Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 512.554.5

НЕПРИВОДИМЫЕ БИНАРНО $(-1,1)$–БИМОДУЛИ НАД ПРОСТЫМИ КОНЕЧНОМЕРНЫМИ АЛГЕБРАМИ

С. В. Пчелинцев

Аннотация: Доказано, что всякий неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над алгеброй A альтернативен в каждом из следующих случаев: а) A — композиционная алгебра над полем характеристики, отличной от 2 и 3; б) A — простая конечномерная альтернативная алгебра над полем характеристики 0.

Ключевые слова: неприводимый бимодуль, бинарно $(-1,1)$-алгебра, композиционная алгебра, простая альтернативная алгебра.

1. Введение. Хорошо известно строение простых альтернативных алгебр и альтернативных бимодулей над композиционными алгебрами [1–3]. Так, простая альтернативная алгебра либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли — Диксона над своим центром, а всякий альтернативный бимодуль над композиционной алгеброй вполне приводим и является прямой суммой бимодулей типа reg, $-reg$, cay, $-cay$ (последние два типа возникают только в случае ассоциативной композиционной алгебры).

Строение простых правоальтернативных алгебр и бимодулей над ними является открытой проблемой. В 1977 г. И. В. Михеев построил пример простой алгебры с тождеством $x^3 = 0$ [4], а в 1984 г. В. Г. Скосырский [5] доказал, что правоальтернативная невырожденная алгебра альтернативна, в частности, простая правоальтернативная алгебра с единицей альтернативна. В 2001 г. Мураками и И. П. Шестаков [6] доказали бесконечность множества неизоморфных правоальтернативных бимодулей над алгеброй матриц второго порядка.

В 1981 и 1986 гг. Хенцелем и Смитом установлена альтернативность простых бинарно $(-1,1)$-алгебр. Сначала был рассмотрен случай полупростых алгебр, а затем случай ниль-алгебр [7, 8]. Однако до сих пор неизвестно строение неприводимых бинарно $(-1,1)$-бимодулей над простыми алгебрами.

Целью данной заметки являются доказательства следующих теорем.

Теорема 1. *Неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над композиционной Φ-алгеброй альтернативен* $(\mathrm{char}\,\Phi \neq 2,3)$.

Теорема 2. *Неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль над простой конечномерной альтернативной алгеброй альтернативен* $(\mathrm{char}\,\Phi = 0)$.

2. Обозначения и тождества. Напомним, что алгебра называется *бинарно $(-1,1)$-алгеброй*, если в ней выполнены тождества

$$(x,y,y)=0, \quad [(x,x,y),y]=0;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00111).

над полем характеристики 0 любые два элемента такой алгебры порождают $(-1,1)$-алгебру [9].

Во всякой правоальтернативной алгебре справедливы следующие хорошо известные тождества:

$$(a,x,y)+(a,y,x)=0, \quad (ax)y+(ay)x=a(x\circ y), \tag{1}$$

$$(a,x,xy)=(a,x,y)x, \tag{2}$$

$$(ab,x,y)+(a,b,[x,y])=a(b,x,y)+(a,x,y)b, \tag{3}$$

$$([a,b],x,y)+(a,b,[x,y])-(b,a,[x,y])=[a,(b,x,y)]+[(a,x,y),b], \tag{4}$$

$$((a,x,y),x,y)+(a,x,y)[x,y]=0, \tag{5}$$

$$[xy,a]=x[y,a]+[x,a]y+2(x,y,a)+(a,x,y). \tag{6}$$

Тождество (2) называется *тождеством Муфанг*, (3)–(5) — *тождествами Клейнфелда*.

Положим $\{x,y,a\}:=(x,y,a)+(y,x,a)$ и заметим, что во всякой бинарно $(-1,1)$-алгебре справедливы линеаризации определяющего тождества $[(x,x,y),y]=0$:

$$[\{x,y,a\},x]+[(x,x,a),y]=0, \tag{7}$$

$$[\{x,y,a\},b]+[\{x,y,b\},a]=0. \tag{8}$$

Всюду ниже, если не оговорено противное, используются обозначения: Φ — основное поле характеристики, отличной от 2 и 3; A — простая альтернативная алгебра над полем Φ; M — бимодуль над алгеброй A в многообразии бинарно $(-1,1)$-алгебр [2, с. 79], т. е. расщепляемое нулевое расширение $S=M\oplus A$ является бинарно $(-1,1)$-алгеброй; $\mathrm{St}(A)$ — идеал алгебры A, порожденный коммутаторами $[[x,y],z]$; $K(S)$, $N(S)$ и $Z(S)$ — коммутативный, ассоциативный и ассоциативно-коммутативный центры алгебры S соответственно; $K(M)=K(S)\cap M$, $N(M)=N(S)\cap M$ и $Z(M)=Z(S)\cap M$ — соответствующие центры бимодуля M; $m,n\in M$; $k\in K(M)$; $z\in Z(M)$; $a,b,c,p,q\in A$; $x,y,t,v\in S$.

