае $w_1 = -1$, $w_2 = 1$, $w_3 = -w$, $w_4 = w$ для некоторого $w \in \mathbb{C}$. Но в этом случае равенство очевидно. $\square$

Пусть θ — конический угол сингулярного множества, а γ_0 — элемент P такой, что $\rho(\gamma_0)$ не является эллиптическим элементом и сдвигается на минимальное расстояние вдоль своей оси. Пусть t — длина оси $\rho(\gamma_0)$, равная абсолютному значению действительной части $2\log(u)$, когда $\operatorname{tr}\rho(\gamma_0)$ равен $u + 1/u$, т. е. длине сингулярного множества. Пусть μ и $\hat{\mu}$ — длина и нормированная длина меридиана на границе максимальной трубки соответственно. Тогда

$$\mu = \theta \sinh(R) = \theta\sqrt{\frac{\cosh(2R) - 1}{2}}, \quad \hat{\mu}^2 = \frac{\theta \tanh(R)}{t} = \frac{\theta}{t}\sqrt{\frac{\cosh(2R) - 1}{\cosh(2R) + 1}} \tag{9}$$

и мы можем выразить μ и $\hat{\mu}$ в терминах конического угла и следов образов голономий некоторых элементов группы $\pi_1(N - \Sigma)$, соответствующих связующим классам.

§ 5. Максимальные трубки в конических многообразиях с сингулярностью «зацепление Уайтхеда»

Цель данного параграфа — доказать теорему 1.1. Выберем пару, состоящую из меридиана и параллели для каждого конца. Для каждой пары p_1,

q_1 взаимно простых целых чисел пусть $W(p_1, q_1)$ — многообразие, полученное из дополнения W к зацеплению Уайтхеда хирургией Дена на первом конце вдоль наклона (p_1, q_1). Если $|p_1| + |q_1|$ достаточно большое, то $W(p_1, q_1)$ гиперболическое. При малых $\theta > 0$ пусть $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$ — гиперболическое коническое многообразие, полученное обобщенной хирургией Дена на втором конце многообразия $W(p_1, q_1)$ вдоль наклона (p_2, q_2) с коническим углом θ, и пусть $\mu = \mu_{p_1,q_1,p_2,q_2}(\theta)$ — длина хирургической кривой на максимальной трубке конического многообразия $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$ вокруг сингулярности. Пусть $\hat\mu = \hat\mu_{p_1,q_1,p_2,q_2}(\theta)$ — нормированная длина хирургической кривой, т. е. равная длине μ, разделенной на квадратный корень из площади границы максимальной трубки.

Теорема 5.1. *Если $|p_1| + |q_1|$ достаточно большое, то для любой пары p_2, q_2 взаимно простых целых чисел, за исключением, быть может, одной, $\hat\mu^2$ — убывающая, а $\hat\mu^2 + \theta^2$ — возрастающая функции в окрестности точки $\theta = 0$ для $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$.*

Приведем набросок доказательства теоремы 5.1. Сначала дадим основные сведения о деформациях гиперболических структур на дополнении W к зацеплению Уайтхеда в окрестности полной структуры.

В п. 5.1 укажем параметризацию гиперболических структур в окрестности полной структуры, используя разложение W на идеальные тетраэдры, а в п. 5.2 получим все поднятия представлений группы голономий гиперболических структур на W в окрестности полной структуры с точностью до сопряжения. В п. 5.3, применяя результаты п. 5.2, получим формулы для $\hat\mu^2_{p_1,q_1,p_2,q_2}$ в терминах собственных значений m_2 и l_2 образов голономий $\mathscr{M}_2$ и $\mathscr{L}_2$ (для гиперболической структуры на W, индуцирующей гиперболическую коническую структуру на $W(p_1, q_1)_\theta(p_2, q_2)$).

Следует отметить, что существование легко вычислимого связующего класса для максимального каспа второго конца в W влечет существование единственного связующего класса для максимального каспа в $W(p_1, q_1)$.

В нашем случае если M имеет единственный связующий класс своего максимального каспа, то мы можем найти представителя данного класса и вычислить геометрическую компоненту множества нулей A-полинома, а затем получить нормированную длину меридиана в $M_\theta(p, q)$ в терминах θ.

Из сказанного ясно, что полное гиперболическое многообразие $W(p_1, q_1)$ с одним каспом (при больших $|p_1| + |q_1|$) имеет единственный связующий класс своего максимального каспа и мы можем легко найти представителя данного класса.

Применяя полученные ранее результаты, в п. 5.4 вычислим коэффициенты ряда Тейлора в разложении функции $\hat\mu^2_{p_1,q_1,p_2,q_2}(\theta)$ с точностью до второго порядка. Используя конкретные значения a_1, a_2, a_3, покажем справедливость теоремы 5.1, когда первый касп остается каспом, т. е. при $p_1 = q_1 = \infty$. Затем мы завершим доказательство за счет сходимости $a_i^{p_1,q_1} \to a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, полученной в § 6.

5.1. Параметризация гиперболических структур на дополнении к зацеплению Уайтхеда. Рассмотрим представление группы голономий и область Форда полной гиперболической структуры на дополнении к зацеплению Уайтхеда. Воспользуемся представлением

$$\langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha\gamma = \gamma\beta, \gamma\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\gamma \rangle$$

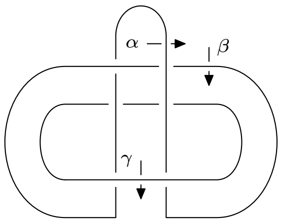

Рис. 5. Дополнение к зацеплению Уайтхеда с порождающими Виртингера.

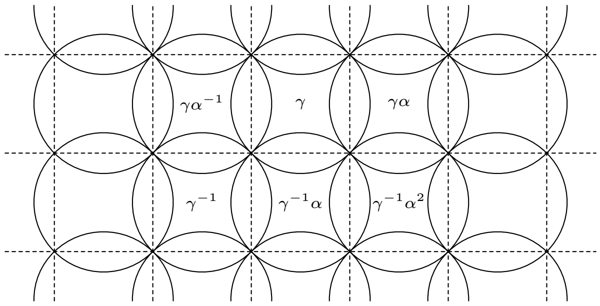

Рис. 6. Область Форда для второго каспа дополнения к зацеплению Уайтхеда.

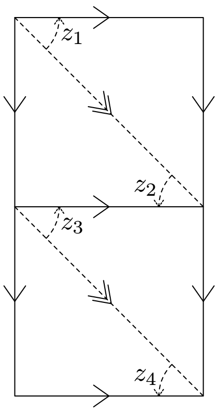

Рис. 7. Разложение W на идеальные тетраэдры.

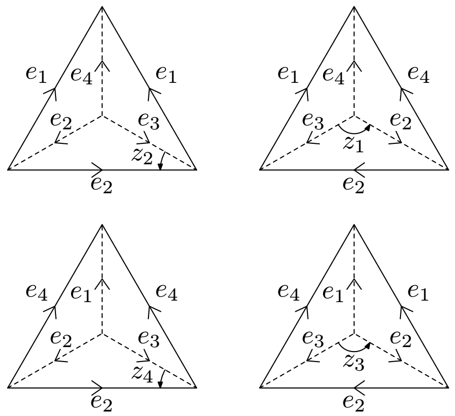

Рис. 8. Схема склейки тетраэдров.

