Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 511

О ДРОБНЫХ ДОЛЯХ НАТУРАЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ ФИКСИРОВАННОГО ЧИСЛА

А. Дубицкас

Аннотация: Пусть $\xi \neq 0$ и $\alpha > 1$ — вещественные числа. Доказано, что дробные доли $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, принимают любое значение лишь конечное число раз, за исключением случая, когда α является корнем из целого числа: $\alpha = q^{1/d}$, где $q \geq 2$, $d \geq 1$ — целые числа, а ξ — рациональным множителем целой неотрицательной степени α.

Ключевые слова: дробные доли, алгебраические числа, корни, степени.

1. Введение

Через $[a]$ и $\{a\}$ будем обозначать соответственно целую и дробную доли действительного числа a (все те случаи, когда $\{a\}$ обозначает множество, состоящее из одного элемента a, легко отличимы). Последовательность дробных долей степеней фиксированного числа $\alpha > 1$ и более общая последовательность $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где $\xi \neq 0$ и $\alpha > 1$ — вещественные числа, рассматриваются уже давно и связаны с разными задачами теории чисел. Например, из неравенства $1 - \{(3/2)^n\} > (3/4)^n$, где $n \in \mathbb{N}$, следовала бы точная оценка максимального количества слагаемых в проблеме Варинга (см. [1]). Для $n > n_0$ более сильную оценку доказал Малер [2]. Однако постоянная n_0 в его работе неэффективна. Подобные оценки вида

$$\|(3/2)^n\| = \min(\{(3/2)^n\}, 1 - \{(3/2)^n\}) > \nu^n, \quad n > n_1,$$

с эффективной постоянной n_1, полученные Бейкером и Коутсом, Бейкерсом, автором, Хабсигером, а также совсем недавно В. В. Зудилиным [3], слабее и до требуемой константы $\nu = 3/4$ не дотягивают. Другие приложения подобных оценок начиная с работы Эрдеша [4] связаны с хроматическим числом дистанционного графа.

Хорошо известны лишь метрические аспекты задачи распределения дробных долей $\{\xi\alpha^n\}$. Так, в [5] доказано, что последовательность $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, равномерно распределена при любом фиксированном $\alpha > 1$ для почти всех ξ, а в [6], наоборот, — что эта последовательность равномерно распределена при любом фиксированном $\xi \neq 0$ для почти всех $\alpha > 1$. В то же время для конкретных пар $\xi \neq 0, \alpha > 1$, особенно если α — трансцендентное число, почти ничего не известно.

Наиболее известная нерешенная задача о распределении дробных долей степеней рационального числа сформулирована Малером [7] (см. также работу

Работа выполнена при поддержке Литовского фонда студий и науки и гранта INTAS 03–51–5070.

Виджаярагхавана [8]): существует ли такое действительное число $\xi > 0$, что $\{\xi(3/2)^n\} \le 1/2$ при любом целом $n \ge 0$? Ожидаемый отрицательный ответ на этот вопрос следовал бы из оценки

$$\varlimsup_{n\to\infty}\{\xi(3/2)^n\} - \varliminf_{n\to\infty}\{\xi(3/2)^n\} > 1/2,$$

где $\xi \ne 0$. Флатто, Лагариас и Поллингтон [9] доказали, что это неравенство верно с меньшей постоянной, а именно что левая часть не меньше 1/3. Подобные оценки между наибольшей и наименьшей предельными точками последовательности $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и разнообразные с этим связанные задачи ранее рассматривались в работах Тайдемана [10] и Поллингтона [11], а в последнее время — в работах [12–20].

Наиболее общая формулировка задачи типа Малера о Z-числах такова: пусть α — действительное число, а A — некоторое подмножество интервала $[0, 1)$; верно ли, что при любом ненулевом ξ бесконечно много дробных долей $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, лежат в множестве A? (Собственно, задача Малера — это сформулированная выше задача для пары $\alpha = 3/2$, $A = (1/2, 1)$.) Ясно, что чем меньше множество A, тем сложнее эта задача. Для некоторых алгебраических значений α и интервалов A эта задача рассматривалась в [12–14] и [16–18]. Оказывается, что для некоторых алгебраических чисел $\alpha > 1$, например, для $\alpha = 5/2$, существует такое $\xi \ne 0$, что все дробные доли $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а также все предельные точки этой последовательности лежат в множестве с нулевой мерой Лебега.

