Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 517.983

О ПРИВЕДЕНИИ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАТОРОВ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ ВИДУ

В. Б. Коротков

Аннотация: Устанавливаются условия приведения семейства операторов к интегральному виду единым для всего семейства изометрическим оператором.

Ключевые слова: карлемановский интегральный оператор, ахиезеровский интегральный оператор, предельный спектр.

Пусть (X,μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой μ. Всюду далее предполагается, что мера μ не является чисто атомической, т. е. в X существует множество E, $\mu E>0$, такое, что любое μ-измеримое подмножество множества E можно разбить на два непересекающихся подмножества с равными мерами. Далее предполагается также, что $L_2 = L_2(X,\mu)$ — сепарабельное пространство; через $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ обозначаются норма и скалярное произведение в L_2.

Линейный оператор T с областью определения $D_T \subset L_2$ и областью значений в L_2 называется *интегральным*, если существует определенная на $X\times X$ $(\mu\times\mu)$-измеримая $(\mu\times\mu)$-п. в. конечная функция $K(s,t)$ такая, что для любой функции $f\in D_T$

$$Tf(s) = \int_X K(s,t)f(t)\,d\mu(t)$$

для μ-п. в. $s\in X$; интеграл понимается в лебеговом смысле. Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора* T. Интегральный оператор называется *ахиезеровским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Н. И. Ахиезера [1]: существует определенная на X μ-измеримая μ-п. в. конечная неотрицательная функция $P(s)$ такая, что $|K(s,t)|\le P(s)P(t)$ для $(\mu\times\mu)$-п. в. $(s,t)\in X\times X$. Интегральный оператор называется *карлемановским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Т. Карлемана [2]:

$$\int_X |K(s,t)|^2\,d\mu(t) < \infty \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } s\in X.$$

Интегральный оператор в L_2 называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Гильберта — Шмидта:

$$\int_X\int_X |K(s,t)|^2\,d\mu(t)\,d\mu(s) < \infty.$$

Оператор в L_2 называется *ядерным*, если он представим в виде произведения двух операторов Гильберта — Шмидта. Каждый ядерный оператор в L_2 является ахиезеровским интегральным оператором.

Определение. *Носителем* заданной на X функции f называется множество всех $s\in X$ таких, что $f(s)\ne 0$.

Лемма. *Пусть носители определенных на X μ-измеримых μ-п. в. конечных функций f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, попарно не пересекаются и $g_n \in L_2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда функция*

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) g_n(t)$$

удовлетворяет условиям Карлемана и Ахиезера.

Доказательство. Функция $K(s,t)$, очевидно, удовлетворяет условию Карлемана. Так как

$$|K(s,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(s)| n^2 \|g_n\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{|g_n(t)|}{\|g_n\|} = P_1(s) P_2(t) \le P(s) P(t),$$

где $P(\xi) = \max(P_1(\xi), P_2(\xi))$, то K удовлетворяет условию Ахиезера.

Теорема 1. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_H$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$, и пусть $\{T_\alpha : D_{T_\alpha} \subset H \to H,\ \alpha \in A\}$ — семейство плотно определенных в H линейных замыкаемых операторов. Пусть*

1) существует ортонормированный базис $\{u_n\}$ пространства H такой, что

$$\{u_n\} \subset \bigcap_{\alpha \in A} D_{T_\alpha^*}, \tag{1}$$

где $D_{T_\alpha^*}$ — область определения сопряженного к T_α оператора T_α^*;

2) существует подпоследовательность $\{v_n\} \subset \{u_n\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha^* v_n\|_H = 0. \tag{2}$$

Тогда существует единый для всего семейства изометрический оператор $U : H \to L_2$ такой, что для любого $\alpha \in A$ оператор $\widetilde{T}_\alpha = U T_\alpha U^{-1}$ является интегральным оператором с ядром, удовлетворяющим условиям Карлемана и Ахиезера. Кроме того, для любого $\alpha \in A$ оператор $\widetilde{T}_\alpha$ представим в виде $\widetilde{T}_\alpha = M_\alpha N_\alpha$, где N_α — ядерный оператор в L_2, M_α — оператор умножения на μ-измеримую μ-п. в. конечную счетно-значную функцию $h_\alpha(s) \ge 1 : M_\alpha f(s) = h_\alpha(s) f(s)$.