фундаментальной группы W (рис. 5).

Зафиксируем следующую систему меридианов и параллелей для концов W: $\mathscr{M}_1 = \gamma, \mathscr{L}_1 = \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta, \mathscr{M}_2 = \alpha, \mathscr{L}_2 = \gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\beta^{-1}\alpha$.

Групповой гомоморфизм $\rho_0 : \pi_1(W) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, отображающий α, β, γ на

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\sqrt{-1} & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & -(1+\sqrt{-1})/2 \\ 1-\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

соответственно, является поднятием представления группы голономий полной гиперболической структуры на W.

Область Форда относительно второго каспа, соответствующая ρ_0, вместе с изометрическими сферами изображена на рис. 6.

Из описания области Форда второго конца получим разложение W на четыре идеальных тетраэдра (рис. 7).

Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — параметры, соответствующие четырем тетраэдрам, как изображено на рис. 8. Заметим, что параметры $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = (1+\sqrt{-1})/2$ соответствуют полной гиперболической структуре.

Для того чтобы индуцированная метрика была несингулярной вдоль ребер e_1, e_2, e_3, e_4, параметры z_i, $i = 1, \ldots, 4$, должны удовлетворять следующим условиям склейки (рис. 9):

$$(1-z_1)(1-z_4) = (1-z_2)(1-z_3), \quad (1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(1-z_4) = z_1z_2z_3z_4. \tag{10}$$

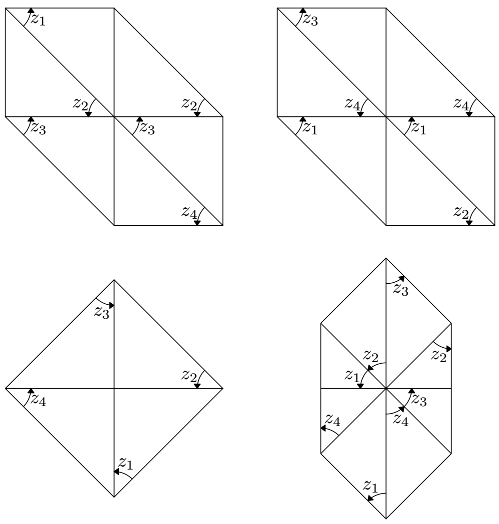

Рис. 9. Схема склейки ребер триангуляции.

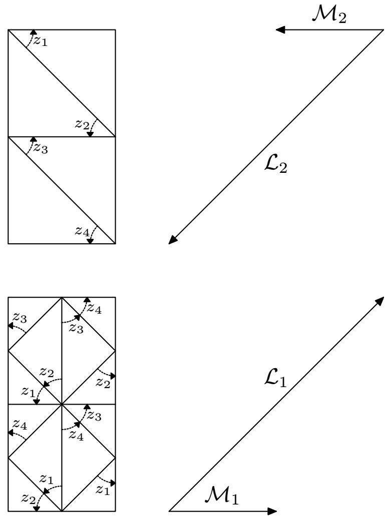

Рис. 10. Образы голономий меридианов и параллелей.

Для параметров z_i, $i = 1, \dots, 4$ (в окрестности z^0), удовлетворяющих данным условиям, имеем следующее соотношение между z_i, $i = 1, \dots, 4$, и собственными значениями соответствующих $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-образов голономий меридиана и параллели для второго конца (рис. 10):

$$\begin{aligned}
m_1 &= -\sqrt{\frac{1-z_4}{1-z_2}} \quad \left(= -\sqrt{\frac{1-z_3}{1-z_1}} \right), \\
l_1 &= -\frac{1-z_4}{1-z_2}\sqrt{\frac{z_3 z_4}{z_1 z_2}} \quad \left(= -\frac{1-z_3}{1-z_1}\sqrt{\frac{z_3 z_4}{z_1 z_2}} \right), \\
m_2 &= -\sqrt{\frac{1-z_2}{1-z_1}} \quad \left(= -\sqrt{\frac{1-z_4}{1-z_3}} \right), \\
l_2 &= -\frac{1-z_2}{1-z_1}\sqrt{\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} \quad \left(= -\frac{1-z_4}{1-z_3}\sqrt{\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}} \right),
\end{aligned} \tag{11}$$

где выбрана такая ветвь квадратного корня, которая принимает значение 1 в точке 1.

5.2. Представления группы голономий фундаментальной группы зацепления Уайтхеда.

Утверждение 5.2. *Для любых $x, y \in \mathbb{C}$ существует гомоморфизм $\rho : \pi_1(W) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такой, что*

$$\rho(\alpha) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix}, \qquad \rho(\beta) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1/x \end{bmatrix},$$
$$\rho(\gamma) = \begin{bmatrix} -\frac{x\{x^2y^2 + x^2(x^2-3)y - (x^2-1)^2\}}{zw} & z \\ zy & \frac{z(1-x^2)}{x} \end{bmatrix},$$

где

$$w = (x^2y - x^2 + 1)\{x^2y + (x^2-1)^2\}, \quad z = \sqrt{x^2(1-x^2-y)/w},$$

а поднятие представления группы голономий $\pi_1(W)$ в окрестности ρ_0 сопряжено одному из вышеперечисленных представлений, где (x,y,z) принадлежит окрестности точки $(-1, 2\sqrt{-1}, -(1+\sqrt{-1})/2)$.

Доказательство. Пусть $\rho : \pi_1(W) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ — поднятие представления группы голономий такое, что $\rho(\alpha)$ и $\rho(\beta)$ не коммутируют. Тогда, сопрягая в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, мы можем предположить, что $\rho(\alpha)$ и $\rho(\beta)$ имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1/x \end{bmatrix} \tag{12}$$

соответственно, поскольку $\rho(\alpha)$ и $\rho(\beta)$ сопряжены в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. В силу равенства $\alpha\gamma = \gamma\beta$ значение $\rho(\gamma)$ с необходимостью имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{x(1+yz^2)}{z(1-x^2)} & z \\ zy & \frac{z(1-x^2)}{x} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Наконец, из равенства $\gamma\alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\gamma$ получим z в терминах x, y, как и в утверждении. $\square$

Для заданного представления группы голономий ρ, описанного выше, возьмем x в качестве собственного значения m_2 образа голономии меридиана $\alpha = \mathscr{M}_2$ для второго конца. Поскольку

$$\rho(\mathscr{L}_2) = \begin{bmatrix} \frac{-1+x^2-x^2y}{-1+x^2+y} & * \\ 0 & \frac{-1+x^2+y}{-1+x^2-x^2y} \end{bmatrix},$$