Насколько маленьким может быть множество дробных долей $\{\xi\alpha^n\}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$? Когда оно конечно? Когда оно состоит из одной точки? На эти вопросы мы ответим, воспользовавшись следующей теоремой, которая является основным результатом настоящей работы.

Теорема. *Пусть $\xi \ne 0$ и $\alpha > 1$ — вещественные числа. Тогда дробные доли $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, принимают некоторое значение $t \in [0, 1)$ бесконечное количество раз тогда и только тогда, когда существуют такие целые числа $q \ge 2$, $d \ge 1$, $\ell \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $u \ne 0$, $v \ge 1$, что $\alpha = q^{1/d}$ и $\xi = \frac{u}{v}q^{\ell/d}$.*

Доказательство достаточности указанных представлений $\alpha = q^{1/d}$, $\xi = uq^{\ell/d}/v$ для выполнения условия теоремы несложно. Однако доказательство необходимости, т. е. того, что больше нет никаких пар ξ, α (где α — алгебраическое или трансцендентное число), обладающих этим свойством, нетривиально. В частности, мы воспользуемся следующим результатом Бойда [21]: *если $\alpha > 0$ — вещественный корень неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$, все корни которого лежат в круге $|z| \le \alpha$, в том числе m из них — на окружности $|z| = \alpha$, то существует такой многочлен $G(x) \in \mathbb{Z}[x]$, что $F(x) = G(x^m)$.* Этот результат впоследствии уточнялся и обобщался в работах Фергюсона [22], а также Друнгиласа и автора [23].

2. Доказательство теоремы

Достаточность. Пусть $\alpha = q^{1/d}$, $\xi = uq^{\ell/d}/v$, где $q \ge 2$, $d \ge 1$, $\ell \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $u \ne 0$, $v \ge 1$ — целые числа. Пусть v_1 — наибольший делитель числа v, не имеющий общих делителей с q. Запишем v в виде $v = v_0v_1$, где НОД$(v_1, q) = 1$ и НОД$(v_0, q) > 1$, если $v_0 > 1$. Очевидно, существуют такие целые числа $m_0 \ge 0$ и $m_1 \ge 1$, что $v_0|q^{m_0}$, $v_1|(q^{m_1} - 1)$. Наконец, пусть $m :=$

$[m_0/m_1]+1$ (что влечет $mm_1 \geq m_0$) и
$$\mathscr{M} := \{(m+k)m_1 d - \ell \mid k = 0,1,2,\dots\}.$$
Докажем, что все дробные доли $\{\xi\alpha^n\} = \{(u/v)q^{(\ell+n)/d}\}$, где $n \in \mathscr{M}$, равны.

Действительно, для этого достаточно показать, что все разности
$$(u/v)q^{(\ell+n)/d} - (u/v)q^{(\ell+n')/d} = (u/v)q^{(\ell+n')/d}(q^{(n-n')/d}-1)$$
$$= u\frac{q^{(\ell+n')/d}}{v_0}\frac{q^{(n-n')/d}-1}{v_1},$$
где $n,n' \in \mathscr{M}$, $n > n'$, являются целыми числами. Записав $n = (m+k)m_1 d - \ell$ и $n' = (m+k')m_1 d - \ell$ с целыми $k,k' \geq 0$, ввиду наших определений, получим, что $q^{(\ell+n')/d}/v_0 = q^{(m+k')m_1}/v_0$ и $(q^{(n-n')/d}-1)/v_1 = (q^{(k-k')m_1}-1)/v_1$ являются целыми числами, что и завершает доказательство достаточности.

