Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 512.552.16

О ЛИЕВЫХ ИДЕАЛАХ С ОБОБЩЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯМИ

О. Гёлбаши, К. Кая

Аннотация: Пусть R — первичное кольцо характеристики, отличной от двух, U — ненулевой лиев идеал в R и f — обобщенное дифференцирование, ассоциированное с d. Доказан следующий результат: (i) если $a \in R$ и $[a, f(U)] = 0$, то либо $a \in Z$, либо $d(a) = 0$, либо $U \subset Z$; (ii) если $f^2(U) = 0$, то $U \subset Z$; (iii) если $u^2 \in U$ для всех $u \in U$ и f действует как гомоморфизм или антигомоморфизм на U, то либо $d = 0$, либо $U \subset Z$.

Ключевые слова: дифференцирование, лиев идеал, обобщенное дифференцирование, гомоморфизм, антигомоморфизм.

1. Введение

Через R будем обозначать ассоциативное кольцо и через Z — его центр. Напомним, что R первично, если $xRy = 0$ влечет $x = 0$ или $y = 0$. Для любых $x, y \in R$ символ $[x, y]$ обозначает коммутатор $xy - yx$. Аддитивная подгруппа U в R называется *лиевым идеалом в* R, если $[u, r] \in U$ для всех $u \in U$, $r \in R$. Аддитивное отображение $d : R \to R$ называется *дифференцированием*, если равенство $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ справедливо для всех $x, y \in R$. Пусть S — непустое подмножество в R и d — дифференцирование кольца R. Если $d(xy) = d(x)d(y)$ (или $d(xy) = d(y)d(x)$) для всех $x, y \in S$, то d называется *дифференцированием*, которое действует как гомоморфизм (или соответственно антигомоморфизм) на S.

Понятие обобщенного дифференцирования первичного кольца R введено Хвала в [1]. Многие авторы исследовали свойства первичных или полупервичных колец с обобщенными дифференцированиями.

В [2] Херстейн доказал, что если R — первичное кольцо характеристики, отличной от двух, и d — ненулевое дифференцирование такое, что $[d(x), a] = 0$ для всех $x \in R$, то либо R коммутативно, либо $a \in Z$. В [3] этот результат обобщен в предположении, что $[d(x), a] \subset Z$ для всех $x \in R$. Затем те же авторы в [4] для лиева идеала U кольца R доказали следующее: (i) если $d^2(U) \subset Z$, то $U \subset Z$; (ii) если $[a, d(U)] \subset Z$ для $a \in R$, то $a \in Z$ или $U \subset Z$. Одной из наших главных целей является доказательство того, что этот результат имеет место и для обобщенного дифференцирования кольца R.

В [5] Бэлл и Каппе доказали, что если d — дифференцирование в R, которое является гомоморфизмом или антигомоморфизмом полупервичного кольца R или ненулевого правого идеала в R, то $d = 0$. Позднее в [6] этот результат был доказан для лиева идеала кольца R, а в [7] — для обобщенного дифференцирования. Естественно посмотреть аналоги этого результата для обобщенного дифференцирования и лиева идеала в R такого, что $u^2 \in U$ для всех $u \in U$.

В настоящей статье мы предполагаем, что R — первичное кольцо характеристики $\neq 2$, $f : R \to R$ — обобщенное дифференцирование в R, ассоциированное с ненулевым дифференцированием d, и U — ненулевой лиев идеал в R.

2. Результаты

Определение. Пусть R — кольцо, а d — дифференцирование кольца R. Аддитивное отображение $f : R \to R$ называется *правым* (*левым*) *обобщенным дифференцированием, ассоциированным с* d, если

$$f(xy) = f(x)y + xd(y) \quad \text{для всех } x, y \in R, \tag{2.1}$$

соответственно

$$f(xy) = d(x)y + xf(y) \quad \text{для всех } x, y \in R, \tag{2.2}$$

и *обобщенным дифференцированием, ассоциированным с* d, если оно является левым и правым обобщенным дифференцированием, ассоциированным с d.