мы должны взять собственное значение l_2 образа голономии параллели $\mathscr{L}_2$ в виде

$$l_2 = \frac{-1+x^2-x^2y}{-1+x^2+y}. \tag{14}$$

Затем получим следующее соотношение между собственными значениями m_1, l_1, m_2, l_2 образов голономий $\rho(\mathscr{M}_1)$, $\rho(\mathscr{L}_1)$, $\rho(\mathscr{M}_2)$, $\rho(\mathscr{L}_2)$, вычисляя $\mathrm{tr}^2\,\rho(\mathscr{M}_1)$ и $\mathrm{tr}\,\rho(\mathscr{L}_1)$ в терминах x, y, z в предыдущем утверждении:

$$\left(m_1 + \frac{1}{m_1}\right)^2 = \frac{(1+l_2)^2\left(m_2^4 - l_2\right)}{l_2\left(l_2+m_2^2\right)\left(m_2^2-1\right)},$$

$$l_1 + \frac{1}{l_1} = \frac{l_2^2\left(1+m_2^4\right) + l_2\left(-1+2m_2^2+2m_2^4+2m_2^6-m_2^8\right) + m_2^4 + m_2^8}{m_2^2\left(l_2+m_2^2\right)^2}.$$

5.3. Максимальные трубки в конических многообразиях с сингулярностью «зацепление Уайтхеда». Пусть Σ — сингулярное множество рассматриваемого конического многообразия. Элементы группы $\pi_1(W)$, которые представляют единственный связующий класс максимального каспа W относительно периферической подгруппы P_2 для второго конца, содержащие $\alpha \in \pi_1(W)$, проецируются на элемент группы $\pi_1(W(p_1,q_1)_\theta(p_2,q_2) - \Sigma)$, представляющий связующий класс при больших $|p_1| + |q_1|$ и малых θ.

Из описания области Форда W относительно второго конца в п. 5.1 видим, что $\gamma \in \pi_1(W)$ представляет единственный связующий класс второго каспа относительно P_2. Учитывая изометрические сферы образов подходящего представления группы голономий, заметим, что γ по-прежнему представляет единственный связующий класс $\pi_1(W(p_1,q_1,\infty,\infty))$ полного гиперболического многообразия с одним каспом при больших $|p_1|+|q_1|$ и гиперболическом $W(p_1,q_1,\infty,\infty)$.

Применяя результаты § 4 (предложение 4.2 и равенства (9)), видим, что для гиперболического конического многообразия $W(p_1,q_1)_\theta(p_2,q_2)$ нормированная длина $\hat{\mu}$ хирургической кривой на границе сингулярного множества удовлетворяет соотношению

$$\hat{\mu}^2 = \frac{\theta}{2|\operatorname{Re}(r_2\log(-m_2)+s_2\log(-l_2))|} \times \sqrt{\frac{|\operatorname{tr}\rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1})-2|+|\operatorname{tr}^2(\rho(\alpha))-\operatorname{tr}\rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1})-2|-|\operatorname{tr}^2(\rho(\alpha))-4|}{|\operatorname{tr}\rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1})-2|+|\operatorname{tr}^2(\rho(\alpha))-\operatorname{tr}\rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1})-2|+|\operatorname{tr}^2(\rho(\alpha))-4|}}, \tag{15}$$

где $\rho:\pi_1(W(p_1,q_1)_\theta(p_2,q_2)-\Sigma)\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ — поднятие представления группы голономий $W(p_1,q_1)_\theta(p_2,q_2)$, а r_2,s_2 — целые числа, удовлетворяющие равенству $p_2s_2-q_2r_2=1$ при больших $|p_1|+|q_1|$ и малых θ.

Соотношение $\operatorname{tr}\rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1})=\operatorname{tr}\rho(\alpha\beta^{-1})=2-y$ вытекает из уравнений (12) и (13). Используя (14), получим

$$\operatorname{tr}\rho(\alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1})-2=-\frac{(-1+m_2^2)(1-l_2)}{l_2+m_2^2}. \tag{16}$$

5.4. Завершение доказательства основного результата. Пусть W — дополнение к зацеплению Уайтхеда, и пусть $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{L}_2$, как и ранее, меридианы и параллели для концов W. Из (15), (16) имеем

$$\hat{\mu}^2 = \frac{\theta}{2|\operatorname{Re}(r_2\log(-m_2)+s_2\log(-l_2))|} \times \sqrt{\frac{\left|\frac{(m_2^2-1)(1-l_2)}{m_2^2+l_2}\right|+\left|\left(m_2-\frac{1}{m_2}\right)^2+\frac{(m_2^2-1)(1-l_2)}{m_2^2+l_2}\right|-|(m_2-\frac{1}{m_2})^2|}{\left|\frac{(m_2^2-1)(1-l_2)}{m_2^2+l_2}\right|+\left|\left(m_2-\frac{1}{m_2}\right)^2+\frac{(m_2^2-1)(1-l_2)}{m_2^2+l_2}\right|+|(m_2-\frac{1}{m_2})^2|}}, \tag{17}$$

где r_2,s_2 — целые числа, удовлетворяющие соотношению $p_2s_2-q_2r_2=1$ при больших $|p_1|+|q_1|$ и малых θ.

Используя A-полином $-l_2+l_2^2+4l_2m_2+m_2^4-l_2m_2^4$ многообразия $W(\infty,\infty)$ относительно $\{\mathscr{M}_2,\mathscr{L}_2\}$, имеем следующее разложение в ряд Тейлора при $p_1=q_1=\infty$:

$$l_2=-1+a_1(m_2+1)+\frac{a_2}{2}(m_2+1)^2+\frac{a_3}{6}(m_2+1)^3+O(|m_2+1|^4),$$

где $a_1=2+2i$, $a_2=2-6i$ и $a_3=-12$. Таким образом, в случае многообразия $W(p_1,q_1)$ при больших $|p_1|+|q_1|$ получим

$$l_2=-1+a_1^{p_1,q_1}(m_2+1)+\frac{a_2^{p_1,q_1}}{2}(m_2+1)^2+\frac{a_3^{p_1,q_1}}{6}(m_2+1)^3+O(|m_2+1|^4),$$

где $a_i^{p_1,q_1}\to a_i$ при $|p_1|+|q_1|\to\infty$, $i=1,2,3$, как и в п. 3.3. По лемме 6.6 имеем $a_2^{p_1,q_1}=a_1^{p_1,q_1}-(a_1^{p_1,q_1})^2$ при больших $|p_1|+|q_1|$.

