Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 512.542+512.544.6

О СТРОГОЙ ВЕЩЕСТВЕННОСТИ УНИПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП ГРУПП ЛИЕВА ТИПА НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

М. А. Газданова, Я. Н. Нужин

Аннотация: Группу G назовем *строго вещественной,* если любой ее неединичный элемент строго вещественный, т. е. сопряжен некоторой инволюцией из G со своим обратным элементом. Для классических групп лиева ранга l при $l \leq 4$ и $l \geq 13$ над произвольным полем и исключительных групп лиева типа над полем K, в котором существует элемент η такой, что многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K[X]$ или $K_0[X]$ (в частности, если K — конечное поле), получен ответ на следующий вопрос. Какие унипотентные подгруппы групп лиева типа над полем характеристики 2 являются строго вещественными?

Ключевые слова: группа лиева типа, унипотентная подгруппа, регулярный унипотентный элемент, строго вещественный элемент, граф коммутативности.

Введение

Назовем группу G *строго вещественной,* если любой ее неединичный элемент строго вещественный, т. е. сопряжен некоторой инволюцией из G со своим обратным элементом. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть U — унипотентная подгруппа группы лиева типа G ранга l над полем K характеристики* 2.

Подгруппа U не является строго вещественной, если

1) *тип G равен ${}^2A_{2l}$, $l \geq 1$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$;*

2) *$l \geq 13$ и тип G равен A_{l-1}, B_l, C_l, D_l, ${}^2A_{2l-1}$, ${}^2D_{l+1}$;*

3) *в поле K существует элемент η такой, что многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K[X]$ (в частности, если K — конечное поле) и тип G равен F_4, E_6, E_7, E_8;*

4) *в подполе неподвижных элементов K_0 существует элемент η_0 такой, что многочлен $X^2+X+\eta_0$ неприводим в $K_0[X]$ (в частности, если K — конечное поле) и тип G равен ${}^2E_6$.*

Подгруппа U является строго вещественной, если $l \leq 4$ и тип G отличен от типов из пп. 1, 3, 4.

В [1–5] описаны строго вещественные группы среди конечных простых групп, кроме ортогональных групп и исключительных групп лиева типа над конечными полями. В теореме 2 данной работы описываются строго вещественные регулярные унипотентные элементы групп лиева типа над конечными

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (грант № 12F021M), второго — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00824).

полями характеристики 2. Из этого описания, в частности, вытекает, что простые группы исключительных типов $^2B_2$, $^2F_4$, F_4, $^2E_6$, E_6, E_7, E_8 над конечным полем характеристики 2 не являются строго вещественными. В недавно вышедшей статье [6] показано, что все исключительные группы лиева типа над любым конечным полем не являются даже вещественными.

Результаты статьи частично анонсированы в [7].

§ 1. Свойства строго вещественных групп

Пусть G — строго вещественная группа, тогда по определению для любого ее неединичного элемента g существует инволюция $i \in g$ такая, что $igi = g^{-1}$. Отсюда g — произведение двух инволюций i и ig или $g = i$. Обратно, если $g = ij$, где i, j — две различные инволюции, то элемент g является строго вещественным. Следующие три леммы почти очевидны, и поэтому их доказательства мы опускаем.

Лемма 1. *Класс строго вещественных групп замкнут относительно гомоморфных образов и центральных произведений.*

Лемма 2. *Пусть G — конечная строго вещественная группа. Тогда для любого ее элемента g и любого ее (комплексного) характера ξ все числа $\xi(g)$ вещественные.*

Обычно элемент g (характер ξ) группы G называют *вещественным*, если числа $\xi(g)$ являются вещественными для любого характера ξ (соответственно для любого элемента g) группы G. Отметим, что вещественность и даже рациональность всех характеров группы G не влекут ее строгую вещественность.

Лемма 3. *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Тогда для любого $a \in A$ и любого $g \in G$ если элемент gag^{-1} строго веществен в A, то и элемент a строго веществен в A.*

Лемма 4 [8, с. 146]. *Пусть X — множество вершин конечного леса, $x \to g_x$ — отображение X в группу G такое, что g_x и g_y коммутируют всякий раз, когда вершины x и y не соединены в этом лесе. Пусть T — множество все линейных порядков на X. Для любого $\tau \in T$ обозначим символом p_τ произведение в G последовательности элементов $(g_x)_{x\in X}$, определенной порядком τ. Тогда все произведения p_τ сопряжены в группе G.*

Для произвольной группы G и любого ее элемента

$$g = g_1 \dots g_n, \quad g_i \in G \tag{1}$$

по представлению (1) определим простой граф $\Gamma(g) = \Gamma(g, g_1, \dots, g_n)$ на вершинах $g_1, \dots, g_n$. По определению вершины g_i и g_j соединены ребром тогда и только тогда, когда $g_ig_j \neq g_jg_i$. Граф $\Gamma(g)$ будем называть *графом коммутативности* элемента g в представлении (1).

Лемма 5. *Пусть в представлении (1) все g_i — инволюции и граф коммутативности $\Gamma(g)$ является лесом. Тогда g — строго вещественный элемент.*

Доказательство. Множество вершин $X = \{g_1, \dots, g_n\}$ любого леса можно разбить на два подмножества X_1 и X_2 таким образом, что если $g, f \in X_i$, $i = 1, 2$, то вершины g, f не соединены в этом лесе. Поэтому элемент

$$\prod_{g_i\in X_1} g_i \prod_{g_j\in X_2} g_j$$

раскладывается в произведение двух инволюций и, следовательно, является строго вещественным элементом. Осталось воспользоваться леммой 4. Лемма доказана.

§ 2. Обозначения в группах лиева типа

Далее всюду с нескрученной группой лиева типа G над полем K ассоциируется система корней Φ. Обозначения подгрупп и элементов группы G стандартные, например, такие, как в книге Картера [9]. В частности, Φ^+ — множество положительных корней системы Φ; $x_r(t)$ — корневые элементы, $r \in \Phi$, $t \in K$; X_r — корневая подгруппа, порожденная корневыми элементами $x_r(t)$, $t \in K$; U — унипотентная подгруппа, порожденная подгруппами X_r, $r \in \Phi^+$; B — борелевская подгруппа, содержащая подгруппу U; U_i — унипотентная подгруппа, порожденная подгруппами X_r для корней r высоты больше $i-1$ (в наших обозначениях $U_1 = U$); $\Pi = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$ — база системы Φ, и мы фиксируем расположение фундаментальных корней на схеме Дынкина такое, как в [8].

Со скрученной группой G типа ${}^n\Phi$ часто бывает удобно ассоциировать скрученную систему корней ${}^n\Phi$ (исключая тип ${}^2F_4$), в частности, при таком подходе естественно определяются ее корневые подгруппы X_r, $r \in {}^n\Phi$, и подгруппы U_i и B. Далее, если не оговаривается противное, мы связываем со крученной группой G типа ${}^n\Phi$ систему корней ${}^n\Phi$. Более точно, группе G типа ${}^n\Phi$ соответствует система корней типа

- B_l, если G типа ${}^2A_{2l}$ или ${}^2D_{l+1}$;
- C_l, если G типа ${}^2A_{2l-1}$;
- F_4, если G типа ${}^2E_6$;
- G_2, если G типа ${}^3D_4$;
- A_1, если G типа ${}^2B_2$ или ${}^2G_2$.

Группа G типа ${}^2F_4$ имеет 16 корневых подгрупп, каждая из которых изоморфна унипотентной подгруппе группы типа A_1 или типа ${}^2B_2$.