Замечание 1. Для всех $x, y \in R$ справедливо

$$f([x, y]) = f(xy - yx) = f(x)y + xd(y) - d(y)x - yf(x) = [f(x), y] + [x, d(y)].$$

Лемма 1. *Если $f(U) = 0$, то $U \subset Z$.*

Доказательство. Пусть $u \in U$, $x \in R$. Тогда $0 = f([u, x]) = [f(u), x] + [u, d(x)]$ и поэтому $[U, d(R)] = 0$. Из [2] следует, что $U \subset Z$. $\square$

Лемма 2. *Если $f(U) \subset Z$, то $U \subset Z$.*

Доказательство. Для любых $u, w \in U$ имеем $f([u, w]) \in Z$, откуда

$$f([u, w]) = f(u)w + ud(w) - d(w)u - wf(u).$$

Используя $f(u) \in Z$, получаем $[U, d(U)] \subset Z$. Согласно [4, теорема 2] $U \subset Z$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $a \in R$, тогда*
(i) *если $af(U) = 0$, то $a = 0$ или $U \subset Z$;*
(ii) *если $f(U)a = 0$, то $a = 0$ или $U \subset Z$.*

Доказательство. (i) Предположим, что U является неабелевым лиевым идеалом в R. По [8, лемма 1] существует ненулевой идеал M в R такой, что $[R, M] \subset U$, но $[R, M] \nsubseteq Z$. Для любых $x \in R$ и $m \in M$ будет $[x, m]m = [xm, m] \in U$. Тогда

$$0 = af([x, m]m) = af([x, m])m + a[x, m]d(m)$$

и поэтому $a[x, m]d(m) = 0$ для всех $x \in R$, $m \in M$.

Заменяя x на $f(u)x$ и принимая во внимание равенство $af(u) = 0$, имеем

$$0 = a[f(u)x, m]d(m) = af(u)[x, m]d(m) + a[f(u), m]xd(m),$$

тем самым $a[f(u), m]xd(m) = 0$ для всех $x \in R$, $m \in M$, $u \in U$.

Поскольку R первично, отсюда следует, что

$$a[f(u), m] = 0 \ \text{ или } \ d(m) = 0 \ \text{ для всех } m \in M, \ u \in U.$$

Пусть

$$L = \{m \in M \mid a[f(u), m] = 0 \text{ для всех } u \in U\}, \quad K = \{m \in M \mid d(m) = 0\}.$$

Очевидно, L и K являются аддитивными подгруппами в M такими, что $M = L \cup K$. Но группа не может быть теоретико-множественным объединением двух собственных подгрупп. Следовательно, $K = M$ или $L = M$. В первом случае $d(M) = 0$, что влечет $d = 0$; противоречие. Таким образом, $M = L$, откуда

$$a[f(u), M] = 0 \ \text{ для всех } u \in U.$$

Раскрывая последнее равенство, получаем $aMf(U) = 0$ и либо $a = 0$, либо $f(U) = 0$. Последний случай невозможен по лемме 1. Следовательно, $a = 0$.

(ii) Используя включение $m[x, m] \in U$ для $m \in M$, $x \in R$ и тот факт, что f — правое обобщенное дифференцирование кольца R, получаем подобное доказательство в случае $f(U)a = 0$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $d(Z) \neq 0$ и $a \in R$. Если $[a, f(U)] = 0$, то $a \in Z$ или $U \subset Z$.*

Доказательство. Выберем $\alpha \in Z$ таким, что $d(\alpha) \neq 0$. Легко видеть, что $d(\alpha) \in Z$. Для $u \in U$, $x \in R$ будет $\alpha[u, x] = [u, \alpha x] \in U$. Из условия имеем

$$0 = [a, f(\alpha[u, x])] = [a, d(\alpha)[u, x] + \alpha f([u, x])] = d(\alpha)[a, [u, x]].$$