Запишем $\hat{\mu}^2$ в терминах θ. Сначала предположим, что $p_1=q_1=\infty$. Используя (6)–(8), приходим к соотношениям

$$\left(m_2-\frac{1}{m_2}\right)^2=-\frac{\theta^2}{(p_2+a_1q_2)^2}+O(|\theta|^3),$$

$$\frac{(m_2^2-1)(1-l_2)}{m_2^2+l_2} = \frac{4}{2-a_1} + \frac{-6a_1+3(a_1)^2-2a_3}{12(2-a_1)^2(p_2+a_1q_2)^2}\theta^2 + O(|\theta|^3),$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(r_2\log(-m_2)+s_2\log(-l_2))\\&= -\frac{\operatorname{Im} a_1}{2|p_2+a_1q_2|^2}\theta - \frac{\operatorname{Im}\{(2a_1-3(a_1)^2+(a_1)^3-a_3)(p_2+\bar a_1 q_2)^4\}}{48|p_2+a_1q_2|^8}\theta^3 + O(|\theta|^4).\end{aligned}$$

Воспользуемся следующими фактами. Если $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ аналитична в точке 0 и $f(\theta) = c_1\theta^i + O(|\theta|^{i+1})$ в точке 0 для некоторого положительного целого числа i, то

$$\frac{1}{1+f(\theta)} = 1 - c_1\theta^i + O(|\theta|^{i+1}), \quad \sqrt{1+f(\theta)} = 1 + \frac{c_1}{2}\theta^i + O(|\theta|^{i+1}),$$

$$|1+f(\theta)| = 1 + \operatorname{Re}(c_1)\theta^i + O(|\theta|^{i+1}).$$

Положим

$$X = \frac{(m_2^2-1)(1-l)}{m_2^2+l}, \quad Y = \left(m_2 - \frac{1}{m_2}\right)^2,$$

$$R = |\operatorname{Re}\{r\log(-m_2)+s\log(-l_2)\}| \quad \text{и} \quad U = p_2 + a_1 q_2.$$

Разложим $\frac{\theta}{2R}\sqrt{\frac{|X|+|X+Y|-|Y|}{|X|+|X+Y|+|Y|}}$ в ряд по коническому углу θ с точностью до второго порядка. Имеем следующую последовательность равенств:

$$|X|+|X+Y|+|Y| = \frac{8}{|2-a_1|} + O(|\theta|^2),$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{|X|+|X+Y|-|Y|}{|X|+|X+Y|+|Y|}} &= \sqrt{1-\frac{2|Y|}{|X|+|X+Y|+|Y|}}\\&= 1 - \frac{|Y|}{|X|+|X+Y|+|Y|} + O(|\theta|^3) = 1 - \frac{|2-a_1|}{8|U|^2}\theta^2 + O(|\theta|^3),\end{aligned}$$

поскольку $Y = O(|\theta|^2)$. Также имеем

$$\frac{\theta}{2R} = \frac{|U|^2}{\operatorname{Im} a_1}\left(1 - \frac{\operatorname{Im}(A\overline{U}^4)}{24\operatorname{Im} a_1|U|^6}\theta^2\right) + O(|\theta|^3) = \frac{|U|^2}{\operatorname{Im} a_1} - \frac{\operatorname{Im}(A\overline{U}^4)}{24(\operatorname{Im} a_1)^2|U|^4}\theta^2 + O(|\theta|^3),$$

где $A = 2a_1 - 3a_1^2 + a_1^3 - a_3$, и предполагаем, что мнимая часть a_1 положительна.

Вычислим

$$\begin{aligned}&\frac{\theta}{2R}\sqrt{\frac{|X|+|X+Y|-|Y|}{|X|+|X+Y|+|Y|}}\\&\quad= \frac{|U|^2}{\operatorname{Im} a_1} - \frac{3|2-a_1|\operatorname{Im} a_1|U|^4 + \operatorname{Im}(A\overline{U}^4)}{24(\operatorname{Im} a_1)^2|U|^4}\theta^2 + O(|\theta|^3) = \frac{|p_2+a_1q_2|^2}{\operatorname{Im} a_1}\\&- \frac{3|2-a_1|\operatorname{Im} a_1|p_2+a_1q_2|^4 + \operatorname{Im}((2a_1-3a_1^2+a_1^3-a_3)(p_2+\bar a_1 q_2)^4)}{24(\operatorname{Im} a_1)^2|p_2+a_1q_2|^4}\theta^2 + O(|\theta|^3).\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}&\hat\mu^2(\theta) = \hat\mu^2_{p_1=\infty,q_1=\infty,p_2,q_2}(\theta)\\&\quad= \frac{|p_2+a_1q_2|^2}{|\operatorname{Im} a_1|} + \frac{B_0p_2^4 + B_1p_2^3q_2 + B_2p^2q^2 + B_3p_2q_2^3 + B_4q_2^4}{|p_2+a_1q_2|^4}\theta^2 + O(|\theta|^3), \qquad (18)\end{aligned}$$

где B_j, $j = 0, \dots, 4$, — непрерывные функции переменных a_i, $i = 1, 2, 3$, которые принимают следующие значения:

$$B_0 = -1/12, \quad B_1 = -2/3, \quad B_2 = -4, \quad B_3 = -32/3, \quad B_4 = -32/3. \tag{19}$$

Теперь предположим, что $|p_1| + |q_1|$ достаточно большое, и запишем $\hat{\mu}^2$ в терминах θ. Используя (6)–(8), запишем

$$\left(m_2 - \frac{1}{m_2}\right)^2 = -\frac{\theta^2}{(p_2 + a_1^{p_1,q_1} q_2)^2} + O(|\theta|^3),$$

$$\frac{(m_2^2 - 1)(1 - l_2)}{m_2^2 + l_2} = \frac{4}{2 - a_1^{p_1,q_1}} + \frac{-6a_1^{p_1,q_1} + 3\left(a_1^{p_1,q_1}\right)^2 - 2a_3^{p_1,q_1}}{12\left(2 - a_1^{p_1,q_1}\right)^2\left(p_2 + a_1^{p_1,q_1} q_2\right)^2}\theta^2 + O(|\theta|^3),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(r_2 \log(-m_2) + s_2 \log(-l_2)) &= -\frac{\operatorname{Im} a_1^{p_1,q_1}}{2|p_2 + a_1^{p_1,q_1} q_2|^2}\theta \\ &- \frac{\operatorname{Im}\left\{\left(2a_1^{p_1,q_1} - 3\left(a_1^{p_1,q_1}\right)^2 + \left(a_1^{p_1,q_1}\right)^3 - a_3^{p_1,q_1}\right)\left(p_2 + \overline{a_1^{p_1,q_1}} q_2\right)^4\right\}}{48|p_2 + a_1^{p_1,q_1} q_2|^8}\theta^3 + O(|\theta|^4). \end{aligned} \tag{20}$$

Как и выше, получим разложение

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^2_{p_1,q_1,p_2,q_2}(\theta) &= \frac{\left|p_2 + a_1^{p_1,q_1} q_2\right|^2}{\left|\operatorname{Im} a_1^{p_1,q_1}\right|} \\ &+ \frac{B_0^{p_1,q_1} p_2^4 + B_1^{p_1,q_1} p_2^3 q_2 + B_2^{p_1,q_1} p_2^2 q_2^2 + B_3^{p_1,q_1} p_2 q_2^3 + B_4^{p_1,q_1} q_2^4}{\left|p_2 + a_1^{p_1,q_1} q_2\right|^4}\theta^2 \end{aligned}$$

с точностью до второго порядка при больших $|p_1| + |q_1|$, где каждое $B_j^{p_1,q_1}$, $j = 0, \dots, 4$, является константой, непрерывно зависящей от $a_1^{p_1,q_1}, a_2^{p_1,q_1}, a_3^{p_1,q_1}$, т. е.

$$B_j^{p_1,q_1} = B_j\left(a_1^{p_1,q_1}, a_2^{p_1,q_1}, a_3^{p_1,q_1}\right), \quad j = 0, \dots, 4,$$

для непрерывной функции B_j, $j = 0, \dots, 4$, определенной в окрестности точки (a_1, a_2, a_3) из $\mathbb{C}^3$.