Для любого непустого подмножества $J \subset \Pi$ через Φ_J обозначим подсистему корней с базой J и положим

$$G_J = \langle X_r \mid r \in \Phi_J \rangle, \quad U_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ - \Phi_J^+ \rangle \text{ (подгруппа Леви)},$$

$$L_J = \langle X_r \mid r \in \Phi_J^+ \rangle \quad (= U \cap G_J).$$

Следующая лемма вытекает из разложения Леви для параболических подгрупп (см., например, [9, теорема 8.5.2]).

Лемма 6. 1. *U_J — нормальная подгруппа группы U.*
2. *$U = U_J L_J$.*
3. *$U_J \cap L_J = 1$.*

В силу леммы 6 можно говорить о проекции $\bar{u}$ элемента $u \in U$ на подгруппу L_J, а именно элемент $\bar{u}$ получается вычеркиванием всех корневых сомножителей x_r, $r \in \Phi^+ - \Phi_J^+$, из канонического представления элемента u в виде произведения корневых элементов в некотором порядке. Проекция $\bar{u}$ определяется однозначно, т. е. не зависит от представления элемента u. Ясно также, что оператор проектирования является гомоморфизмом групп. Поэтому справедлива

Лемма 7. *Пусть $\bar{g}, \bar{g}_1, \bar{g}_2$ — проекции на подгруппу L_J элементов $g, g_1, g_2 \in U$ соответственно. Тогда если $gg_2g^{-1} = g_1$, то $\bar{g}\bar{g}_2\bar{g}^{-1} = \bar{g}_1$.*

§ 3. Регулярные унипотентные элементы

В простой линейной алгебраической группе $\overline{G}$, ассоциированной с системой корней Φ с базой $\Pi = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$, элементы, сопряженные с элементами вида

$$x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_2)\dots x_{r_l}(t_l)x_{s_1}(u_1)\dots x_{s_k}(u_k), \quad t_i \neq 0,\ r_i < s_j, \qquad (2)$$

называются *регулярными унипотентными элементами*. Такие элементы естественно определяются для любой группы лиева типа G над произвольным полем, а именно регулярными унипотентными элементами группы G объявляются те регулярные унипотентные элементы группы $\overline{G}$, которые лежат в группе G. Число классов сопряженности регулярных унипотентных элементов $d = d(G)$ группы G над конечным полем известно, см., например, [10, лемма 5.2], в частности, справедлива

Лемма 8. *Пусть G — расширенная группа лиева типа над конечным полем характеристики 2. Тогда*
1) *$d = 1$, если G типа A_l, ${}^2A_l$;*
2) *$d = 4$, если G типа ${}^2F_4$, F_4, E_7, E_8;*
3) *$d = 2$ в остальных случаях.*

Лемма 9. *Пусть G — группа лиева типа над произвольным полем K, B — ее борелевская подгруппа, U — унипотентная подгруппа из B. Пусть $g \in G$, u — регулярный элемент из U. Тогда если $gug^{-1} \in U$, то $g \in B$. Более того, если $\operatorname{char} K = 2$ и g — инволюция, то $g \in U$. Таким образом, регулярный унипотентный элемент группы U над полем характеристики 2 является строго вещественным в U тогда и только тогда, когда он строго вещественный во всей группе G.*

Доказательство. Представим элемент g в каноническом виде $u_1 n_\omega u_2$, где $u_1, u_2 \in U$, а n_ω — мономиальный элемент. По условию леммы

$$n_\omega u_2 u u_2^{-1} n_\omega^{-1} = u_1^{-1} u^{-1} u_1.$$

Очевидно, элемент $u_2 u u_2^{-1}$ также является регулярным. Отсюда $w(\Pi) = \Pi$. Тогда $\omega = 1$ и, следовательно, $g \in B$. При $\operatorname{char} K = 2$ все инволюции из B лежат в ее подгруппе U. Поэтому если $gug^{-1} \in U$ и g — инволюция, то $g \in U$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если u — строго вещественный регулярный унипотентный элемент группы лиева типа G над полем характеристики 2, то для любого $J \subset \Pi$ его проекция $\bar{u}$ на подгруппу L_J является строго вещественным элементом группы G_J.*

Доказательство. По лемме 9 существует инволюция $i \in U$ такая, что $iui = u^{-1}$. В силу леммы 6

$$u = u'\bar{u},\ u' \in U_J,\ \bar{u} \in L_J, \quad i = i'\bar{i},\ i' \in U_J,\ \bar{i} \in L_J,$$

причем $\bar{i}$ — инволюция и $\bar{i}\bar{u}\bar{i} = \bar{u}^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 11. *В простой линейной алгебраической группе $\overline{G}$ над полем характеристики 2 все регулярные унипотентные элементы строго вещественны.*

Доказательство. В группе $\overline{G}$ все регулярные унипотентные элементы сопряжены [11, с. 212, п. 1.8(б)]. Граф коммутативности регулярного унипотентного элемента

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1) \qquad (3)$$

совпадает с графом Дынкина, если в последнем отождествить кратные ребра, и, следовательно, является деревом. Так как основное поле имеет характеристику 2, корневые элементы в представлении элемента (3) суть инволюции. Поэтому в силу леммы 5 элемент (3) строго вещественный. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть G — группа Шевалле типа D_4 над полем K характеристики 2, $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ — база системы корней типа D_4, причем $r_1 + r_2$, $r_2 + r_3$, $r_2 + r_4$ — корни, и*

$$g_1 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1),$$

$$g_2 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta), \quad \eta \in K,$$

$$g = x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_2)x_{r_3}(t_3)x_{r_4}(t_4)u_2, \quad t_i \in K, \ u_2 \in U_2.$$

Тогда равенство $gg_2g^{-1} = g_1$ возможно только при $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t$ и $t^2 + t + \eta = 0$.

Доказательство. Из коммутаторной формулы Шевалле легко получаем равенство

$$gg_2g^{-1} = g_1x_{r_1+r_2}(t_1 + t_2)x_{r_3+r_2}(t_3 + t_2)x_{r_4+r_2}(t_4 + t_2)u_3$$

для некоторого $u_3 \in U_3$. Поэтому из условия $gg_2g^{-1} = g_1$ сразу следуют равенства $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t$. Таким образом,

$$g = x_{r_1}(t)x_{r_2}(t)x_{r_3}(t)x_{r_4}(t)x_{r_1+r_2}(t_5)x_{r_3+r_2}(t_6)x_{r_4+r_2}(t_7)u_3$$

для некоторых $t_5, t_6, t_7 \in K$ и подходящего $u_3 \in U_3$. Снова только из коммутаторной формулы Шевалле вытекает равенство

$$gg_2g^{-1} = g_1x_{r_1+r_2+r_3}(t_5+t_6+t)x_{r_1+r_2+r_4}(t_5+t_7+t)x_{r_2+r_3+r_4}(t_6+t_7+t^2+t+\eta)u_4$$

для некоторого $u_4 \in U_4$. Отсюда и из условия $gg_2g^{-1} = g_1$ получаем, что $t^2 + t + \eta = 0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G — расширенная группа лиева типа над конечным полем характеристики 2.*

1. *В группе G типа A_l, ${}^2A_{2l-1}$, B_l, C_l, D_l, ${}^2D_l$, ${}^3D_4$, G_2 все регулярные унипотентные элементы строго вещественны.*
2. *В группе G типа ${}^2A_{2l}$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$ все регулярные унипотентные элементы не строго вещественны.*
3. *Группа G типа E_6, ${}^2E_6$ содержит один класс строго вещественных и один класс не строго вещественных сопряженных регулярных унипотентных элементов.*
4. *Группа G типа E_7, E_8, F_4 содержит два класса строго вещественных и два класса не строго вещественных сопряженных регулярных унипотентных элементов.*

Доказательство. Для нескрученных групп в качестве представителя первого класса сопряженных регулярных унипотентных элементов можно всегда взять элемент (3). Рассуждения из доказательства леммы 11 для элемента (3) проходят и в этом случае.