Доказательство. Пользуясь (2), выберем подпоследовательность $\{w_n\} \subset \{v_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha^* w_n\|_H < \infty. \tag{3}$$

Будем считать без ограничения общности, что размерность замкнутой линейной оболочки последовательности $\{u_n\} \setminus \{w_n\}$ равна бесконечности (в противном случае достаточно перейти от последовательности $\{w_n\}$ к последовательности $\{w_{2n}\}$). Обозначим последовательность $\{u_n\} \setminus \{w_n\}$ через $\{z_n\}$. Мы имеем для любых $f \in D_{T_\alpha}$ и $\alpha \in A$

$$T_\alpha f = \sum_{n=1}^{\infty} (T_\alpha f, u_n)_H u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, T_\alpha^* u_n)_H u_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (f, T_\alpha^* z_n)_H z_n + \sum_{n=1}^{\infty} (f, T_\alpha^* w_n)_H w_n.$$

Пусть $\{e_n\}$ — какая-нибудь последовательность попарно не пересекающихся подмножеств множества X с конечными положительными мерами, χ_{e_n} — характеристическая функция множества e_n. Положим

$$\chi_{e_{2n}}/\sqrt{\mu e_{2n}} = \chi_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Пусть $U : H \to L_2$ — изометрический оператор, отображающий z_n в χ_n, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда для любого $\alpha \in A$ и $g \in UD_{T_\alpha}$

$$UT_\alpha U_g^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(g, UT_\alpha^* z_n\bigr)\chi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(g, UT_\alpha^* w_n\bigr)Uw_n,$$

здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2 = L_2(X,\mu)$. Введем операторы $T_{\alpha,1}$ и $T_{\alpha,2}$, определив их для всех $g \in UD_{T_\alpha}$ равенствами

$$T_{\alpha,1}g = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(g, UT_\alpha^* z_n\bigr)\chi_n, \quad T_{\alpha,2}g = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(g, UT_\alpha^* w_n\bigr)Uw_n.$$

Так как носители e_{2n} функций χ_n попарно не пересекаются, то оператор $T_{\alpha,1}$ интегральный с ядром

$$K_{\alpha,1}(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(s)\overline{\bigl(UT_\alpha^* z_n\bigr)(t)}.$$

По лемме это ядро удовлетворяет условиям Карлемана и Ахиезера. Поскольку $\{Uw_n\}$ — ортонормированная система, из (3) вытекает, что оператор $T_{\alpha,2}$ ядерный. Следовательно, $T_{\alpha,2}$ — карлемановский и ахиезеровский оператор. Таким образом, для любого $\alpha \in A$ оператор $\widetilde{T}_\alpha = UT_\alpha U^{-1} = T_{\alpha,1} + T_{\alpha,2}$ является интегральным оператором с ядром, удовлетворяющим условиям Карлемана и Ахиезера. Пусть $e = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_{2n}$ и $h_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_{n,\alpha}\chi_n + \chi_e$, где

$$\beta_{n,\alpha} = n^2(\|UT_\alpha^* z_n\| + 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Рассмотрим оператор $M_\alpha f = h_\alpha f$, $f \in L_2$. Тогда

$$\widetilde{T}_\alpha g = M_\alpha\bigl(M_\alpha^{-1}T_{\alpha,1}g + M_\alpha^{-1}T_{\alpha,2}g\bigr),$$

где

$$M_\alpha^{-1}g(s) = [h_\alpha(s)]^{-1}g(s).$$

Положим $N_\alpha = M_\alpha^{-1}T_{\alpha,1} + M_\alpha^{-1}T_{\alpha,2}$. Операторы N_α и M_α искомые.

Теорема доказана.

Определение. Пусть T — карлемановский интегральный оператор с ядром $K(s,t)$. Векторнозначная функция $\gamma : X \to L_2$, определяемая равенством $\gamma(s) = \overline{K(s,t)}$, называется *функцией Карлемана* [2]. Функцию

$$K(s) = \|\gamma(s)\| = \Bigl(\int\limits_X |K(s,t)|^2\,d\mu(t)\Bigr)^{1/2}$$

назовем *норм-функцией Карлемана.*

Замечание. Если семейство $\{T_\alpha, \alpha \in A\}$ состоит из линейных ограниченных операторов, определенных на всем H, то условие 1 в теореме 1 можно опустить (см. также [3, теорема 2; 4, теорема 10, с. 60]). Если

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha^* z_n\|_H = \sigma_n < \infty,$$

то норм-функции Карлемана операторов $\widetilde{T}_\alpha = UT_\alpha U^{-1}$, $\alpha \in A$, ограничены μ-п. в. μ-измеримой μ-п. в. конечной функцией, не зависящей от $\alpha \in A$, и операторы M_α в теореме 1 можно выбрать одинаковыми.