3. Предварительные леммы.

Лемма 1. *Неприводимый бимодуль M над ассоциативно-коммутативной алгеброй A ассоциативен.*

Доказательство. Если $n:=(m,a,b)\neq 0$, то рассмотрим подбимодуль N бимодуля M, порожденный элементом n. В силу неприводимости M верно равенство $N=M$, значит, $m=\sum n\varphi_i=\sum mR(a,b)\varphi_i$, где φ_i — операторные слова. Подставляя вместо m в правую часть указанное представление, получим ввиду [10, лемма 10]

$$m=\sum mR(a,b)\varphi_iR(a,b)\varphi_j=\sum mR(a,b)\varphi_iR(a,b)\varphi_jR(a,b)\varphi_k=\dots=0.$$

Значит, $(M,A,A)=(0)$.

Аналогично с учетом [10, лемма 11] доказывается, что $(A,A,M)=(0)$, т. е. M — ассоциативный бимодуль над алгеброй A. $\square$

Лемма 2. *Неприводимый бимодуль M над алгеброй A слабо альтернативен, т. е. для любых a, m верно равенство $(a,a,m)=0$.*

Доказательство. Допустим, что $(a,a,m)\neq 0$ для некоторых элементов a и m, и рассмотрим подбимодуль, порожденный элементом (a,a,m). В силу неприводимости бимодуля M верно равенство $m=\sum m\Delta(a)\varphi_i$, где φ_i — операторные слова. Тогда, подставляя вместо m в правую часть указанное представление, получаем

$$m=\sum m\Delta(a)\varphi_i\Delta(a)\varphi_j=\sum m\Delta(a)\varphi_i\Delta(a)\varphi_j\Delta(a)\varphi_k=\dots=0$$

ввиду [11, следствие к основной теореме]. $\square$

Лемма 3. *Пусть M — неприводимый бимодуль над простой альтернативной алгеброй A. Тогда либо M альтернативен, либо $K(M)=(0)$.*

Доказательство. В силу леммы 1 можно считать, что алгебра A некоммутативна, тогда $\mathrm{St}(A)\neq(0)$ и ввиду простоты алгебры $\mathrm{St}(A)=A$. Согласно [10, теорема 1] идеал алгебры S, порожденный значениями функции $(k,a,[b,c])$, аннулируется алгеброй A, поскольку бимодуль M неприводим $(k,a,[b,c])=0$. Следуя доказательству леммы 5 работы [10], получаем, что бимодуль, порожденный элементом (k,a,b), аннулируется алгеброй A, значит, $(k,a,b)=0$, т. е. $K(M)=Z(M)$. Если $0\neq k$, то ввиду неприводимости бимодуля имеем $M=kA$ и $(ka,b,c)=(a,kb,c),(a,b,kc)=k(a,b,c)$, значит, бимодуль M альтернативен. $\square$

4. Унитарность неприводимого бимодуля.

Лемма 4. *Всякий неприводимый бимодуль M над простой альтернативной алгеброй A с единицей 1 унитарен.*

Доказательство. Можно считать, что алгебра S не альтернативна, алгебра A не коммутативна, бимодуль M не унитарен. Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности шагов.

1°. Если $m\cdot 1=0$, то $m\cdot A=(0)$.

Действительно, в силу правой альтернативности имеем

$$(ma)\cdot 1=-(m\cdot 1)a+m(a\circ 1)=2ma,\quad (n\cdot 1)\cdot 1=n(1\cdot 1)=n\cdot 1.$$

Отсюда

$$((ma)\cdot 1)\cdot 1=2(ma)\cdot 1,\quad (ma)\cdot 1=2(ma)\cdot 1,\quad (ma)\cdot 1=0,\quad 2ma=0,\quad ma=0.$$

2°. Если $m\cdot 1=0$, то $(1,m,a)=(a,1,m)=0$.