Тип A_l. В группе G один класс сопряженных регулярных унипотентных элементов с представителем (3), который строго вещественный.

Тип ${}^2A_{2l-1}$, $l \geq 2$. В группе G все регулярные унипотентные элементы сопряжены и в качестве представителя можно взять элемент

$$(x_{r_1}(1)x_{r_{2l-1}}(1))(x_{r_2}(1)x_{r_{2l-2}}(1))\dots(x_{r_{l-1}}(1)x_{r_{l+1}}(1))x_{r_l}(1). \tag{4}$$

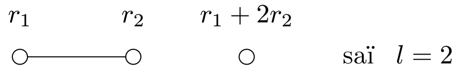

Рис. 1.

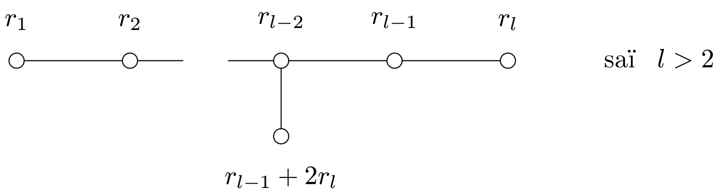

Рис. 2.

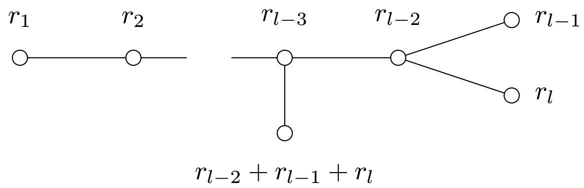

Рис. 3.

Все сомножители $(x_{r_1}(1)x_{r_{2l-1}}(1))$, $(x_{r_2}(1)x_{r_{2l-2}}(1))$, $\dots$, $(x_{r_{l-1}}(1)x_{r_{l+1}}(1))$, $x_{r_l}(1)$ в представлении элемента (4) лежат в группе G и являются инволюциями (именно здесь отличие типа ${}^2A_{2l-1}$ от типа ${}^2A_{2l}$), а его граф коммутативности является цепью. Поэтому в силу леммы 5 элемент (4) строго вещественный.

Тип B_l, $l \geq 2$. В группе G типа B_l два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов и в качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-1}+2r_l}(\eta), \tag{5}$$

где многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K[X]$. Действительно, по лемме 9 если элементы (3) и (5) сопряжены в G, то они сопряжены и в U. Пусть $l = 2$. Сопрягая (5) произвольным элементом

$$x_{r_1}(x)x_{r_2}(y)x_{r_1+r_2}(z)x_{r_1+2r_2}(t),$$

из U получим

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_1+r_2}(x+y)x_{r_1+2r_2}(x^2+x+\eta).$$

Приравнивая последний элемент к элементу (3), получаем равенство $x^2+x+\eta = 0$. Общий случай следует из случая $l = 2$ по лемме 7.

Граф коммутативности элемента (5) изображен на рис. 1, 2 и является лесом. Здесь вершины, соответствующие корневым элементам $x_r(t)$, нумеруются корнями r. Поэтому в силу леммы 5 элемент (5) строго вещественный.

Тип C_l, $l \geq 2$. Здесь нужно лишь отметить, что группы типа B_l и C_l над полем характеристики 2 изоморфны.

Тип D_l, $l \geq 4$. В группе G типа D_l, $l \geq 4$, два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов и в качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-2}+r_{l-1}+r_l}(\eta), \tag{6}$$

где многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K[X]$. Действительно, при $l = 4$ по леммам 9 и 12 элементы (3) и (6) не сопряжены. Общий случай следует из случая $l = 4$ по лемме 7.

Граф коммутативности элемента (6) имеет вид, изображенный на рис. 3, и является деревом. Поэтому в силу леммы 5 элемент (6) строго вещественный.

Тип ${}^2D_l$, $l \geq 4$. В группе G типа ${}^2D_l$, $l \geq 4$, два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов.

В качестве представителя первого класса можно взять элемент (3). Все сомножители $x_{r_1}(1), x_{r_2}(1), \dots, x_{r_{l-2}}(1), (x_{r_{l-1}}(1)x_{r_l}(1))$ в представлении элемента (3) лежат в группе G и являются инволюциями, а его граф коммутативности в этом представлении — цепь. Поэтому в силу леммы 5 элемент (3) является строго вещественным элементом в группе G.

В качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_{l-2}}(1)(x_{r_{l-1}}(1)x_{r_l}(1))x_{r_{l-2}+r_{l-1}+r_l}(\eta), \tag{7}$$

где многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K_0[X]$. Здесь K_0 — поле неподвижных элементов относительно полевого автоморфизма, участвующего в построении группы G. Действительно, пусть g_1, g_2, g, t, η такие, как в лемме 12. Если $g_1, g_2, g \in {}^2D_4(K)$, то по лемме 12 $gg_2g^{-1} = g_1$ тогда и только тогда, когда $t \in K_0$ и $t^2 + t + \eta = 0$. Отсюда при $l = 4$ по леммам 9 и 12 существует такое $\eta \in K_0$, что элементы (3) и (7) не сопряжены. Общий случай следует из случая $l = 4$ по лемме 7.

Все сомножители $x_{r_1}(1), x_{r_2}(1), \dots, x_{r_{l-2}}(1), (x_{r_{l-1}}(1)x_{r_l}(1)), x_{r_{l-2}+r_{l-1}+r_l}(\eta)$ в представлении элемента (7) лежат в группе G и являются инволюциями, а его граф коммутативности в этом представлении такой, как на рис. 2, поэтому в силу леммы 5 элемент (7) строго вещественный.

Тип ${}^3D_4$. В группе G типа ${}^3D_4$ два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В качестве представителя первого класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1), \tag{8}$$

который строго вещественен, так как является произведением двух инволюций $x_{r_1}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)$ и $x_{r_2}(1)$ из G. В качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(\eta), \tag{9}$$

где $\eta \in K_0$ и многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K_0[X]$. Граф коммутативности элемента (9) является цепью с тремя вершинами $x_{r_2}(1)$, $x_{r_1}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)$ и $x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(\eta)$. Так же, как и для типа ${}^2D_l$, можно показать, что элементы (8) и (9) не сопряжены.

Тип G_2. В группе G типа G_2 два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{3r_1+r_2}(\eta), \tag{10}$$

где $\eta \in K$ и многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K[X]$. Граф коммутативности элемента (10) является цепью. Если при построении группы типа ${}^3D_4$ взять тривиальный полевой автоморфизм, то получим группу, изоморфную группе типа G_2. Поэтому элементы (3) и (10) не сопряжены.

Типы ${}^2A_{2l}$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$. Подгруппа U типа ${}^2A_2$ и ${}^2B_2$ имеет ступень нильпотентности 2, и все ее инволюции лежат в центре, поэтому все ее регулярные элементы не могут быть строго вещественными, так как они имеют порядок 4. Отсюда по лемме 10 все регулярные унипотентные элементы группы G типа ${}^2A_{2l}$, ${}^2F_4$ также не могут быть строго вещественными.

Тип E_6. В группе G типа E_6 два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$g = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1), \tag{11}$$

где многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K[X]$. Действительно, корни r_2, r_3, r_4, r_5 составляют фундаментальную систему типа D_4, поэтому так же, как и для типа ${}^2D_l$, можно показать, что элементы (3) и (11) не сопряжены. Граф коммутативности элемента (11) содержит циклы. Покажем, что он не является строго вещественным.