Заметим, что $B_j^{p_1,q_1}$, $j = 0, \dots, 4$, как функция своих переменных совпадает с функцией B_j, $j = 0, \dots, 4$.

Все значения функции $\frac{-x^4-8x^3-48x^2-128x-128}{12(x^2+4x+8)^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ лежат в отрезке $[-1/6, -1/12] \subset (-1, 0)$. Таким образом, значения коэффициента при члене второго порядка в (18)

$$\frac{-p_2^4 - 8p_2^3 q_2 - 48p_2^2 q_2^2 - 128 p_2 q_2^3 - 128 q_2^4}{12\left(p_2^2 + 4p_2 q_2 + 8q_2^2\right)^2} \tag{21}$$

лежат в отрезке $[-1/6, -1/12] \subset (-1, 0)$ для любой пары p_2, q_2 взаимно простых целых чисел. Данное утверждение и вычисление $\hat{\mu}^2 + \theta^2$ завершают наше доказательство в случае бесконечных p_1 и q_1.

Поскольку $a_1^{p_1,q_1} \to a_1$ и $B_j^{p_1,q_1} \to B_j$, $j = 0, \dots, 4$, при $|p_1| + |q_1| \to \infty$, доказательство в случае $\hat{\mu}^2_{p_1,q_1,p_2,q_2}$ полностью завершено.

§ 6. Сходимость коэффициентов ряда Тейлора геометрических множителей A-полиномов

В данном параграфе приведем доказательство теоремы 3.2. Мы используем обозначения, введенные в п. 3.3.

Пусть M — полное гиперболическое многообразие с двумя каспами, которое разлагается в ν идеальных тетраэдров. Пусть точка $\mathbf{z}^0 = \bigl(z_1^0, \dots, z_\nu^0\bigr) \in \mathbb{C}^\nu$ соответствует полной структуре. Пусть $\mathscr{V}$ — пересечение некоторой окрестности $\mathbf{z}^0$ в $\mathbb{C}^\nu$ и множества точек, удовлетворяющих описанному выше условию склейки.

Согласно результату из [6] существует голоморфное вложение ι некоторого открытого подмножества V из $\mathbb{C}^2$ на $\mathscr{V}$ (при необходимости стягивая $\mathscr{V}$).

Пусть $\rho_0 : \pi_1(M) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ — поднятие представления группы голономий полной структуры, и пусть $m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0$ — собственные значения $\rho(\mathscr{M}_1)$, $\rho(\mathscr{L}_1)$, $\rho(\mathscr{M}_2)$, $\rho(\mathscr{L}_2)$.

По изложенному выше подходящим выбором собственных значений m_1, l_1, m_2, l_2, соответствующих $\rho(\mathscr{M}_1)$, $\rho(\mathscr{L}_1)$, $\rho(\mathscr{M}_2)$, $\rho(\mathscr{L}_2)$, для поднятий ρ представлений группы голономий в окрестности гиперболических структур получим голоморфное отображение $G : \mathscr{V} \to \mathbb{C}^4$, которое можно рассматривать как пару отображений $G_1, G_2 : \mathscr{V} \to \mathbb{C}^2$, где $G_1 = (m_1, l_1)$ и $G_2 = (m_2, l_2)$.

Более того, мы можем выбрать G так, что $G_1(\mathbf{z}^0) = \bigl(m_1^0, l_1^0\bigr)$ и $G_2(\mathbf{z}^0) = \bigl(m_2^0, l_2^0\bigr)$. Пусть $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{V}$ обозначает множество $G_1^{-1}\bigl\{\bigl(m_1^0, l_1^0\bigr)\bigr\} \cap \mathscr{V}$, а $C_1 \subset V$ — множество $\iota^{-1}(\mathscr{C}_1) \cap V$. Пусть $(u_0, v_0) \in V$ — точка, соответствующая полной структуре, т. е. являющаяся прообразом $\iota^{-1}G^{-1}\bigl\{\bigl(m_1^0, l_1^0, m_2^0, l_2^0\bigr)\bigr\}$.

Приведем этапы доказательства. Сначала покажем гладкость геометрической компоненты C_1 в пространстве параметров тетраэдра, где первый касп остается каспом. Здесь воспользуемся свойствами градиентов m_1 и теоремой 2.1. Мы реализуем C_1 как график функции от одного параметра к другому. Во-вторых, покажем гладкость геометрической компоненты $C_1^{p_1,q_1}$ в пространстве параметров тетраэдра, где на первом каспе выполнена (p_1, q_1)-хирургия Дена. Для доказательства данного утверждения используем метод непрерывности для градиентов. Как и в предыдущем случае, описываем $C_1^{p_1,q_1}$ как график функции. Затем покажем, что последовательность коэффициентов ряда Тейлора функций, соответствующих $C_1^{p_1,q_1}$, сходится к коэффициентам ряда Тейлора функции, соответствующей C_1. Для завершения доказательства заменим переменные на (m_1, l_1).

На первом шаге покажем гладкость C_1.

Для $(u, v) \in V$ обозначим $G_1\iota(u, v)$ и $G_2\iota(u, v)$ через (m_1, l_1) и (m_2, l_2) соответственно, считая их функциями (u, v). Используя результат из [6], заметим, что градиенты ∇m_1 и ∇m_2 линейно независимы в точке (u_0, v_0) (градиент ∇ берется относительно (u, v)). Аналогично ∇l_1 и ∇l_2 линейно независимы в точке (u_0, v_0).

Более того, по теореме 2.1 градиенты $\nabla m_1(u_0, v_0)$ и $\nabla l_1(u_0, v_0)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ (хотя они зависимы над $\mathbb{C}$). Таким образом, изменяя параметры $(u, v) \mapsto (v, u)$, где это необходимо, мы можем предположить, что

$$\frac{\partial m_1}{\partial v}\bigg|_{(u_0,v_0)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial l_1}{\partial v}\bigg|_{(u_0,v_0)} \qquad \text{линейно независимы над } \mathbb{R}.$$

Поскольку $\nabla m_1|_{(u_0,v_0)} \neq 0$, то $\mathscr{C}_1$ и C_1 являются гладкими кривыми в окрестности $\mathbf{z}^0$ и (u_0, v_0) соответственно. Так как $\frac{\partial m_1}{\partial v} \neq 0$, то C_1 является графиком голоморфного отображения

$$v - v_0 = c_1(u-u_0) + \frac{c_2}{2}(u-u_0)^2 + \frac{c_3}{6}(u-u_0)^3 + O(|u-u_0|^4)$$

в точке (u_0, v_0). Здесь $c_1 \neq 0$ в силу того, что $\frac{\partial m_1}{\partial u} \neq 0$.

На втором шаге проведем аналогичные рассуждения для $C_1^{p_1,q_1}$.