Необходимость. Предположим, что существует такое бесконечное подмножество $\mathbb{N}$, скажем $\mathscr{N}$, что $\{\xi\alpha^n\} = t$ при любом $n \in \mathscr{N}$. Это эквивалентно условию $\xi(\alpha^n - \alpha^{n'}) = z_n - z_{n'} \in \mathbb{Z}$ для всех пар $n,n' \in \mathscr{N}$, $n > n'$. Здесь $z_n := [\xi\alpha^n]$. Применив это равенство к парам n,n' и n,n'', где $n' \neq n''$ и n — достаточно большое число, и разделив полученные равенства одно на другое, имеем
$$(\alpha^n - \alpha^{n'})(z_n - z_{n''}) = (\alpha^n - \alpha^{n''})(z_n - z_{n'}).$$
Значит, α должно быть алгебраическим числом над полем $\mathbb{Q}$. Из равенства $\xi = (z_n - z_{n'})/(\alpha^n - \alpha^{n'})$ теперь следует, что $\xi \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Тем самым, зафиксировав n', мы получим бесконечно много равенств $\alpha^n = \alpha^{n'} + (z_n - z_{n'})/\xi$, где $n \in \mathscr{N}$. Выберем любое $s \in \mathbb{N}$, для которого $s\alpha^{n'}$ и $s\xi^{-1}$ — целые алгебраические числа. Тогда $s\alpha^n$ — целые алгебраические числа для бесконечно многих натуральных n. Разложив α в произведение простых идеалов, видим, что это возможно лишь тогда, когда α — целое алгебраическое число.

Далее, ввиду того, что $\xi \in \mathbb{Q}(\alpha)$, существуют многочлены $P(x), Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ такие, что $\xi = P(\alpha)$, $\xi\alpha^{n'} = Q(\alpha)$. Положив $x_n := z_n - z_{n'}$, из равенств $\xi(\alpha^n - \alpha^{n'}) = z_n - z_{n'}$ получим $P(\alpha)\alpha^n - Q(\alpha) = x_n \in \mathbb{Z}$. Ясно, что любое сопряженное к α над полем $\mathbb{Q}$, скажем α', тоже является корнем уравнения $P(\alpha')\alpha'^n - Q(\alpha') - x_n = 0$. Следовательно, $P(\alpha)\alpha^n - Q(\alpha) = P(\alpha')\alpha'^n - Q(\alpha')$ для всех $n \in \mathscr{N}$. Однако, взяв достаточно большое n, легко видеть, что модуль левой части больше, если $|\alpha| > |\alpha'|$, или соответственно меньше, если $|\alpha| < |\alpha'|$. Значит, все сопряженные к α над $\mathbb{Q}$ лежат на окружности $|z| = \alpha$. Если степень α над $\mathbb{Q}$ равна d, то, применив сформулированный во введении результат Бойда, получим, что целое алгебраическое число α степени d является корнем уравнения $G(x^d) = 0$, где $G(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Поэтому α — корень неприводимого над $\mathbb{Q}$ уравнения $x^d - q = 0$. Здесь $q \geq 2$, $d \geq 1$ — целые рациональные числа и $\alpha = q^{1/d}$ нельзя записать в виде $q'^{1/d'}$ с целыми q', d', где $d < d'$. Требуемое выражение для α получено.

Остается показать, что ξ является рациональным множителем неотрицательной степени числа $\alpha = q^{1/d}$. Так как множество $\mathscr{N}$ бесконечно, то оно содержит по крайней мере два элемента вида $dk - \ell$, где $k \in \mathbb{N}$, а ℓ — некоторое фиксированное число из множества $\{0,1,\dots,d-1\}$. Пусть $dk-\ell, dk'-\ell \in \mathscr{N}$. Рассмотрев разность
$$\xi\alpha^{dk-\ell} - \xi\alpha^{dk'-\ell} = \xi(q^{k-\ell/d} - q^{k'-\ell/d}) = \xi q^{-\ell/d}(q^k - q^{k'}) \in \mathbb{Z},$$
видим, что $\xi q^{-\ell/d} \in \mathbb{Q}$, т. е. $\xi = (u/v)q^{\ell/d}$ с целыми $u \neq 0$, $v \geq 1$, что и требовалось доказать.

3. Следствия

Первое следствие отвечает на вопросы, сформулированные во введении.