Предположим, что элемент g инвертируется некоторой инволюцией $i \in U$, т. е.

$$g^i = g^{-1}. \tag{12}$$

Для подходящих $t_i \in K$ и подходящего $u_2 \in U_2$

$$i = x_{r_2}(t_2)x_{r_4}(t_4)x_{r_3}(t_3)x_{r_5}(t_5)x_{r_1}(t_1)x_{r_6}(t_6)u_2.$$

Представим элементы g и g^{-1} в виде произведения корневых элементов, согласованного с высотой корней:

$$\begin{aligned} g = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \\ = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \\ \times x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{-1} = x_{r_6}(1)x_{r_1}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1) \\ = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \\ \times x_{r_1+r_3}(1)x_{r_5+r_6}(1)x_{r_2+r_4}(1)x_{r_3+r_4}(1)x_{r_4+r_5}(1) \\ \times x_{r_3+r_4+r_5}(\eta+1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_2+r_3+2r_4+r_5}(1). \end{aligned}$$

Используя указанные выше представления элементов i, g и g^{-1}, получаем, что

$$\begin{aligned} (g^{-1})^i = g x_{r_1+r_3}(t_1+t_3+1)x_{r_5+r_6}(t_5+t_6+1) \\ \times x_{r_2+r_4}(t_2+t_4+1)x_{r_3+r_4}(t_3+t_4+1)x_{r_4+r_5}(t_4+t_5+1)u_3 \end{aligned}$$

для некоторого $u_3 \in U_3$. В силу равенства (12) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} t_1+t_3=1, \quad t_5+t_6=1, \quad t_2+t_4=1, \\ t_3+t_4=1, \quad t_4+t_5=1. \end{gathered}$$

Решая эту систему, получим равенства $t_1=t_4=t_6=t$, $t_2=t_3=t_5=t+1$ для некоторого $t \in K$. Поэтому

$$\begin{aligned} i = x_{r_2}(t+1)x_{r_4}(t)x_{r_3}(t+1)x_{r_5}(t+1)x_{r_1}(t)x_{r_6}(t) \\ \times x_{r_1+r_3}(v_1)x_{r_5+r_6}(v_2)x_{r_2+r_4}(v_3)x_{r_3+r_4}(v_4)x_{r_4+r_5}(v_5)u_3 \end{aligned}$$

для некоторых $v_i \in K$ и подходящего $u_3 \in U_3$. Отсюда

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_3+r_4}(v_1+v_4+1+t)x_{r_2+r_3+r_4}(v_3+v_4+t)x_{r_3+r_4+r_5}(v_4+v_5+t^2+t) \times x_{r_2+r_4+r_5}(v_3+v_5+t)x_{r_4+r_5+r_6}(v_2+v_5+1+t)u_4$$

для подходящего $u_4 \in U_4$. В силу равенства (12) имеем следующую систему уравнений:

$$v_1+v_4+1+t=0, \quad v_3+v_4+t=0, \quad v_4+v_5+t^2+t=0,$$
$$v_3+v_5+t=0, \quad v_2+v_5+1+t=0.$$

Решая эту систему, получаем $v_1=v_2=v$, $v_4=v_5=v+1+t$, $v_3=v+1$ для некоторого $v \in K$ и, следовательно, $t^2+t=t(t+1)=0$. Далее рассмотрим два случая: 1) $t=0$; 2) $t=1$.

1. Пусть $t=0$. Тогда для некоторых $p_i \in K$ и подходящего $u_4 \in U_4$

$$i = x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v+1)x_{r_4+r_5}(v+1) \times x_{r_1+r_3+r_4}(p_1)x_{r_2+r_3+r_4}(p_2)x_{r_3+r_4+r_5}(p_3)x_{r_2+r_4+r_5}(p_4)x_{r_4+r_5+r_6}(p_5)u_4.$$

Отсюда для подходящего $u_5 \in U_5$ получаем, что

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_2+r_3+r_4}(p_1+p_2) \times x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(p_1+p_3+v+1+\eta)x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(p_2+p_3+p_4+v+1) \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(p_3+p_5+v+1+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(p_4+p_5)u_5.$$

Снова в силу равенства (12) имеем следующую систему уравнений:

$$p_1+p_2=0, \quad p_1+p_3+v+1+\eta=0, \quad p_2+p_3+p_4+v+1=0,$$
$$p_3+p_5+v+1+\eta=0, \quad p_4+p_5=0.$$

Решая эту систему, получаем $p_1=p_2=p_4=p_5=\eta$, $p_3=v+1$. Следовательно,

$$i = x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v+1)x_{r_4+r_5}(v+1) \times x_{r_1+r_3+r_4}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5}(v+1)x_{r_2+r_4+r_5}(\eta)x_{r_4+r_5+r_6}(\eta)u_4.$$

Ввиду выбора элемент i является инволюцией. Вычисления показывают, что

$$i^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(v^2+v+\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(v^2+v+\eta) \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)u_5$$

для подходящего $u_5 \in U_5$. Отсюда $v^2+v+\eta=0$. Но в силу выбора $\eta \in K$ многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в кольце $K[X]$; противоречие.

2. Пусть $t=1$. Тогда для некоторых $p_i \in K$ и подходящего $u_4 \in U_4$

$$i = x_{r_4}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v)x_{r_4+r_5}(v) \times x_{r_1+r_3+r_4}(p_1)x_{r_2+r_3+r_4}(p_2)x_{r_3+r_4+r_5}(p_3)x_{r_2+r_4+r_5}(p_4)x_{r_4+r_5+r_6}(p_5)u_4.$$

Отсюда для подходящего $u_5 \in U_5$ получаем, что

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_2+r_3+r_4}(p_1+p_2)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(p_1+p_3+v) \times x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(p_2+p_3+p_4+v+\eta)x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(p_3+p_5+v)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(p_4+p_5)u_5.$$

В силу равенства (12) имеем следующую систему уравнений:

$$p_1+p_2=0, \quad p_1+p_3+v=0, \quad p_2+p_3+p_4+v+\eta=0, \quad p_3+p_5+v=0, \quad p_4+p_5=0.$$

Решая эту систему, получаем равенства $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = \eta$, $p_3 = v + \eta$. Следовательно,

$$i = x_{r_4}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v)x_{r_4+r_5}(v) \times x_{r_1+r_3+r_4}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5}(v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5}(\eta)x_{r_4+r_5+r_6}(\eta)u_4.$$

Ввиду выбора элемент i является инволюцией. Вычисления показывают, что

$$i^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(v^2+v+\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(v^2+v+\eta) \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)u_5$$

для подходящего $u_5 \in U_5$. Отсюда $v^2 + v + \eta = 0$. Но в силу выбора $\eta \in K$ многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K[X]$; противоречие.

Тип ${}^2E_6$. В группе G типа ${}^2E_6$ два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В качестве представителя первого класса можно взять элемент

$$x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1). \tag{13}$$

Действительно, все четыре сомножителя $x_{r_2}(1)$, $x_{r_4}(1)$, $x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)$, $x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)$ в представлении элемента (13) лежат в группе G и являются инволюциями. Граф коммутативности элемента (13) является цепью. Поэтому в силу леммы 5 он строго веществен в группе G. Так же, как и для типа E_6, в качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$g = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \tag{14}$$

с той лишь разницей, что многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим уже в $K_0[X]$, где K_0 — поле неподвижных элементов относительно полевого автоморфизма. То, что элементы (13) и (14) не сопряжены в группе $G = {}^2E_6(K)$, следует из леммы 12 так же, как и для типа ${}^2D_l$, но они могут быть сопряжены в группе $E_6(K)$, например, при $K = GF(4)$ это легко проверяется. Поэтому нестрогую вещественность элемента (14) в группе G нельзя получить из аналогичного результата для типа E_6. Покажем, что элемент g не является строго вещественным в группе G.