Для ассоциатора $n:=(1,m,a)$ с учетом тождества (3) и слабой альтернативности бимодуля имеем $n=(1^2,m,a)=1\circ n-(1,1,[m,a])=1\circ n$. С другой стороны, в силу п. 1° и тождества (7)

$$[n,1]=[(1,m,a),1]=[\{1,m,a\},1]=-[(1,1,a),m]=0.$$

Следовательно, $n=2n\cdot 1$, откуда $n\cdot 1=2(n\cdot 1)\cdot 1=2n\cdot 1$, $n\cdot 1=0$, $n=0$. Итак, равенство $(1,m,a)=0$ доказано.

Применим теперь тождество (8) $[\{a,1,m\},b]=-[\{a,1,b\},m]=0$. Это означает, что $(a,1,m)\in K(M)=(0)$ ввиду леммы 3.

3°. Если $m\cdot 1=0$, то $(am)\cdot 1=0$.

Это немедленно вытекает из пп. 1° и 2°.

4°. $M_0 := \{m \in M \mid m \cdot 1 = 0\}$ — подбимодуль в M.

В самом деле, достаточно применить пп. 1° и 3°.

5°. Если $M_0 = M$, то в силу п. 1° $MA = (0)$. В этом случае бимодуль M ассоциативен, поскольку $(n, a, b) = 0$, $(a, n, b) = 0$, $(a, b, n) = -(a, n, b) = 0$.

Итак, пусть $M_0 = (0)$. Для любого n ввиду правой альтернативности

$$(n - n \cdot 1) \cdot 1 = n \cdot 1 - (n \cdot 1) \cdot 1 = n \cdot 1 - n \cdot 1 = 0,$$

т. е. $(n - n \cdot 1) \in M_0 = (0)$, значит, $n = n \cdot 1$.

Допустим теперь, что $1 \cdot m = 0$ для некоторого $m \neq 0$ (если таких элементов m нет, то бимодуль унитарен: $0 = 1\cdot(1\cdot n) - (1\cdot n) = 1\cdot(1\cdot n - n)$, отсюда $1\cdot n = n$).

Далее, для любых a, n имеем $(a, n, 1) = 0$, откуда $(a, 1, n) = 0$ ввиду правой альтернативности, значит, $Am = (0)$. Наконец, в силу тождества (1)

$$1 \cdot (ma) = 1 \cdot (m \circ a) = (1 \cdot m)a + (1 \cdot a)m = (1 \cdot m)a + a \cdot m = 0,$$

т. е. $N := \{m \in M \mid 1 \cdot m = 0\}$ — подбимодуль в M. По предположению $N \neq (0)$, значит, $N = M$, и по доказанному $AM = 0$. Следовательно, $(a, n, b) = (a, b, n) = 0$. В силу тождества (8) имеем $[(n, a, b), 1] = [\{n, a, b\}, 1] = -[\{n, a, 1\}, b] = 0$, $(n, a, b) = (n, a, b) \cdot 1 = [(n, a, b), 1] = 0$. Это показывает, что бимодуль M ассоциативен; противоречие. □

5. Альтернативность бимодулей над простыми ассоциативными алгебрами от двух порождающих.

Лемма 5. (а) *Если $\boldsymbol{H}$ — алгебра обобщенных кватернионов, то всякий слабо альтернативный унитарный $\boldsymbol{H}$-бимодуль M альтернативен.*

(б) *Если A — простая ассоциативная некоммутативная* 2*-порожденная алгебра с единицей* 1 *над полем характеристики* 0*, то всякий слабо альтернативный унитарный A-бимодуль M альтернативен.*

Доказательство. (а) M — бимодуль над алгеброй $\boldsymbol{H}$ обобщенных кватернионов. Напомним, что алгебра $\boldsymbol{H}$ имеет базис 1, i, j, k и выполнены соотношения для некоторых ненулевых скаляров λ и μ:

$$i \circ j = j \circ k = k \circ i = 0, \quad i^2 = \lambda,\ j^2 = \mu,\ k^2 = -\lambda\mu,$$
$$ij = k, \quad jk = -\mu i, \quad ki = -\lambda j.$$

Положим $n := \{m, i, j\}$ и докажем сначала, что $n \in Z(S)$, где $S = M \oplus \boldsymbol{H}$.