Для каждой пары p_1, q_1 взаимно простых целых чисел, где $|p_1|+|q_1|$ достаточно большое, возьмем $\big(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\big) \in \mathscr{V}$ такое, что

$$p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) = \pi\sqrt{-1},$$

с тем, чтобы $m_2\big(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\big) = m_2^0$ и $l_2\big(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\big) = l_2^0$. Точка $\big(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\big)$ может быть взята так, что гиперболическое многообразие получено (p_1,q_1)-хирургией Дена на первом каспе, а второй касп остается каспом. Поскольку последовательность таких многообразий сходится к W при $|p_1|+|q_1| \to \infty$, видим, что $u_0^{p_1,q_1} \to u_0$ и $v_0^{p_1,q_1} \to v_0$ при $|p_1|+|q_1| \to \infty$.

Пусть $C_1^{p_1,q_1}$ — множество точек (u,v) из V, удовлетворяющих равенству $p_1 \log\big(\frac{m_1}{m_1^0}\big) + q_1 \log\big(\frac{l_1}{l_1^0}\big) = \pi\sqrt{-1}$.

Предложение 6.1. *Геометрическая компонента $C_1^{p_1,q_1}$ является гладкой кривой в окрестности точки $\big(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\big)$ при достаточно больших $|p_1|+|q_1|$.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right)\right\} = \frac{p_1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial v}.$$

Поскольку значения функций $\frac{\partial m_1}{m_1 \partial v}$ и $\frac{\partial l_1}{l_1 \partial v}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ в любой точке $(u,v) \in V$ окрестности (u_0,v_0), то $\frac{\partial}{\partial v}\big\{p_1 \log\big(\frac{m_1}{m_1^0}\big) + q_1 \log\big(\frac{l_1}{l_1^0}\big)\big\}$ не принимает значение 0 в окрестности (u_0,v_0). Таким образом, $\nabla\big\{p_1 \log\big(\frac{m_1}{m_1^0}\big) + q_1 \log\big(\frac{l_1}{l_1^0}\big)\big\}$ не обращается в нуль в окрестности (u_0,v_0). $\square$

Для $(u,v) \in V$ заметим, что $m_1 = m_1^0$ $(=\pm 1)$ тогда и только тогда, когда $l_1 = l_1^0$, поскольку параболические элементы группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ не коммутируют с эллиптическими или локсодромическими элементами. Таким образом, ∇m_1 и ∇l_1 параллельны в точке (u_0,v_0), т. е.

$$\frac{\partial m_1}{\partial u}\frac{\partial l_1}{\partial v} - \frac{\partial m_1}{\partial v}\frac{\partial l_1}{\partial u} = 0 \quad \text{в точке } (u_0,v_0).$$

Предложение 6.2. *Направление $\nabla\big\{p_1 \log\big(\frac{m_1}{m_1^0}\big) + q_1 \log\big(\frac{l_2}{l_2^0}\big)\big\}\big(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\big)$ сходится к направлению $\nabla m_1(u_0,v_0)$ при $|p_1|+|q_1| \to \infty$.*

Доказательство. По определению $\nabla m_1 = \big(\frac{\partial m_1}{\partial u}, \frac{\partial m_1}{\partial v}\big)$ и

$$\nabla\left\{p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_2}{l_2^0}\right)\right\} = \left(\frac{p_1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial u} + \frac{q_1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}, \frac{p_1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial v}\right).$$

Но по следующей лемме

$$\left.\frac{\frac{p_1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial u} + \frac{q_1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}}{\frac{p_1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial v}}\right|_{(x_0^{p_1,q_1}, y_0^{p_1,q_1})} \to \left.\frac{\frac{\partial m_1}{\partial u}}{\frac{\partial m_1}{\partial v}}\right|_{(x_0,y_0)}$$

при $|p_1|+|q_1| \to \infty$. $\square$

Лемма 6.3. *Пусть a, b, c, d — комплексные числа такие, что c и d линейно независимы над $\mathbb{R}$, а $ad - bc = 0$. Пусть A, B, C, D — функции на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ такие, что*

$$A(p,q) \to a, \quad B(p,q) \to b, \quad C(p,q) \to c, \quad D(p,q) \to d \quad \textit{при} \quad |p| + |q| \to \infty.$$

Тогда

$$\frac{Ap + Bq}{Cp + Dq} \to \frac{ap + bq}{cp + dq} \ (= a/c = b/d) \quad \textit{при } |p| + |q| \to \infty.$$

На третьем шаге покажем сходимость коэффициентов.

Из предложений 6.1 и 6.2 видим, что при достаточно больших $|p_1| + |q_1|$, $C_1^{p_1,q_1}$ является графиком голоморфного отображения

$$v^{p_1,q_1} - v_0^{p_1,q_1} = c_1^{p_1,q_1}\big(u^{p_1,q_1} - u_0^{p_1,q_1}\big) + \frac{c_2^{p_1,q_1}}{2}\big(u^{p_1,q_1} - u_0^{p_1,q_1}\big)^2 \\ + \frac{c_3^{p_1,q_1}}{6}\big(u^{p_1,q_1} - u_0^{p_1,q_1}\big)^3 + O\big(\big|u^{p_1,q_1} - u_0^{p_1,q_1}\big|^4\big)$$

в точке $\big(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\big)$, где $c_1^{p_1,q_1} \neq 0$.

Пусть x — переменная, равная u, если $(u,v) \in C_1$. Пусть y — функция от x, равная v в точке x.

Предложение 6.4. *Имеет место сходимость $c_i^{p_1,q_1} \to c_i$ при $|p_1| + |q_1| \to \infty$, $i = 1, 2, 3$.*

Доказательство. Любая точка $(u,v) \in C_1$ удовлетворяет соотношению

$$p_1 \left\{ \frac{1}{m_1^0}\big(m_1 - m_1^0\big) - \frac{1}{2}\big(m_1 - m_1^0\big)^2 + \frac{1}{3m_1^0}\big(m_1 - m_1^0\big)^3 \right\} \\ + q_1 \left\{ \frac{1}{l_1^0}\big(l_1 - l_1^0\big) - \frac{1}{2}\big(l_1 - l_1^0\big)^2 + \frac{1}{3l_1^0}\big(l_1 - l_1^0\big)^3 \right\} = 0 \quad (22)$$

для любой пары p_1,q_1 целых чисел. Левая часть равенства является разложением в ряд Тейлора функции $p_1 \log\big(\frac{m_1}{m_1^0}\big) + q_1 \log\big(\frac{l_1}{l_1^0}\big)$ в точке (m_1^0, l_1^0) с точностью до третьего порядка.