Предположим, что элемент g инвертируется некоторой инволюцией $i \in U$, т. е.

$$g^i = g^{-1}. \tag{15}$$

Для подходящих $t_2, t_4 \in K_0$, $t_1, t_3 \in K$ и подходящего $u_2 \in U_2$

$$i = x_{r_2}(t_2)x_{r_4}(t_4)x_{r_3}(t_3)x_{r_5}(\bar{t}_3)x_{r_1}(t_1)x_{r_6}(\bar{t}_1)u_2.$$

Представим элементы g и g^{-1} в виде произведения корневых элементов, согласованного с высотой корней:

$$g = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \times x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta),$$

$$g^{-1} = x_{r_6}(1)x_{r_1}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1) = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \times x_{r_1+r_3}(1)x_{r_5+r_6}(1)x_{r_2+r_4}(1)x_{r_3+r_4}(1)x_{r_4+r_5}(1) \times x_{r_3+r_4+r_5}(\eta+1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_2+r_3+2r_4+r_5}(1).$$

Используя указанные выше представления элементов i, g и g^{-1}, получаем, что

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_3}(t_1+t_3+1)x_{r_5+r_6}(\bar{t}_1+\bar{t}_3+1) \times x_{r_2+r_4}(t_2+t_4+1)x_{r_3+r_4}(t_3+t_4+1)x_{r_4+r_5}(\bar{t}_3+t_4+1)u_3$$

для некоторого $u_3 \in U_3$. В силу равенства (15) имеем следующую систему уравнений:

$$t_1+t_3=1, \quad \bar{t}_1+\bar{t}_3=1, \quad t_2+t_4=1, \quad t_3+t_4=1, \quad \bar{t}_3+t_4=1.$$

Решая эту систему, получим равенства $t_1=\bar{t}_1=t_4=t$, $t_3=\bar{t}_3=t_2=t+1$ для некоторого $t \in K_0$. Поэтому

$$i = x_{r_2}(t+1)x_{r_4}(t)x_{r_3}(t+1)x_{r_5}(t+1)x_{r_1}(t)x_{r_6}(t) \times x_{r_1+r_3}(v_1)x_{r_5+r_6}(\bar{v}_1)x_{r_2+r_4}(v_3)x_{r_3+r_4}(v_4)x_{r_4+r_5}(\bar{v}_4)u_3$$

для некоторых $v_1, v_4 \in K$, $v_2, v_3 \in K_0$ и подходящего $u_3 \in U_3$. Отсюда

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_3+r_4}(v_1+v_4+1+t)x_{r_2+r_3+r_4}(v_3+v_4+t)x_{r_3+r_4+r_5}(v_4+\bar{v}_4+t^2+t) \times x_{r_2+r_4+r_5}(v_3+\bar{v}_4+t)x_{r_4+r_5+r_6}(\bar{v}_1+\bar{v}_4+1+t)u_4$$

для подходящего $u_4 \in U_4$. В силу равенства (15) имеем следующую систему уравнений:

$$v_1+v_4+1+t=0, \quad v_3+v_4+t=0, \quad v_4+\bar{v}_4+t^2+t=0,$$
$$v_3+\bar{v}_4+t=0, \quad \bar{v}_1+\bar{v}_4+1+t=0.$$

Решая эту систему, получаем $v_1=\bar{v}_1=v$, $v_4=\bar{v}_4=v+1+t$, $v_3=v+1$ для некоторого $v \in K_0$ и, следовательно, $t^2+t=t(t+1)=0$. Далее рассмотрим два случая: 1) $t=0$; 2) $t=1$.

1. Пусть $t=0$. Тогда для некоторых $p_1, p_2 \in K$, $p_3 \in K_0$ и подходящего $u_4 \in U_4$

$$i = x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v+1)x_{r_4+r_5}(v+1) \times x_{r_1+r_3+r_4}(p_1)x_{r_2+r_3+r_4}(p_2)x_{r_3+r_4+r_5}(p_3)x_{r_2+r_4+r_5}(\bar{p}_2)x_{r_4+r_5+r_6}(\bar{p}_1)u_4.$$

Отсюда для подходящего $u_5 \in U_5$ получаем, что

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_2+r_3+r_4}(p_1+p_2) \times x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(p_1+p_3+v+1+\eta)x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(p_2+p_3+\bar{p}_2+v+1) \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(p_3+\bar{p}_1+v+1+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)u_5.$$

Снова в силу равенства (15) имеем следующую систему уравнений:

$$p_1+p_2=0, \quad p_1+p_3+v+1+\eta=0, \quad p_2+p_3+\bar{p}_2+v+1=0,$$
$$\bar{p}_1+p_3+v+1+\eta=0, \quad \bar{p}_1+\bar{p}_2=0.$$

Решая эту систему, получаем $p_1=\bar{p}_1=p_2=\bar{p}_2=\eta$, $p_3=v+1$. Следовательно,

$$i = x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v+1)x_{r_4+r_5}(v+1) \times x_{r_1+r_3+r_4}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5}(v+1)x_{r_2+r_4+r_5}(\eta)x_{r_4+r_5+r_6}(\eta)u_4.$$

Ввиду выбора элемент i является инволюцией. Вычисления показывают, что

$$i^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(v^2+v+\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(v^2+v+\eta)$$
$$\times\, x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)u_5$$

для подходящего $u_5 \in U_5$. Отсюда $v^2+v+\eta=0$ и, как было доказано выше, $v \in K_0$. Но с учетом выбора $\eta \in K_0$ многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в кольце $K_0[X]$; противоречие.

2. Пусть $t=1$. Тогда для некоторых $p_1, p_2 \in K$, $p_3 \in K_0$ и подходящего $u_4 \in U_4$

$$i = x_{r_4}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v)x_{r_4+r_5}(v)$$
$$\times\, x_{r_1+r_3+r_4}(p_1)x_{r_2+r_3+r_4}(p_2)x_{r_3+r_4+r_5}(p_3)x_{r_2+r_4+r_5}(\bar p_2)x_{r_4+r_5+r_6}(\bar p_1)u_4.$$

Отсюда для подходящего $u_5 \in U_5$ получаем, что

$$(g^{-1})^i = g x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(p_1+p_2)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(p_1+p_3+v)$$
$$\times x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(p_2+p_3+\bar p_2+v+\eta)x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(\bar p_1+p_3+v)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(\bar p_1+\bar p_2)u_5.$$

В силу равенства (15) имеем следующую систему уравнений:

$$p_1+p_2=0, \quad p_1+p_3+v=0, \quad p_2+p_3+\bar p_2+v+\eta=0, \quad \bar p_1+p_3+v=0, \quad \bar p_1+\bar p_2=0.$$

Решая эту систему, получаем равенства $p_1=p_2=\eta$, $p_3=v+\eta$. Следовательно,

$$i = x_{r_4}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v)x_{r_4+r_5}(v)$$
$$\times\, x_{r_1+r_3+r_4}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5}(v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5}(\eta)x_{r_4+r_5+r_6}(\eta)u_4.$$

В силу выбора элемент i является инволюцией. Вычисления показывают, что

$$i^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(v^2+v+\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(v^2+v+\eta)$$
$$\times\, x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)u_5$$

для подходящего $u_5 \in U_5$. Отсюда $v^2+v+\eta=0$ и, как доказано выше, $v \in K_0$. Но в силу выбора $\eta \in K_0$ многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в кольце $K_0[X]$; противоречие.