Действительно, в качестве такой функции можно выбрать функцию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \chi_n(s) + \delta \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \mid U w_n(s)|^2 \right)^{1/2},$$

где

$$\delta_n = \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha^* w_n\|_H, \quad \delta = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \right)^{1/2}.$$

Теорема 2. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{T_\alpha : D_{T_\alpha} \subset H \to H,\ \alpha \in A\}$ — семейство плотно определенных в H линейных замыкаемых операторов. Пусть существует изометрический оператор $V : H \to L_2$ такой, что для любого $\alpha \in A$ оператор $\tau_\alpha = VT_\alpha V^{-1}$ карлемановский. Если норм-функции Карлемана операторов τ_α ограничены μ-п. в. μ-измеримой μ-п. в. конечной функцией, не зависящей от $\alpha \in A$, то в H существуют ортонормированный базис $\{u_n\}$ и его подпоследовательность $\{v_n\}$ такие, что*

$$\{u_n\} \subset \bigcap_{\alpha \in A} D_{T_\alpha^*}, \quad \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha^* u_n\|_H < \infty,\ n = 1, 2, 3, \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha^* v_n\|_H = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $K_\alpha(\xi, \eta)$ — ядро карлемановского оператора τ_α и

$$K_\alpha(\xi) = \left(\int_X |K_\alpha(\xi, \eta)|^2 \, d\mu(\eta) \right)^{1/2}$$

— норм-функция Карлемана. Пусть $\Lambda(\xi)$ — μ-измеримая μ-п. в. конечная неотрицательная функция такая, что $K_\alpha(\xi) \le \Lambda(\xi)$ для всех $\alpha \in A$ и μ-п. в. $\xi \in X$. Пусть $P(\xi)$ — μ-измеримая μ-п. в. конечная неотрицательная функция. Положим

$$[L_2]_P = \left\{ f \mid f \in L_2, \int_X |f(\xi)| P(\xi) \, d\mu(\xi) < \infty \right\}.$$

Тогда $[L_2]_\Lambda \subseteq [L_2]_{K_\alpha}$ для всех $\alpha \in A$. По лемме IV.2.12 из [5, с. 125] для всех $\alpha \in A [L_2]_{K_\alpha} \subseteq D_{\tau_\alpha^*}$ и для всех $f \in [L_2]_{K_\alpha}$

$$\tau_\alpha^* f(s) = \int_X \overline{K_\alpha(t, s)} f(t) \, d\mu(t). \tag{5}$$

Кроме того, по лемме IV.2.10 из [5, с. 123] $[L_2]_\Lambda$ плотно в L_2. Пусть множество $E \subset X$, $\mu E > 0$, таково, что любое μ-измеримое подмножество множества E

можно разбить на два непересекающихся множества с равными мерами. Выберем множество $E_1 \subset E$ так, чтобы $\mu E_1 > 0$, $\mu(E \setminus E_1) > 0$ и

$$\int\limits_{E_1} \Lambda^2(\xi)\, d\mu(\xi) < \infty.$$

Обозначим через $\widetilde{L}_2(E_1)$ совокупность всех функций из L_2, равных 0 μ-п. в. на $X \setminus E_1$. Тогда

$$\widetilde{L}_2(E_1) \subseteq [L_2]_\Lambda \subseteq [L_2]_{K_\alpha} \subseteq D_{\tau_\alpha^*}$$

для всех $\alpha \in A$. Пусть $\{v_{n,1}\}$ — ортонормированная последовательность неотрицательных функций из $\widetilde{L}_2(E_1)$ с попарно не пересекающимися носителями. Тогда в силу (5)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in A} \|\tau_\alpha^* v_{n,1}\| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in A} \left\| \int\limits_{E_1} \overline{K_\alpha(t,s)} v_{n,1}(t)\, d\mu(t) \right\| \\ &\le \lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in A} \int\limits_{E_1} K_\alpha(t) v_{n,1}(t)\, d\mu(t) \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_1} \Lambda(t) v_{n,1}(t)\, d\mu(t) = 0, \qquad (6) \end{aligned}$$

так как $\{v_{n,1}\}$ — ортонормированная система и $\Lambda\chi_{E_1} \in L_2$. Кроме того, для любого $h \in [L_2]_\Lambda$

$$\sup_{\alpha\in A} \|\tau_\alpha^* h\| = \sup_{\alpha\in A} \left\| \int\limits_X \overline{K_\alpha(t,s)} h(t)\, d\mu(t) \right\| \le \int\limits_X \Lambda(t)|h(t)|\, d\mu(t) < \infty. \qquad (7)$$