Дифференцируя предыдущее равенство относительно x, получим следующее соотношение:

$$p_1 \left\{ \frac{1}{m_1^0}\frac{dm_1}{dx} - \big(m_1 - m_1^0\big)\frac{dm_1}{dx} + \frac{1}{m_1^0}\big(m_1 - m_1^0\big)^2\frac{dm_1}{dx} \right\} \\ + q_1 \left\{ \frac{1}{l_1^0}\frac{dl_1}{dx} - \big(l_1 - l_1^0\big)\frac{dl_1}{dx} + \frac{1}{l_1^0}\big(l_1 - l_1^0\big)^2\frac{dl_1}{dx} \right\} = 0. \quad (23)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial v}$ к $f = m_1$ и $f = l_1$ в (23), приходим к равенству

$$c_1 = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=u_0} = -\frac{\frac{p_1}{m_1^0}\frac{\partial m_1}{\partial u} + \frac{q_1}{l_1^0}\frac{\partial l_1}{\partial u}}{\frac{p_1}{m_1^0}\frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1^0}\frac{\partial l_1}{\partial v}}\Bigg|_{(u,v)=(x_0,y_0)}.$$

С другой стороны, любая точка $(u,v) \in C_1^{p_1,q_1}$ удовлетворяет равенству

$$p_1 \log\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right) + q_1 \log\left(\frac{l_1}{l_1^0}\right) = \pi\sqrt{-1}.$$

Пусть x^{p_1,q_1} — переменная на $C_1^{p_1,q_1}$, равная u, и пусть y^{p_1,q_1} — функция на $C_1^{p_1,q_1}$, равная v. Мы рассматриваем y^{p_1,q_1} как функцию от x^{p_1,q_1}.

Дифференцируя относительно x^{p_1,q_1}, получим соотношение

$$\frac{p_1}{m_1}\frac{dm_1}{dx^{p_1,q_1}} + \frac{q_1}{l_1}\frac{dl_1}{dx^{p_1,q_1}} = 0. \tag{24}$$

Используя правило дифференцирования сложной функции в (24), имеем

$$c_1^{p_1,q_1} = \frac{dy^{p_1,q_1}}{dx^{p_1,q_1}}\bigg|_{x^{p_1,q_1}=x_0^{p_1,q_1}} = -\frac{\frac{p_1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial u} + \frac{q_1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial u}}{\frac{p_1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial v}}\Bigg|_{(u,v)=(u_0^{p_1,q_1},v_0^{p_1,q_1})}.$$

По лемме 6.3 мы видим, что $c_1^{p_1,q_1} \to c_1$ при $|p_1|+|q_1| \to \infty$.

Дифференцируя (23) относительно x и используя равенство

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial v},$$

запишем

$$\begin{aligned} c_2 = \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=u_0} = -\Bigg[&\frac{p_1}{m_1^0}\left\{\frac{\partial^2 m_1}{\partial u^2} + 2c_1\frac{\partial^2 m_1}{\partial u\partial v} + c_1^2\frac{\partial^2 m_1}{\partial v^2} - \frac{1}{m_1^0}\left(\frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1\frac{\partial m_1}{\partial v}\right)^2\right\} \\ &+\frac{q_1}{l_1^0}\left\{\frac{\partial^2 l_1}{\partial u^2} + 2c_1\frac{\partial^2 l_1}{\partial u\partial v} + c_1^2\frac{\partial^2 l_1}{\partial v^2} - \frac{1}{l_1^0}\left(\frac{\partial l_1}{\partial u} + c_1\frac{\partial l_1}{\partial v}\right)^2\right\}\Bigg] \\ &\bigg/\left[\frac{p_1}{m_1^0}\frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1^0}\frac{\partial l_1}{\partial v}\right]\bigg|_{(u,v)=(u_0,v_0)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Однако, дифференцируя (24) относительно x^{p_1,q_1}, получим

$$\begin{aligned} c_2^{p_1,q_1} &= \frac{d^2y^{p_1,q_1}}{d(x^{p_1,q_1})^2}\bigg|_{x^{p_1,q_1}=x_0^{p_1,q_1}} \\ &= -\Bigg[\frac{p_1}{m_1}\left\{\frac{\partial^2 m_1}{\partial u^2} + 2c_1^{p_1,q_1}\frac{\partial^2 m_1}{\partial u\partial v} + (c_1^{p_1,q_1})^2\frac{\partial^2 m_1}{\partial v^2} - \frac{1}{m_1}\left(\frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1^{p_1,q_1}\frac{\partial m_1}{\partial v}\right)^2\right\} \\ &\quad+\frac{q_1}{l_1}\left\{\frac{\partial^2 l_1}{\partial u^2} + 2c_1^{p_1,q_1}\frac{\partial^2 l_1}{\partial u\partial v} + (c_1^{p_1,q_1})^2\frac{\partial^2 l_1}{\partial v^2} - \frac{1}{l_1}\left(\frac{\partial l_1}{\partial u} + c_1^{p_1,q_1}\frac{\partial l_1}{\partial v}\right)^2\right\}\Bigg] \\ &\quad\bigg/\left[\frac{p_1}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial v} + \frac{q_1}{l_1}\frac{\partial l_1}{\partial v}\right]\bigg|_{(u,v)=(x_0^{p_1,q_1},y_0^{p_1,q_1})}. \end{aligned} \tag{26}$$

Опять используя лемму 6.3, видим, что $c_2^{p_1,q_1} \to c_2$ при $|p_1|+|q_1| \to \infty$. Продолжая аналогичным образом, мы можем также показать, что $c_3^{p_1,q_1} \to c_3$ при $|p_1|+|q_1| \to \infty$. $\square$

На четвертом шаге рассмотрим голоморфное отображение $G_2\iota = (m_2, l_2) : V \to \mathbb{C}^2$, определенное в окрестности точки (x_0, y_0).

Предложение 6.5. *Образы $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_1^{p_1,q_1}$ соответствующих геометрических компонент C_1 и $C_1^{p_1,q_1}$ при отображении $G_2\iota$, когда $|p_1|+|q_1|$ достаточно большое, являются гладкими кривыми, проходящими через точку (m_2^0, l_2^0). Кроме того, $\mathscr{C}_1$ является графиком голоморфного отображения*

$$l_2 = l_2^0 + a_1(m_2 - m_2^0) + \frac{a_2}{2}(m_2 - m_2^0)^2 + \frac{a_3}{6}(m_2 - m_2^0)^3 + O(|m_2 - m_2|^4) \tag{27}$$

в окрестности точки $\left(m_2^0, l_2^0\right)$, *где* $a_1 \neq 0$, *а* $\mathscr{C}_1^{p_1,q_1}$ *является графиком голоморфного отображения*

$$l_2 = l_2^0 + a_1^{p_1,q_1}\left(m_2 - m_2^0\right) + \frac{a_2^{p_1,q_1}}{2}\left(m_2 - m_2^0\right)^2 + \frac{a_3^{p_1,q_1}}{6}\left(m_2 - m_2^0\right)^3 + O(|m_2 - m_2|^4). \tag{28}$$

Доказательство. Геометрическая компонента C_1 является графиком голоморфного отображения, которое разлагается в следующий ряд Тейлора:

$$v - v_0 = c_1(u - u_0) + \frac{c_2}{2}(u - u_0)^2 + \frac{c_3}{6}(u - u_0)^3 + O(|u - u_0|^4)$$

в окрестности точки (u_0, v_0). По определению C_1 имеем $m_1 = m_1^0$ для точек на C_1. Таким образом,

$$\frac{dm_1}{dx}\bigg|_{x=u_0} = \left[\frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1\frac{\partial m_1}{\partial v}\right]\bigg|_{(u_0,v_0)} = 0.$$

Поскольку $\nabla m_1(u_0, v_0)$ и $\nabla m_2(u_0, v_0)$ линейно независимы, с необходимостью

$$\frac{dm_2}{dx}\bigg|_{x=u_0} = \left[\frac{\partial m_2}{\partial u} + c_1\frac{\partial m_2}{\partial v}\right]\bigg|_{(u,v)=(u_0,v_0)} \neq 0.$$

Итак, отображение $G_2\iota$, суженное на C_1, несингулярно в точке (u_0, v_0); следовательно, образ C_1 при отображении $G_2\iota$ является гладкой кривой, проходящей через точку $\left(m_2^0, l_2^0\right)$.