Тип E_7. В группе G типа E_7 четыре класса сопряженных регулярных унипотентных элементов, их представители явно выписаны в [12] и они следующие:

$$g_1 = x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1),$$
$$g_2 = x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1),$$
$$g_3 = x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1),$$
$$g_4 = x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1),$$

где многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K[X]$. Граф коммутативности элемента g_1 является лесом, поэтому он является строго вещественным. Элемент g_3 инвертируется инволюцией

$$i = x_{r_3}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_7}(1)x_{r_5+r_6}(1)x_{r_6+r_7}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta)$$
$$\times\, x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta)$$
$$\times\, x_{r_1+r_2+r_3+2r_4+2r_5+2r_6+r_7}(\eta^2)x_{r_1+r_2+2r_3+2r_4+2r_5+2r_6+r_7}(\eta^2).$$

Следовательно, элемент g_3 также является строго вещественным. Элементы g_2 и g_4 не являются даже вещественными. Это следует из [10, следствие 5.11], где утверждается, что группа $E_7(2^n)$ содержит два класса сопряженных невещественных регулярных унипотентных элементов.

Тип E_8. В группе G типа E_8 четыре класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В силу леммы 10 в качестве их представителей можно взять элементы $g_i x_{r_8}(1)$, $i = 1, 2, 3, 4$, где все g_i — аналогичные представители для типа E_7 из предыдущего пункта. Далее действуем так же, как и для типа E_7, только при

$$\begin{gathered} i = x_{r_3}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_7}(1)x_{r_5+r_6}(1)x_{r_6+r_7}(1)x_{r_5+r_6+r_7+r_8}(1)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}(\eta) \\ \times x_{r_2+r_3+2r_4+r_5}(\eta)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6}(\eta) \\ \times x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta)x_{r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(\eta) \\ \times x_{r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(\eta)x_{r_1+2r_2+2r_3+3r_4+2r_5+r_6+r_7}(\eta^2) \\ \times x_{r_1+2r_2+2r_3+3r_4+2r_5+2r_6+r_7+r_8}(\eta^2)x_{r_1+2r_2+2r_3+3r_4+2r_5+2r_6+2r_7+r_8}(\eta^2). \end{gathered}$$

Тип F_4. В группе G типа F_4 четыре класса сопряженных регулярных унипотентных элементов, их представители явно выписаны в [13] и они следующие:

$$g_1 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1),$$

$$\begin{gathered} g_2 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta), \\ g_3 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3+2r_4}(\eta), \\ g_4 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta)x_{r_2+2r_3+2r_4}(\eta), \end{gathered}$$

где многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K[X]$. Графы коммутативности элементов g_1 и g_3 являются лесами (и даже цепями), так что эти элементы строго вещественны. Элементы g_2 и g_4 не являются даже вещественными. Это следует из [10, следствие 5.11], где утверждается, что группа $F_4(2^n)$ содержит два класса сопряженных невещественных регулярных унипотентных элементов. Теорема доказана.

По теореме 2 группы типа ${}^2A_{2l}$, $l \geq 1$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$, F_4, ${}^2E_6$, E_6, E_7, E_8 над конечным полем характеристики 2 содержат хотя бы один не строго вещественный класс сопряженных регулярных унипотентных элементов. Таким образом, из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Группы Шевалле типа* ${}^2A_{2l}$, $l \geq 1$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$, F_4, ${}^2E_6$, E_6, E_7, E_8 *над конечным полем характеристики* 2 *не являются строго вещественными.*

§ 4. Доказательство теоремы 1

Типы ${}^2A_{2l}$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$. Унипотентная подгруппа типа ${}^2A_2$ и ${}^2B_2$ имеет ступень нильпотентности 2, и все ее инволюции лежат в центре, поэтому она не может быть строго вещественной. В подгруппе U типа ${}^2A_{2l}$ и ${}^2F_4$ существует корневая подгруппа X_S, изоморфная унипотентной подгруппе типа ${}^2A_2$ и ${}^2B_2$ соответственно. Здесь S — класс эквивалентности типа A_2 или B_2, состоящий из фундаментальных корней изначальной системы корней типа A_{2l} или F_4 соответственно. Пусть $J = S$, тогда U — полупрямое произведение нормальной подгруппы U_J и подгруппы $L_J = X_S$. Поэтому в силу леммы 1 U не может быть строго вещественной группой. Таким образом, справедлива

Лемма 13. *Унипотентная подгруппа U типа ${}^2A_{2l}$, $l \geq 1$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$ над полем характеристики 2 не является строго вещественной.*

Типы A_{l-1}, C_l, D_l, ${}^2A_{2l-1}$, ${}^2D_{l+1}$ при $l \geq 13$. Через $U_n(K)$ обозначим группу унитреугольных $n \times n$-матриц над полем K и положим $U_n(q) = U_n(K)$ при $K = GF(q)$. В 1998 г. в [14] был приведен пример матрицы

$$A = E + E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4} + E_{3,6} + E_{4,9} + E_{5,6} + E_{6,7} + E_{7,8} + E_{8,9} + E_{8,10} + E_{9,11} + E_{10,11} + E_{10,12} + E_{11,12} + E_{12,13}$$

из группы $U_{13}(2)$, которая не сопряжена со своей обратной. (Опечатки из [14] устраняются в [15].) Вычисления проводились на компьютере, а именно было показано, что система линейных однородных уравнений $AXA - X = 0$ с 78 неизвестными x_{ij}, $i, j = 1, \ldots, 13$, $i < j$, не имеет решений в поле $GF(2)$. В [14] также отмечается, что Вера-Лопэз и Ареги, опираясь на свои результаты из [16, 17], установили вещественность характеров группы $U_n(2)$ при $n \leq 12$. Вычисления также проводились на компьютере. В [18] установлено даже, что в группе $U_{13}(2)$ существует единственная пара обратных сопряженных классов (с представителями A и A^{-1}, где A такая, как и выше). Таким образом, $n = 13$ является минимальной размерностью, для которой существует унитреугольная матрица, не сопряженная в группе $U_n(2)$ со своей обратной.

Лемма 14. *При $l \geq 13$ унипотентная подгруппа U типа A_{l-1}, C_l, D_l, ${}^2A_{2l-1}$, ${}^2D_{l+1}$ над полем K характеристики 2 не является строго вещественной.*

Доказательство. Пусть U_J и L_J такие же, как в лемме 6. При указанных ограничениях на лиев ранг l существует J такое, что подгруппа L_J изоморфна группе $U_{13}(K)$ и группа U — полупрямое произведение нормальной подгруппы U_J и подгруппы L_J. Очевидно, что система линейных однородных уравнений с коэффициентами из некоторого поля F имеет ненулевое решение в поле F тогда и только тогда, когда она имеет ненулевое решение в любом его расширении. Поэтому указанный выше пример из [14] приводит к тому, что группа $U_{13}(K)$ не может быть строго вещественной для любого поля K характеристики 2. Отсюда в силу леммы 1 группа U не является строго вещественной. Лемма доказана.

Тип E_6. Если K — конечное поле, то утверждение теоремы 1 следует из теоремы 2, согласно которой в этом случае унипотентная подгруппа U содержит регулярный не строго вещественный элемент. В доказательстве теоремы 2 выбирался конкретный регулярный унипотентный элемент (11) и устанавливалось, что он не является строго вещественным, при этом в действительности на основное поле K накладывалось только следующее ограничение: многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K[X]$ для некоторого $\eta \in K$. В конечном поле всегда найдется такой элемент η. Поэтому, используя доказательство нестрогой вещественности элемента (11), получаем следующее утверждение: если в поле K существует элемент η такой, что многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K[X]$, то подгруппа U не является строго вещественной. Это и есть утверждение теоремы 1 для типа E_6.

Типы E_7, E_8. По лемме 10 утверждение теоремы 1 для этих типов следует из утверждения теоремы 1 для типа E_6.

Тип ${}^2E_6$. Так же, как и для типа E_6, получаем следующее утверждение: если в поле K_0 существует элемент η такой, что многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K_0[X]$, то подгруппа U не является строго вещественной.