Следствие 1. *Пусть $\xi \neq 0$ и $\alpha > 1$ — вещественные числа, $S(\xi, \alpha) := \{\{\xi\alpha^n\} \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$. Тогда множество $S(\xi, \alpha)$ конечно тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $\xi \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. В частности, множество $S(\xi, \alpha)$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда $\alpha = q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $\xi = u/v$, где $u \neq 0$ и $v|(q-1)$ — целые числа,* НОД$(u, v) = 1$.

Ясно, что во всех остальных случаях множество $S(\xi, \alpha)$ счетно.

Доказательство следствия 1. Пусть $\alpha = q \geq 2$ — целое, $\xi = u/v$ — рациональное числа. Ясно, что дробные доли $\{uq^n/v\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, всегда принадлежат множеству $\{0, 1/v, \dots, (v-1)/v\}$. Следовательно, множество $S(u/v, q)$ конечно. Обратно, пусть $S(\xi, \alpha)$ конечно. Тогда по теореме $\alpha = q^{1/d}$, $\xi = uq^{\ell/d}/v$, где $\ell < d$. Без ограничения общности можем считать, что $q^{1/d} \neq q'^{1/d'}$, где q', d' — целые числа и $d' < d$. Так как $S(v\xi, \alpha^d) = S(uq^{\ell/d}, q)$ конечно, то $uq^{\ell/d}(q^n - q^{n'}) \in \mathbb{Z}$ для некоторой пары натуральных чисел $n \neq n'$. Значит, $q^{\ell/d} \in \mathbb{Q}$, что влечет $q^{\ell/d} \in \mathbb{N}$. Если $\ell > 0$, то, положив $q_1 = q^{\ell/d}$, получим равенство $q^{1/d} = q_1^{1/\ell}$; противоречие. Тем самым $\ell = 0$, что эквивалентно $\xi \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Остается показать, что $d = 1$, т. е. $\alpha \in \mathbb{N}$. Так как $S(u, q^{1/d})$ конечно, по крайней мере для двух чисел вида $1 + dk$ и $1 + dk'$, где $k, k' \in \mathbb{N}$, дробные доли $\{uq^{(1+dk)/d}\}$ и $\{uq^{(1+dk')/d}\}$ равны. Поэтому $u(q^k - q^{k'})q^{1/d} \in \mathbb{Z}$. Теперь ясно, что $\alpha = q^{1/d} \in \mathbb{Q}$, а это возможно лишь при $d = 1$. Отсюда $\alpha \in \mathbb{N}$. Первая часть следствия доказана.

Если $\alpha = q \geq 2$ и $\xi = u/v$, где $v|(q-1)$, то $v|(q^n - 1)$, поэтому

$$\{\xi\alpha^n\} = \{uq^n/v\} = \{u(q^n - 1)/v + u/v\} = \{u/v\}$$

при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$. Значит, $S(u/v, q)$ состоит из одной точки. Обратно, пусть $S(\xi, \alpha)$ состоит из одной точки. Тогда по первой части следствия $\alpha = q \geq 2$, $\xi = u/v$, где НОД$(u, v) = 1$ без ограничения общности. Так как дробные доли $\{\xi\alpha\} = \{uq/v\}$ и $\{\xi\} = \{u/v\}$ равны, их разность $u(q-1)/v$ — целое число. Поэтому $v|(q-1)$, что и завершает доказательство следствия.

Дальнейшие результаты вытекают непосредственно из теоремы.

Следствие 2. *Пусть $\alpha > 1$ — вещественное число, $\alpha \neq q^{1/d}$ с $q, d \in \mathbb{N}$, и пусть $A \subset [0, 1)$. Предположим, что существует $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такое, что $\{\xi\alpha^n\} \in A$ для каждого $n = 0, 1, 2 \dots$. Если F — любое конечное подмножество A, то существует $\xi' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такое, что $\{\xi'\alpha^n\} \in A \setminus F$ для каждого $n = 0, 1, 2 \dots$.*

Следствие 3. *Пусть $\alpha > 1$ — вещественное число, $\alpha \neq q^{1/d}$ с $q, d \in \mathbb{N}$, и пусть B — любое, а F — конечное подмножества $[0, 1)$. Тогда если существует такое $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что $\{\xi\alpha^n\} \notin B$ для всех $n = 0, 1, 2 \dots$, то существует и такое $\xi' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что $\{\xi'\alpha^n\} \notin B \cup F$ для всех $n = 0, 1, 2 \dots$.*

Следствия 2 и 3 позволяют отнимать или добавлять конечные множества (например, концы интервалов) в различных теоремах о множествах, в которых все дробные доли степеней лежат или, наоборот, не лежат (как в [13, 14, 16, 18]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vaughan R. C., Wooley T. D.* Waring's problem: a survey // Number theory for the millennium. III (Urbana, IL, 2000). Natick, MA: A. K. Peters, 2002. P. 301–340.