Обозначим через W замкнутую линейную оболочку последовательности $\{v_{n,1}\}$ и через $W^\perp$ — ортогональное дополнение по отношению к $W : W^\perp = \widetilde{L}_2(E_1)\Theta W$. Пусть $\{v_{n,1}^\perp\}$ — ортонормированный базис в $W^\perp$. Рассмотрим подпространство $\widetilde{L}_2(X \setminus E_1)$ всех функций из L_2, равных 0 μ-п. в. на E_1. Пусть $\{p_n\}$ — какой-нибудь ортонормированный базис $\widetilde{L}_2(X \setminus E_1)$, принадлежащий $[L_2]_\Lambda$. Запишем $\{v_{n,1}\} \cup \{v_{n,1}^\perp\} \cup \{p_n\}$ в виде последовательности $\{h_n\}$. Тогда ортонормированный базис $\{u_n\} = \{V^{-1}h_n\}$ и его подпоследовательность $\{v_n\} = \{V^{-1}v_{n,1}\}$ удовлетворяют (4) в силу (6) и (7).

Определение. Будем говорить, что 0 *принадлежит предельному спектру оператора* $B : D_B \subset H \to H$, если существует ортонормированная последовательность $\{q_n\} \subset D_B$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|Bq_n\|_H = 0$.

Из теоремы 2 следует, что 0 принадлежит предельному спектру оператора, сопряженного к оператору, унитарно эквивалентному карлемановскому интегральному оператору. Для неограниченного оператора, сопряженного к некарлемановскому интегральному оператору, аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно, как показывает следующий

Пример. Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в $L_2(0,1)$ и носители функций φ_n попарно не пересекаются. Пусть $\{\psi_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2(0,1)$ такой, что $|\psi_n(s)| = 1$ для п. в. $s \in [0,1]$, $n = 1,2,3,\dots$ (в качестве функций ψ_n можно взять, например, функции Уолша). Пусть

$$D_\tau = \left\{ f \mid f \in L_2(0,1),\ \sum_{n=1}^{\infty} n(|f|, |\varphi_n|) < \infty \right\},$$

оператор $\tau : D_\tau \to L_2(0,1)$ определим равенством $\tau f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(f,\varphi_n)\psi_n$. Покажем, что τ — интегральный оператор с ядром

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\psi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}.$$

Для любой функции $f \in D_\tau$ и п. в. $s \in [0,1]$ имеем

$$\int_0^1 |K(s,t)|\,|f(t)|\,dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n|\psi_n(s)|\,|\varphi_n(t)|\,|f(t)|\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 |f(t)|\,|\varphi_n(t)|\,dt < \infty.$$

Отсюда следует, что τ действует из D_τ в $L_\infty(0,1)$ и является интегральным оператором с ядром $K(s,t)$. Отметим, что это ядро удовлетворяет условию Ахиезера, но не удовлетворяет условию Карлемана, так как для п. в. $s \in [0,1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|\psi_n(s)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 = \infty.$$

Рассмотрим карлемановский интегральный оператор θ с ядром

$$\overline{K(t,s)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n(s)\overline{\psi_n(t)}$$

и областью определения

$$D_\theta = \left\{ f \mid f \in L_2(0,1),\ \int_0^1 \overline{K(t,s)}f(t)\,dt \in L_2(0,1) \right\}.$$

Так как носители функций φ_n попарно не пересекаются, то

$$D_\theta = \left\{ f \mid f \in L_2(0,1),\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2|(f,\psi_n)|^2 < \infty \right\}$$

и для всех $f \in D_\theta$

$$\theta f = \sum_{n=1}^{\infty} n(f,\psi_n)\varphi_n.$$

Пусть

$$K(s) = \left(\int_0^1 |\overline{K(t,s)}|^2\,dt \right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n|\varphi_n(s)|$$

и

$$[L_2]_K = \left\{ f \mid f \in L_2(0,1),\ \int_0^1 |f(s)|K(s)\,ds < \infty \right\}.$$

Тогда $[L_2]_K = D_\tau$. По лемме IV.2.11 из [5, с. 124] $\tau^* = \theta$. Кроме того, по лемме IV.2.12 из [5, с. 125] замкнутый оператор θ^* является расширением оператора τ. Следовательно, τ имеет замыкание. Покажем, что 0 не принадлежит предельному спектру τ^*. Для любой функции f из D_{τ^*} имеем

$$\|\tau^* f\|^2 = \|\theta f\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} n(f,\psi_n)\varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2|(f,\psi_n)|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |(f,\psi_n)|^2 = \|f\|^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

2. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.

3. *Коротков В. Б.* Приведение некоторых семейств операторов к интегральному виду // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 97–101.

4. *Коротков В. Б.* Введение в алгебраическую теорию интегральных операторов. Владивосток: Колорит, 2000.

5. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.

Статья поступила 27 октября 2005 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090