Доказательство вновь представим в виде последовательности шагов.

1°. $[n, i] = 0$, $[n, j] = 0$.

Поскольку в бинарно $(-1, 1)$-алгебре верно тождество $[(x, x, y), x] = 0$, после линеаризаций $x \to t$ получаем

$$[(t, x, y) + (x, t, y), x] + [(x, x, y), t] = 0.$$

Полагая $t = m$, $x = i$, $y = j$, имеем $[n, i] = 0$. Второе равенство вытекает немедленно из (10).

2°. $(n, i, j) = 0$, $(i, j, n) = 0$.

Замечая, что в алгебре S выполнено тождество $((x, x, y), x, y) = 0$, и проводя линеаризацию $x \to t$, получаем

$$((m, x, y), x, y) + ((x, x, y), x, m) = 0.$$

Полагая $x = i$, $y = j$, имеем $(n, i, j) = 0$. Второе равенство вытекает аналогично из $(x, y, (x, x, y)) = 0$.

3°. $n \in Z(S)$.

Во-первых, $[n,k] = [n,ij] = 0$ в силу тождества (7) и пп. 1°, 2°. Следовательно, элемент n содержится в коммутативном центре алгебры S. Отсюда с учетом тождества Муфанг (2) вытекают равенства $(n,a,k) = 0$, $a \in \{i,j\}$, т. е. $n \in Z(S)$.

4°. $nk = 0$. Проведем линеаризацию тождества $[(x,x,y)x,y] = 0$:

$$[\{m,x,y\}x,y] + [(x,x,y)m,y] = 0,$$

откуда $[\{m,x,y\}x,y] = 0$. Положим $x = i$, $y = j$, тогда $[ni,j] = 0$. Учитывая п. 2°, имеем $0 = [ni,j] = n[i,j] = 2nk$.

5°. $n = 0$. Так как $nk = 0$ в силу п. 4°, элемент n аннулирует идеал, порожденный элементом k. Используя тот факт, что алгебра $\boldsymbol{H}$ проста, получаем $n\boldsymbol{H} = (0)$, откуда ввиду унитарности модуля M имеем $n = n \cdot 1 \in nA = (0)$, т. е. $n = 0$ или $\{m,i,j\} = 0$.

Наконец, поскольку элементы i, j, k канонического базиса алгебры $\boldsymbol{H}$ равноправны, то $\{M,\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}\} = (0)$, т. е. $\boldsymbol{H}$-бимодуль M альтернативен.

(б) Пусть алгебра A порождается элементами a и b, M — бимодуль над алгеброй A. Поскольку алгебра $S = M \oplus A$ бинарно $(-1,1)$, в ней выполнены все тождества от двух переменных, справедливые во всякой $(-1,1)$-алгебре [9]. Напомним [12, 13], что в алгебрах типа $(-1,1)$ выполняются тождества

$$(a,a,u) \cdot [v,w]\varphi = 0, \tag{9}$$

$$\{a,u_1,u_2\} \cdot [v,w]\varphi = 0, \tag{10}$$

где u, u_1, u_2, v, w — одночлены, φ — операторное слово, в запись которых входят только переменные a, b. Учитывая слабую альтернативность бимодуля M и ассоциативность алгебры A, после линеаризации тождества (9) подстановкой $a \to m$ получим

$$\{m,a,A\} \cdot A' = (0), \quad \text{где } A' \text{ — коммутаторный идеал.}$$

Аналогично, проводя линеаризацию тождества (10), на основании последнего равенства имеем $\{m,A,A\} \cdot A' = (0)$. Поскольку алгебра A проста и некоммутативна, то $A' = A$ и в силу унитарности бимодуля $\{m,A,A\} = (0)$, т. е. бимодуль M альтернативен. $\square$

6. Центральность неприводимого неальтернативного бимодуля. Пусть $Z = Z(A)$. Напомним [2, с. 88], что бимодуль M над A называется *центральным*, если выполнены равенства $[M,Z] = (M,Z,A) = (Z,A,M) = (A,M,Z) = (0)$. Иначе говоря, M можно рассматривать как бимодуль над Z-алгеброй A.