Поскольку R первично и $0 \neq d(\alpha) \in Z$, то

$$[a, [u, x]] = 0 \ \text{ для всех } x \in R, \ u \in U. \tag{2.3}$$

Определим внутренние дифференцирования $I_a : R \to R$, $I_a(x) = [a, x]$ и $I_u : R \to R$, $I_u(x) = [u, x]$. Из (2.3) следует, что $I_a I_u(R) = 0$. Таким образом, $I_a = 0$ или $I_u = 0$ по [9, теорема 1], т. е. $a \in Z$ или $U \subset Z$. $\square$

Лемма 5. *Если $a \in R$ и $[a, f(U)] = 0$, то либо $a \in Z$, либо $d(a) = 0$, либо $U \subset Z$.*

Доказательство. По условию $0 = [a, f([u, a])] = [a, [f(u), a]] + [a, [u, d(a)]]$, поэтому

$$[[U, d(a)], a] = 0, \tag{2.4}$$

т. е. $I_a I_{d(a)}(U) = 0$. По [6, теорема 4] либо $a \in Z$, либо $d(a) \in Z$, либо $U \subset Z$.

Предположим, что $d(a) \in Z$. Для любого $u \in U$ имеем

$$0 = [a, f([u, a^2])] = [a, [f(u), a^2]] + [a, [u, d(a^2)]].$$

Из условия леммы и включения $d(a) \in Z$ получаем, что

$$[a, [u, a]]d(a) = 0 \ \text{ для всех } u \in U.$$

Поскольку R первично и $d(a) \in Z$, то

$$d(a) = 0 \ \text{ или } \ [[u, a], a] = 0 \ \text{ для всех } u \in U.$$

Во втором случае $I_a^2(U) = 0$, поэтому $a \in Z$ или $U \subset Z$ по [8, теорема 1]. Таким образом, либо $a \in Z$, либо $d(a) = 0$, либо $U \subset Z$. $\square$

Теорема 1. *Если $f^2(U) = 0$, то $U \subset Z$.*

Доказательство. Предположим, что $U \not\subseteq Z$. Раскрывая $f^2([f(u), w]) = 0$ и используя равенство $f^2(u) = 0$ для $u, w \in U$, имеем

$$0 = f^2([f(u), w]) = f([f^2(u), w] + [f(u), d(w)]) = [f^2(u), d(w)] + [f(u), d^2(w)],$$

тем самым

$$[f(u), d^2(w)] = 0 \ \text{ для всех } u, w \in U. \tag{2.5}$$

Из леммы 5 следует, что $d^2(w) \subset Z$ или $d^3(w) = 0$. Положим $A = \{w \in U \mid d^2(w) \in Z\}$ и $B = \{w \in U \mid d^3(w) = 0\}$. Из трюка Брауэра мы должны иметь $U = A$ или $U = B$. В первом случае $d^2(U) \subset Z$, откуда $U \subset Z$ ввиду [4, теорема 1]; противоречие. Таким образом, $U = B$, т. е. $d^3(U) = 0$, поэтому $d^3(R) = 0$ по [8, лемма 11]. Для всех $r \in R$, $u \in U$ справедливо $0 = f^2([u, r]) = f([f(u), r] + [u, d(r)])$, так что

$$2[f(u), d(r)] + [u, d^2(r)] = 0 \text{ для всех } u \in U,\ r \in R. \tag{2.6}$$

Заменяя r на $rd^2(v), v \in U$, в (2.6) и замечая, что $d^3 = 0$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= 2[f(u), d(r)d^2(v) + rd^3(v)] + [u, d^2(r)d^2(v) + d(r)d^3(v)] \\ &= 2[f(u), d(r)]d^2(v) + 2d(r)[f(u), d^2(v)] + d^2(r)[u, d^2(v)] + [u, d^2(r)]d^2(v). \end{aligned}$$