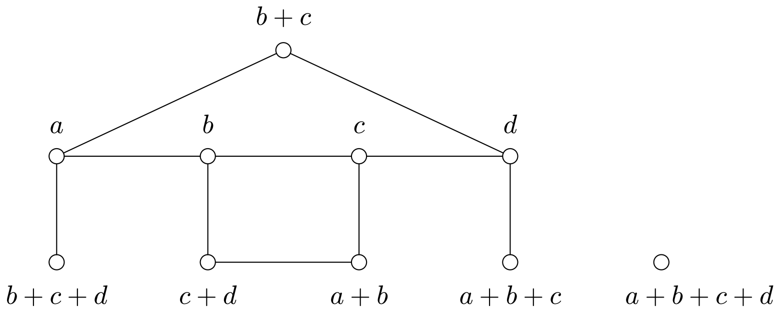

Рис. 4.

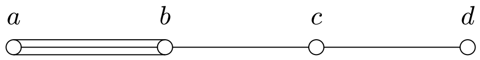

Рис. 5.

Тип F_4. Элемент g_2, указанный в доказательстве теоремы 2, не является строго вещественным, если в поле K существует элемент η такой, что многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K[X]$. Это можно проверить так же непосредственно, как и при доказательстве теоремы 2 для типа E_6. Поэтому подгруппа U не является строго вещественной.

Группы малых рангов. Здесь теорема 1 доказывается для групп лиева типа ранга $l \leq 4$. В силу леммы 10 достаточно исследовать только предельные случаи. Так как типы ${}^2A_{2l}$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$, F_4 уже изучены выше, остается рассмотреть только следующие типы: A_4, B_4, C_4, D_4, ${}^2A_7$, ${}^2D_5$, G_2, ${}^3D_4$. Далее каждый из этих восьми типов рассматривается отдельно, хотя схема доказательства общая, а именно следующая. Пусть

$$v = \prod_{r\in\Phi^+} x_r(k_r), \quad k_r \neq 0.$$

Для элемента v строим его граф коммутативности $\Gamma(v)$. Очевидно, граф коммутативности $\Gamma(u)$ любого другого элемента

$$u = \prod_{r\in\Phi^+} x_r(k_r)$$

из U будет его подграфом. Достаточно найти такой элемент $g \in B$, чтобы граф $\Gamma(u^g)$ являлся лесом, потому что тогда по леммам 3 и 5 группа U должна быть строго вещественной.

Тип A_4. Пусть $\{a, b, c, d\}$ — база системы корней типа A_4, причем $a+b$, $b+c$, $c+d$ — корни. В этом случае граф $\Gamma(v)$ имеет вид, представленный на рис. 4.

Если $t_b = 0$, то граф $\Gamma(u)$ является лесом. Если $t_b \neq 0$, то для подходящих t и s коэффициенты при x_{a+b} и x_{b+c} у элемента $u^{x_a(t)x_c(s)}$ равны нулю и его граф коммутативности является лесом.

Тип ${}^2D_5$. С группой G типа ${}^2D_5$ естественно связана система корней типа B_4 с базой $\{a, b, c, d\}$. Мы фиксируем следующее расположение фундаментальных корней на схеме Дынкина, рис. 5. В этом случае граф коммутативности $\Gamma(v)$ имеет вид, показанный на рис. 6.

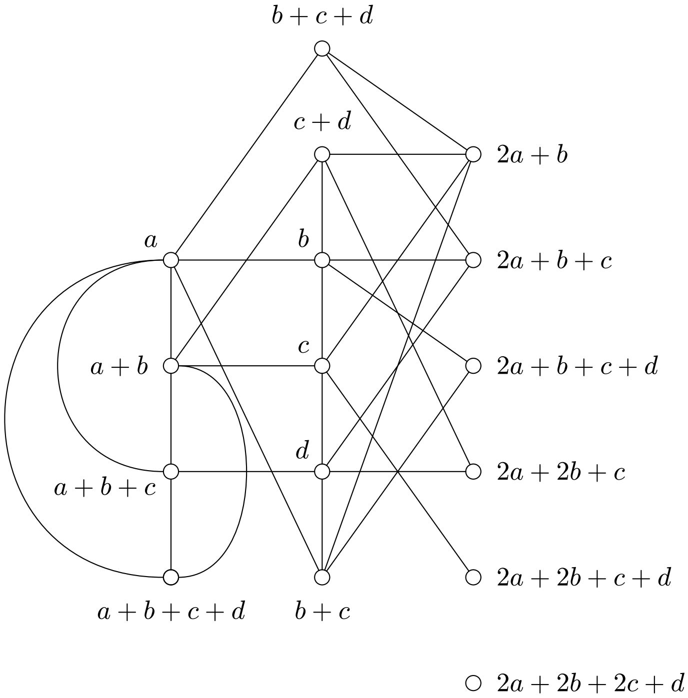

Рис. 6.

Далее фраза «сопрягая элементом x_r, получим $t_s = 0$» означает, что сопрягая корневым элементом $x_r(t_r)$ для подходящего t_r исходный элемент u, получим нулевой коэффициент t_s у $x_s(t_s)$ в разложении u. После сопряжения новый элемент также обозначаем через u. По теореме 2 регулярные унипотентные элементы группы G строго вещественные. Поэтому далее считаем, что хотя бы один из коэффициентов t_a, t_b, t_c, t_d равен нулю.

1. Пусть $t_a \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами x_b, x_{b+c}, x_{b+c+d}, получим соответственно

$$t_{a+b} = t_{a+b+c} = t_{a+b+c+d} = 0.$$

1а. Пусть $t_b \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами x_c, x_{c+d}, x_{2a+b+c}, получим соответственно $t_{b+c} = t_{b+c+d} = t_{2a+2b+c} = 0$. Если $t_c = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_c \neq 0$, то $t_d = 0$. Сопрягая элементом x_d, получим $t_{c+d} = 0$, и, следовательно, $\Gamma(u)$ — лес.

1б. Пусть $t_b = 0$. Тогда $\Gamma(u)$ — лес.

2. Пусть $t_a = 0$, $t_{a+b} \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами x_{b+c}, x_{b+c+d}, получим соответственно $t_{a+b+c} = t_{a+b+c+d} = 0$.

2а. Пусть $t_c \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами x_d, x_b, получим соответственно $t_{c+d} = t_{b+c} = 0$, и, следовательно, $\Gamma(u)$ — лес.

2б. Пусть $t_c = 0$. Если $t_{c+d} = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Пусть $t_{c+d} \neq 0$. Сопрягая элементом x_b, получим $t_{b+c+d} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

3. Пусть $t_a = 0$, $t_{a+b} = 0$. Заметим, что здесь одновременно рассматривается и случай D_4, потому что длинные корни в системе корней типа B_4

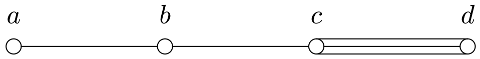

Рис. 7.

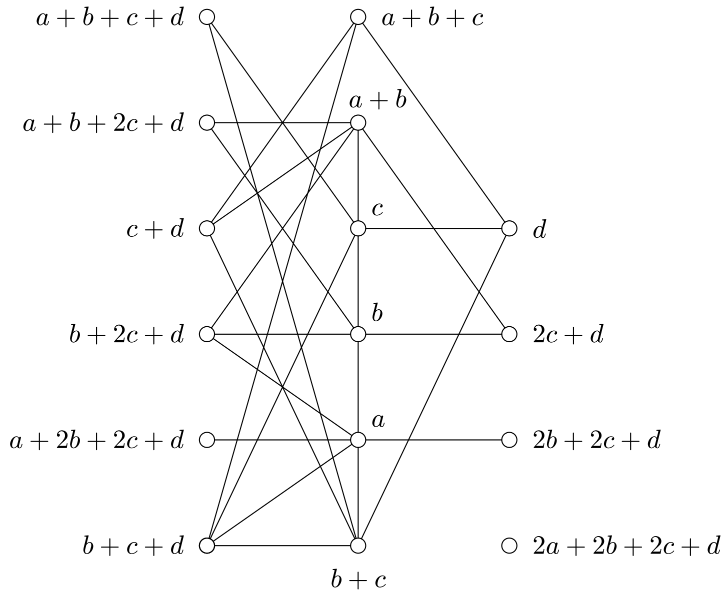

Рис. 8.