Лемма 6. *Пусть A — простая альтернативная алгебра, M — неприводимый неальтернативный бимодуль над A. Тогда бимодуль M централен.*

Доказательство. Пусть $z \in Z(A)$, $a,b,c \in A$. Тогда

$$[R_z, R_a] = 2R_{z,a}, \quad [L_z, L_a] = 2L_{z,a}.$$

Действительно, в силу правой альтернативности и слабой альтернативности имеем

$$m[R_z,R_a] = (mz)a - (ma)z = (m,z,a) - (m,a,z) = 2(m,z,a) = 2mR_{z,a},$$
$$m[L_z,L_a] = a(zm) - z(am) = -(a,z,m) + (z,a,m) = 2(z,a,m) = 2mL_{z,a}.$$

Далее, в ассоциативной алгебре $[[a,b],c]$ является йордановым многочленом $j(a,b,c)$, поэтому в алгебре $R^M(A)$ в силу правой альтернативности верно

$$[[R_z,R_a],R_b]=j(R_z,R_a,R_b)=R_{j(z,a,b)}=R_{[[z,a],b]}=0.$$

Кроме того, ввиду тождества Клейнфелда (3) получаем

$$m[[R_z,R_a],L_b]=2m[R_{z,a},L_b]=2b(m,z,a)-2(bm,z,a)$$
$$=2(b,m,[z,a])-2(b,z,a)m=0.$$

Следовательно, $R_{z,a}\in Z(T^M(A))$. Кроме того, указанный центральный элемент нильпотентен, поскольку с учетом тождества Клейнфелда (6) имеем $((m,z,a),z,a)=0$, т. е. $R_{z,a}^2=0$. Подбимодуль, порожденный элементом $mR_{z,a}$, содержится в множестве $MR_{z,a}$, следовательно, либо $MR_{z,a}=M$, либо $MR_{z,a}=(0)$. Поскольку первое равенство невозможно, то $MR_{z,a}=(0)$.

Рассмотрим теперь операторы вида $L_{z,a}$. Заметим сначала, что ввиду слабой альтернативности бимодуля

$$[[L_z,L_a],L_b]=j(L_z,L_a,L_b)=L_{j(z,a,b)}=L_{[[z,a],b]}=0.$$

Далее, в силу линеаризованного тождества Муфанг (2) получаем

$$m[[L_z,L_a],R_b]=2m[L_{z,a},R_b]=2(z,a,m)b-2(z,a,mb)$$
$$=2(z,ba,m)+2(z,ma,b)-2(b,z,a)m,$$

т. е. линейное пространство $ML_{z,A}$ является подмодулем A-модуля M. Согласно неприводимости M либо $M=ML_{z,A}$, либо $ML_{z,A}=(0)$. Докажем, что первого случая быть не может. Если имеет место равенство $M=ML_{z,A}$, то для любого ненулевого элемента $m\in M$ и подходящих операторных слов φ_i справедливо равенство

$$m=\sum_i m\varphi_i L_{z,a_i}L_{z,b_i}.$$

Покажем, что $L_{z,a}L_{z,b}=0$. Из [8, тождество (20)] имеем $(t,x,(x,x,y))\in K(S)$, откуда $(t,x,\{m,x,y\})\in K(M)=(0)$ на основании леммы 3. В частности, $(t,z,\{m,z,y\})=0$. По доказанному ранее $(m,z,y)=0$, значит, $(t,z,(z,m,y))=0$, и в силу слабой альтернативности $L_{z,y}L_{z,t}=0$.

Тем самым доказано, что $ML_{z,A}=(0)$. В дальнейших рассуждениях будем пользоваться равенствами

$$(M,Z,A)=(Z,A,M)=(A,M,Z)=(0)$$

без каких-либо пояснений.

Для завершения доказательства леммы осталось понять, что $[M,Z]=(0)$. В силу тождества Клейнфелда (4) имеем

$$([m,z],a,b)=[(m,a,b),z],\quad (a,b,[m,z])=0,$$

а также

$$[(a,b,m),z]=(a,b,m)z-z(a,b,m)=(az,b,m)-(za,b,m)=([a,z],b,m)=0,$$

т. е. $[(a,b,m),z]=0$. Используя три последних равенства, на основании тождества (8) получаем

$$\{[m,z],a,b\}=([m,z],a,b)=[(m,a,b),z]=[\{m,a,b\},z]=-[\{m,a,z\},b]=0.$$

Наконец, легко понять ввиду тождества (6), что $[M,Z]$ является подмодулем A-модуля M. Следовательно, либо $[M,Z]=(0)$, либо $[M,Z]=M$. Во втором случае бимодуль M альтернативен, что противоречит условию леммы. Итак, равенство $[M,Z]=(0)$ доказано. $\square$

7. Доказательство теорем. На основании леммы 1 можно считать, что алгебра A простая. В силу леммы 2 неприводимый бинарно $(-1,1)$-бимодуль M над алгеброй A слабо альтернативен. По лемме 4 бимодуль M унитарен.