Из последнего равенства, (2.5) и (2.6) получаем

$$d^2(r)[u, d^2(v)] = 0 \text{ для всех } r \in R,\ u, v \in U. \tag{2.7}$$

Определим $I_{d^2(v)} : R \to R$, $I_{d^2(v)}(x) = [x, d^2(v)]$. Очевидно, что $I_{d^2(v)}$ является внутренним дифференцированием кольца R. Более того, из (2.7) следует, что $d^2(r)I_{d^2(v)}(U) = 0$ для всех $r \in R$, $v \in U$. По [8, теорема 4] имеем

$$d^2(R) = 0 \text{ или } d^2(U) \subset Z.$$

Если $d^2(R) = 0$, то R — коммутативное кольцо, поэтому $U \subset Z$ ввиду [3, теорема 3]; противоречие. Если $d^2(U) \subset Z$, то $U \subset Z$ по [4, теорема 1]. Таким образом, $U \subset Z$ в любом случае. Это завершает доказательство. $\square$

Замечание 2. Из предположения, что $u^2 \in U$ для всех $u \in U$, получаем $(u+v)^2 \in U$, поэтому $(u+v)^2 - u^2 - v^2 = uv + vu \in U$ для всех $u, v \in U$. Также имеем $vu - uv \in U$ для всех $u, v \in U$. Следовательно, $2vu \in U$ для всех $u, v \in U$.

Теорема 2. *Пусть $u^2 \in U$ для всех $u \in U$. Если $f(uv) = f(u)f(v)$ для всех $u, v \in U$, то $U \subset Z$.*

Доказательство. Предположим, что $U \not\subseteq Z$. Если f действует как гомоморфизм на U, то

$$f(uv) = f(u)v + ud(v) = f(u)f(v) \quad \text{для всех } u, v \in U. \tag{2.8}$$

Заменяя u на $2uw$, $w \in U$, в (2.8), имеем

$$f(2uw)v + 2uwd(v) = f(2uw)f(v),$$

$$2f(u)f(w)v + 2uwd(v) = 2f(u)f(w)f(v) = 2f(u)f(wv) = 2f(u)f(w)v + 2f(u)wd(v),$$

тем самым

$$2uwd(v) = 2f(u)wd(v) \text{ для всех } u, v, w \in U.$$

Так как $\operatorname{char} R \neq 2$, то

$$(u - f(u))wd(v) = 0 \text{ для всех } u, v, w \in U.$$

Из [8, лемма 4] заключаем, что $d(U) = 0$ или $u = f(u)$ для всех $u \in U$.

Если $u = f(u)$ для всех $u \in U$, то $2uv = f(2uv)$ и $2uf(v) = 2d(u)v + 2uf(v)$. Это дает $d(U)U = 0$. По [8, лемма 7] получаем, что $d(U) = 0$. Таким образом, $d(U) = 0$ в любом случае. Следовательно, $d = 0$ ввиду [8, лемма 5]; противоречие с тем, что $d \neq 0$. Поэтому $U \subset Z$. $\square$

Теорема 3. *Пусть* $u^2 \in U$ *для всех* $u \in U$. *Если* $f(uv) = f(v)f(u)$ *для всех* $u, v \in U$, *то* $U \subset Z$.

Доказательство. Предположим, что $U \not\subseteq Z$. Так как d действует как антигомоморфизм на U, то

$$f(uv) = d(u)v + uf(v) = f(v)f(u) \text{ для всех } u, v \in U. \tag{2.9}$$

Записывая $2uv$ вместо v в (2.9), имеем

$$2d(u)uv + uf(2uv) = f(2uv)f(u),$$

$$2d(u)uv + 2uf(v)f(u) = 2d(u)vf(u) + 2uf(v)f(u).$$

Так как $\operatorname{char} R \neq 2$, из условия следует, что

$$d(u)uv = d(u)vf(u) \text{ для всех } u, v \in U. \tag{2.10}$$

Заменяя в (2.10) v на $2vw$, где $w \in U$, и используя получаемое равенство, находим, что

$$d(u)v[f(u), w] = 0 \text{ для всех } u, v, w \in U.$$

По [8, лемма 4] получаем

$$d(u) = 0 \text{ или } [f(u), w] = 0 \text{ для всех } u, w \in U.$$

Далее, пусть

$$A = \{u \in U \mid d(u) = 0\}, \quad B = \{u \in U \mid [f(u), w] = 0 \text{ для всех } w \in U\}.$$

Очевидно, что A и B являются аддитивными подгруппами в U и $U = A \cup B$. Но группа не может быть объединением двух собственных подгрупп. Следовательно, $U = A$ или $U = B$. В любом случае по [8, лемма 5] приходим к противоречию. Таким образом, $U \subset Z$. □

Теорема 4. *Пусть* $u^2 \in U$ *для всех* $u \in U$. *Если* $f(uv) = f(vu)$ *для всех* $u, v \in U$, *то* $U \subset Z$.