Напомним, что $C_1^{p_1,q_1}$ — график голоморфного отображения с разложением

$$v - v_0^{p_1,q_1} = c_1^{p_1,q_1}\left(u - u_0^{p_1,q_1}\right) + \frac{c_2^{p_1,q_1}}{2}\left(u - u_0^{p_1,q_1}\right)^2 + \frac{c_3^{p_1,q_1}}{6}\left(u - u_0^{p_1,q_1}\right)^3 + O\left(\left|u - u_0^{p_1,q_1}\right|^4\right) \tag{29}$$

в точке $\left(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\right)$.

Поскольку $c_1^{p_1,q_1} \to c_1$ и $\left(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\right) \to (u_0, v_0)$ при $|p_1| + |q_1| \to \infty$, для достаточно больших $|p_1| + |q_1|$ имеем

$$\frac{dm_2}{dx}\bigg|_{x=u_0^{p_1,q_1}} = \left[\frac{\partial m_2}{\partial u} + c_1^{p_1,q_1}\frac{\partial m_2}{\partial v}\right]\bigg|_{(u,v)=\left(u_0^{p_1,q_1}, v_0^{p_1,q_1}\right)} \neq 0.$$

Выше мы показали, что

$$\frac{dm_2}{dx}\bigg|_{x=x_0} \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{dm_2}{dx^{p_1,q_1}}\bigg|_{x^{p_1,q_1}=x_0^{p_1,q_1}} \neq 0$$

при достаточно больших $|p_1| + |q_1|$. Аналогично

$$\frac{dl_2}{dx}\bigg|_{x=u_0} \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{dl_2}{dx}\bigg|_{x=u_0^{p_1,q_1}} \neq 0$$

при достаточно больших $|p_1| + |q_1|$. Таким образом, предложение доказано. □

Доказательство теоремы 3.2. Дифференцируя (27) относительно x и вычисляя в точке $x = u_0$, получим

$$\frac{dl_1}{dx}\bigg|_{x=u_0} = a_1\frac{dm_1}{dx}\bigg|_{x=u_0}.$$

Следовательно,

$$a_1 = \left. \frac{\frac{\partial l_1}{\partial u} + c_1 \frac{\partial l_1}{\partial v}}{\frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1 \frac{\partial m_1}{\partial v}} \right|_{(u,v)=(u_0,v_0)}.$$

Аналогично из (28) вытекает, что

$$a_1^{p_1,q_1} = \left. \frac{\frac{\partial l_1}{\partial u} + c_1^{p_1,q_1} \frac{\partial l_1}{\partial v}}{\frac{\partial m_1}{\partial u} + c_1^{p_1,q_1} \frac{\partial m_1}{\partial v}} \right|_{(u,v)=(x_0^{p_1,q_1},y_0^{p_1,q_1})}.$$

Поскольку по предложению 6.4 имеем $c_1^{p_1,q_1} \to c_1$ при $|p_1|+|q_1| \to \infty$, то $a_1^{p_1,q_1} \to a_1$ при $|p_1|+|q_1| \to \infty$.

Продолжая аналогичным образом, используя последовательное дифференцирование, также получим, что $a_i^{p_1,q_1} \to a_i$ при $|p_1|+|q_1| \to \infty$, $i = 2, 3$. $\square$

Завершим данный параграф следующей леммой, вытекающей из инвариантности кривых $G_2\iota\big(C_1^{p_1,q_1}\big)$ при инволюции $(m_2, l_2) \mapsto (1/m_2, 1/l_2)$, суженной на некоторую окрестность точки $\big(m_2^0, l_2^0\big)$ в $\mathbb{C}^2$.

Лемма 6.6. *Имеет место равенство* $a_2^{p_1,q_1} = -m_2^0 a_1^{p_1,q_1} + l_2^0\big(a_1^{p_1,q_1}\big)^2$ *при достаточно больших* $|p_1|+|q_1|$.

Доказательство. По результату из [6] существует инволюция $\mathscr{I} : V \to V$ такая, что $G_1\iota\mathscr{I}(u,v) = (m_1, l_1)$ и $G_2\iota\mathscr{I}(u,v) = (1/m_2, 1/l_2)$, где $G_1\iota(u,v) = (m_1, l_1)$ и $G_2\iota(u,v) = (m_2, l_2)$. Поскольку $C_1^{p_1,q_1}$ инвариантно относительно $\mathscr{I}$, то $G_2\iota\big(C_1^{p_1,q_1}\big)$ инвариантно относительно инволюции $(m_2, l_2) \mapsto (1/m_2, 1/l_2)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hodgson C., Kerckhoff S.* Universal bounds for hyperbolic Dehn surgery. (Preprint. Available at arXiv:math.GT/0204345).
2. *Bleiler S., Hodgson C.* Spherical space forms and Dehn-filling // Topology. 1996. V. 35, N 3. P. 809–833.
3. *Kerckhoff S.* Deformations of hyperbolic cone manifolds // Topology and Teichmüller spaces. Singapore: World Sci., 1996. P. 101–114.
4. *Culler M., Shalen P.* Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds // Ann. Math. 1983. V. 117. P. 109–146.
5. *Dowty J.* Ortholengths and hyperbolic Dehn surgery. Thes. … doct. math. Univ. Melbourne, 2000.
6. *Neumann W., Zagier D.* Volumes of hyperbolic 3-manifolds // Topology. 1985. V. 24. P. 307–332.
7. *S. Kojima* Nonsingular parts of hyperbolic 3-cone-manifolds // Topology and Teichmüller spaces. Singapore: World Sci., 1996. P. 115–122.
8. *Kojima S.* Hyperbolic 3-manifolds singular along knots // Chaos Solitons Fractals. 1998. V. 9, N 4–5. P. 765–777.
9. *Cooper D., Culler M., Gillet H., Long D., Shalen P.* Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds // Invent. Math. 1994. V. 118, N 1. P. 47–84.

Статья поступила 1 февраля 2005 г.

Suhyoung Choi
Department of Mathematics, KAIST
305-701 Daejeon, South Korea
schoi@math.kaist.ac.kr

Jungkeun Lee
Electronics and Telecommunications Research Institute
305–350 Daejeon, South Korea
jklee@etri.re.kr