Пусть $Z=Z(A)$ — центр алгебры A (как хорошо известно, центр простой алгебры — поле), F — алгебраическое замыкание поля Z; $A_F=FD_ZA$, $M_F=FD_ZM$. Поскольку бимодуль M централен (над Z), то M_F является бинарно $(-1,1)$-бимодулем над алгеброй A_F и бимодуль M над A можно отождествить с бимодулем $1D_ZM$ над алгеброй $1D_ZA$, изоморфной A. Итак, достаточно понять, что бимодуль M_F над алгеброй A_F альтернативен. Легко видеть, что этот бимодуль слабо альтернативен. Алгебра A_F является либо алгеброй матриц $\mathbf{M}_n(F)$, либо алгеброй Кэли — Диксона $\mathbf{O}(F)$. Алгебра матриц $\mathbf{M}_n(F)$ $(n>1)$ является 2-порожденной (хорошо известно, что в качестве порождающих можно взять матрицы $\sum\limits_{i+1}^{n-1}E_{i,i+1}$ и $E_{n,1}$, где E_{ij} — матричные единицы).

Если $A_F=\mathbf{M}_n(F)$ $(n>1)$, то достаточно воспользоваться леммой 5(б) (в ней неприводимость бимодуля не предполагается); если же $n=1$, то алгебра A ассоциативна и коммутативна и можно применить лемму 1.

Наконец, если $A_F=\mathbf{O}(F)$, то в ней можно выбрать канонический базис 1, e_i $(i=1,\dots,7)$ такой, что любые два из элементов e_i, e_j порождают подалгебру обобщенных кватернионов [14], следовательно, по лемме 5(а) для любого m выполнены равенства $\{m,e_i,e_j\}=0$, но тогда для любых $x,y\in\mathbf{O}(F)$ верно тождество левой альтернативности $\{m,x,y\}=0$. $\square$

В заключение отметим, что остается открытым вопрос о существовании неальтернативных неприводимых бинарно $(-1,1)$-бимодулей над простой ассоциативной алгеброй, в частности над алгеброй с делением; такой бимодуль должен быть бесконечномерным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И.П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
2. *Jacobson N. R.* Structure and representations of Jordan algebras // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 1968. V. 39.
3. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 675–716.
4. *Михеев И. М.* О простых правоальтернативных кольцах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 6. С. 682–710.
5. *Скосырский В. Г.* О правоальтернативных алгебрах // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 2. С. 185–192.
6. *Murakami L., Shestakov I.* Irreducible unital rings alternative bimodules // J. Algebra. 2001. V. 246. P. 897–914.
7. *Hentzel I. R.* Nil semi-simple locally $(-1,1)$ rings // Bull. Iranian Math. Soc. 1981. V. 9. P. 11–14.
8. *Hentzel I. R., Smith H. F.* Simple locally $(-1,1)$ nil rings // J. Algebra. 1986. V. 101. P. 262–272.
9. *Пчелинцев С. В.* Определяющие тождества одного многообразия правоальтернативных алгебр // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 2. С. 161–176.

10. *Пчелинцев С. В.* О центральных идеалах конечно-порожденных бинарно $(-1,1)$-алгебр // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 4. С. 113–134.
11. *Пчелинцев С. В.* Нильпотентность альтернаторного идеала бинарно $(-1,1)$ алгебры конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 427–451.
12. *Hentzel I. R.* The characterization of $(-1,1)$ rings // J. Algebra. 1974. V. 30. P. 236–258.
13. *Пчелинцев С. В.* Свободная $(-1,1)$-алгебра с двумя порождающими // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 4. С. 425–449.
14. *Кузьмин Е. Н., Шестаков И. П.* Неассоциативные структуры // Фундаментальные исследования. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 57. С. 9–266. (Итоги науки и техники).

Статья поступила 17 мая 2005 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович
Финансовая академия при правительстве Российской Федерации,
Ленинградский пр., 49, Москва 125468