Доказательство. По условию $f(c) = 0$, где $c = [u, v]$. С другой стороны, для любого $w \in U$ имеем $f(cw) = f(wc)$, что дает $f(c)w + cd(w) = d(w)c + wf(c)$, поэтому

$$[c, d(w)] = 0 \text{ для всех } w \in U. \tag{2.11}$$

Заменим w на $2uc$ ($c \in U$) в (2.11), чтобы получить

$$[c, u]d(c) = 0 \text{ для всех } u \in U.$$

Подставляя в предыдущем равенстве $2uv$ вместо u, находим, что

$$[c, u]vd(c) = 0 \text{ для всех } u, v \in U.$$

Следовательно, либо $d(c) = 0$, либо $c \in Z$ по [8, лемма 4], т. е.

$$[u, v] \in Z \text{ или } d([u, v]) = 0 \text{ для всех } u, v \in U.$$

Пусть $A = \{u \in U \mid [u, v] \in Z \text{ для всех } v \in U\}$ и $B = \{u \in U \mid d([u, v]) = 0 \text{ для всех } v \in U\}$. Используя трюк Брауэра, получаем $U = A$ или $U = B$.

Если $U = A$, то $[U, U] \subset Z$. Таким образом, $U \subset Z$ по [10, лемма 1]. Если $U = B$, то $d([U, U]) = 0$. Мы знаем, что $[U, U]$ — лиев идеал в R. Согласно [8, лемма 5] имеем $[U, U] \subset Z$, поэтому $U \subset Z$ по ранее доказанной теореме. Это завершает доказательство. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hvala B.* Generalized derivations in rings // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 4. P. 1147–1166.
2. *Herstein I. N.* A note on derivations. II // Canad. Math. Bull. 1979. V. 22, N 4. P. 509–511.
3. *Lee P. H., Lee T. K.* On derivations of prime rings // Chinese J. Math. 1981. V. 9, N 2. P. 107–110.
4. *Lee P. H., Lee T. K.* Lie ideals of prime rings with derivations // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. 1983. V. 11. P. 75–79.
5. *Bell H. E., Kappe L. C.* Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions // Acta Math. Hungar. 1989. V. 53, N 3/4. P. 339–346.
6. *Asma A., Rehman N., Shakir A.* On Lie ideals with derivations as homomorphisms and anti-homomorphisms // Acta Math. Hungar. 2003. V. 101, N 1/2. P. 79–82.
7. *Rehman N.* On generalized derivations as homomorphisms and anti-homomorphisms // Glas. Mat. 2004. V. 39, N 1. P. 27–30.
8. *Bergen J., Herstein I. N., Kerr J. W.* Lie ideals and derivation of prime rings // J. Algebra. 1981. V. 71. P. 259–267.
9. *Posner E. C.* Derivations in prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1093–1100.
10. *Herstein I. N.* On the Lie structure of an associative ring // J. Algebra. 1970. V. 14. P. 561–571.

Статья поступила 4 февраля 2005 г., окончательный вариант — 10 января 2006 г.

Öznur Gölbaşı (Ознур Гёлбаши)
Cumhuriyet University, Faculty of Arts and Science,
Department of Mathematics,
Sivas, TURKEY
`ogolbasi@cumhuriyet.edu.tr`, `http://www.cumhuriyet.edu.tr`

Kazım Kaya (Казим Кая)
Çanakkale 18 Mart University, Faculty of Arts and Science,
Department of Mathematics,
Çanakkale, TURKEY
`kkaya@comu.edu.tr`, `http://www.comu.edu.tr`