2. *Mahler K.* On the fractional parts of the powers of a rational number. II // Mathematika. 1957. V. 4. P. 122–124.
3. *Zudilin W.* A new lower bound for $\|(3/2)^k\|$ // Théor. des Nombres Bordeaux. (To appear).
4. *Erdös P.* Problems and results on Diophantine approximations. II // Repartition modulo 1. Actes Colloq. Marseille: Luminy, 1974. Berlin: Springer-Verl., 1975. P. 89–99. (Lecture Notes in Math.; V. 475).
5. *Weyl H.* Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 313–352.
6. *Koksma J. F.* Ein mengen-theoretischer Satz über Gleichverteilung modulo eins // Compositio Math. 1935. V. 2. P. 250–258.
7. *Mahler K.* An unsolved problem on the powers of 3/2 // J. Austral. Math. Soc. 1968. V. 8. P. 313–321.
8. *Vijayaraghavan T.* On the fractional parts of the powers of a number // J. London Math. Soc. 1940. V. 15. P. 159–160.
9. *Flatto L., Lagarias J. C., Pollington A. D.* On the range of fractional parts $\{\xi(p/q)^n\}$ // Acta Arith. 1995. V. 70, N 2. P. 125–147.
10. *Tijdeman R.* Note on Mahler's $\frac{3}{2}$-problem // K. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 1972. V. 16. P. 1–4.
11. *Pollington A. D.* Progressions arithmétiques généralisées et le problème des $(3/2)^n$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1981. V. 292. P. 383–384.
12. *Adhikari S. D., Rath P., Saradha N.* On the sets of uniqueness of the distribution function of $\{\xi(p/q)^n\}$ // Acta Arith. 2005. V. 19, N 4. P. 307–316.
13. *Akiyama S.* Mahler's Z-number and 3/2 number system. (Preprint).
14. *Akiyama S., Frougny C., Sakarovitch J.* On the representation of numbers in a rational base // Proc. of Word 2005. Montréal, Canada, 2005. P. 47–64. (Monographies du LaCIM 36, UQaM).
15. *Bugeaud Y.* Linear mod one transformations and the distribution of fractional parts $\{\xi(p/q)^n\}$ // Acta Arith. 2004. V. 114, N 4. P. 301–311.
16. *Bugeaud Y., Dubickas A.* Fractional parts of powers and Sturmian words // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 2005. V. 341, N 2. P. 69–74.
17. *Dubickas A.* Arithmetical properties of powers of algebraic numbers // Bull. London Math. Soc. 2006. V. 38, N 1. P. 70–80.
18. *Dubickas A.* On the distance from a rational power to the nearest integer // J. Number Theory. 2006. V. 117, N 1. P. 222–239.
19. *Dubickas A., Novikas A.* Integer parts of powers of rational numbers // Math. Z. 2005. Bd 251, N 3. S. 635–648.
20. *Zaimi T.* An arithmetical property of powers of Salem numbers // J. Number Theory. (To appear).
21. *Boyd D. W.* Irreducible polynomials with many roots of maximal modulus // Acta Arith. 1994. V. 68, N 1. P. 85–88.
22. *Ferguson R.* Irreducible polynomials with many roots of equal modulus // Acta Arith. 1997. V. 78, N 3. P. 221–225.
23. *Drungilas P., Dubickas A.* On subfields of a field generated by two conjugate algebraic numbers // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2004. V. 47, N 1. P. 119–123.

Статья поступила 4 сентября 2005 г.

Дубицкас Артурас
Вильнюсский университет, факультет математики и информатики,
Наугардуко 24, LT-03225 Вильнюс, Литва
`arturas.dubickas@maf.vu.lt`