составляют систему корней типа D_4, а «висячая цепь» с короткими корнями $a+b+c$, $a+b+c+d$ в этом случае никак не влияет на то, будет ли граф $\Gamma(u)$ лесом или нет.

3а. Пусть $t_{2a+b} \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами x_c, x_{c+d}, x_{b+c}, получим соответственно $t_{2a+b+c} = t_{2a+b+c+d} = t_{2a+2b+c} = 0$. Если $t_c = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_c \neq 0$, то, сопрягая элементом x_d, получим $t_{c+d} = 0$, и, следовательно, $\Gamma(u)$ — лес.

3б. Пусть $t_{2a+b} = 0$. Если $t_c = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Пусть $t_c \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами x_b, x_d, x_{2a+b}, получим соответственно $t_{b+c} = t_{c+d} = t_{2a+b+c} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

Типы B_4, C_4 и D_4. Прежде всего отметим, что унипотентные подгруппы типа B_l и C_l над полем характеристики 2 изоморфны. Граф коммутативности элемента u для типа B_4 получается из графа на рис. 6 стиранием ребер, соединяющих короткие корни a, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$. Поэтому доказательство, приведенное для типа ${}^2D_5$, проходит и для типа B_4. В п. 3 этого же доказательства отмечается, что одновременно охватывается и случай D_4. Таким образом, унипотентные подгруппы типа B_4, C_4 и D_4 также являются строго вещественными.

Тип ${}^2A_7$. С группой G типа ${}^2A_7$ естественно связана система корней типа C_4 с базой $\{a,b,c,d\}$. Мы фиксируем следующее расположение фундаментальных корней на схеме Дынкина, рис. 7.

В этом случае граф коммутативности $\Gamma(v)$ имеет вид, изображенный на рис. 8.

Далее приняты такие же сокращения, как и в доказательстве для типа ${}^2D_5$.

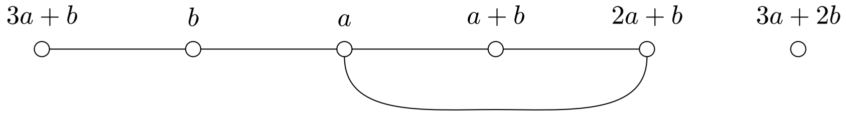

Рис. 9.

По теореме 2 регулярные унипотентные элементы группы G строго вещественные. Поэтому далее считаем, что хотя бы один из коэффициентов t_a, t_b, t_c, t_d равен нулю.

1. Пусть $t_a \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами x_b, x_{b+c}, x_{b+c+d}, x_{b+2c+d}, получим соответственно $t_{a+b} = t_{a+b+c} = t_{a+b+c+d} = t_{a+b+2c+d} = 0$.

1а. Пусть $t_b = 0$. Если $t_{b+c} = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Пусть $t_{b+c} \neq 0$. Сопрягая элементом x_d, получим $t_{b+c+d} = 0$. Если $t_d = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_d \neq 0$, то, сопрягая элементом x_c, получим $t_{c+d} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ снова становится лесом.

1б. Пусть $t_b \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами x_c, x_{c+d}, x_{2c+d}, получим соответственно $t_{b+c} = t_{b+c+d} = t_{b+2c+d} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

2. Пусть $t_a = 0$, $t_b = 0$. Если $t_c = t_d = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_c \neq 0$, то, сопрягая последовательно элементами x_d, x_{a+b}, получим соответственно $t_{c+d} = t_{a+b+c} = 0$. В этом случае граф $\Gamma(u)$ также является лесом. Если $t_c = 0$, $t_d \neq 0$, то, сопрягая последовательно элементами x_c, x_{b+c}, получим соответственно $t_{c+d} = t_{b+c+d} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

3. Пусть $t_a = 0$, $t_b \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами x_c, x_a, получим соответственно $t_{b+c} = t_{a+b} = 0$. Если $t_c = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_c \neq 0$, то, сопрягая элементом x_{a+b}, получим $x_{a+b+c} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

Тип G_2. Пусть $\{a, b\}$ — база системы корней типа G_2, причем корень a короткий. В этом случае граф $\Gamma(v)$ имеет вид, как на рис. 9.

Если $t_a = 0$, то граф $\Gamma(u)$ является лесом. Если $t_a \neq 0$, то для подходящего t коэффициент при x_{a+b} у элемента $u^{x_b(t)}$ равен нулю и его граф коммутативности является лесом.

Тип ${}^3D_4$. В этом случае корневые элементы также индексируются корнями из системы типа G_2 и граф $\Gamma(v)$ имеет такой же вид, как и на рис. 9.

Если $t_b \neq 0$, то при подходящем t коэффициент при x_{a+b} у элемента $u^{x_a(t)}$ равен нулю и граф $\Gamma(u^{x_a(t)})$ является лесом.

Пусть $t_b = 0$ и все t_a, t_{a+b}, t_{2a+b} ненулевые. С точностью до сопряжения диагональным элементом можно считать, что $t_a = 1$. Эту возможность обеспечивает лемма 3. Очевидно, остается доказать строгую вещественность элемента

$$u = x_a(1)x_{a+b}(t)x_{2a+b}(s)$$

при ненулевых t и s. Коммутаторная формула Шевалле в этом случае дает следующие равенства:

$$u^{x_a(y)} = x_a(1)x_{a+b}(t+y)x_{2a+b}(s+y)u_4,$$

$$u^{x_{a+b}(z)} = x_a(1)x_{a+b}(t)x_{2a+b}(s+z+\bar{\bar{z}})u_4$$

для любых $y \in K_0$, $z \in K$ и подходящего $u_4 \in U_4$. Отсюда

$$u^{x_b(y)x_{a+b}(z)} = x_a(1)x_{a+b}(t+y)x_{2a+b}(s+z+\bar{\bar{z}}+y)u_4.$$

Таблица 1.

тип группы	представители классов сопряженных регулярных унипотентных элементов	
A_l, $l \geq 1$	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$	$+$
$^2A_{2l-1}$, $l \geq 2$	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$	$+$
$^2A_{2l}$, $l \geq 1$	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_{l-1}}(1)x_{r_l}(1,t)$	$-$
B_l, $l \geq 2$	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-1}+2r_l}(\eta)$	$+$ $+$
C_l, $l \geq 2$	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_1+2r_2}(\eta)$	$+$ $+$
D_l, $l \geq 4$	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-2}+r_{l-1}+r_l}(\eta)$	$+$ $+$
^2D_l, $l \geq 4$	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-1}+2r_l}(\eta)$	$+$ $+$
F_4	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)$ $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta)$ $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3+2r_4}(\eta)$ $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta)x_{r_2+2r_3+2r_4}(\eta)$	$+$ $-$ $+$ $-$
E_6	$x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)$ $x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)$	$+$ $-$
E_7	$x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)$ $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)$ $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)$ $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)$ $\times x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)$	$+$ $-$ $+$ $-$ $-$
E_8	$x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)x_{r_8}(1)$ $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)x_{r_8}(1)$ $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)$ $\times x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)x_{r_8}(1)$ $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)$ $\times x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)x_{r_8}(1)$	$+$ $-$ $+$ $+$ $-$ $-$
$^2E_6$	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)$ $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta)x_{r_4}(1)$	$+$ $-$
G_2, $^3D_4$	$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)$ $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{3r_1+r_2}(\eta)$	$+$ $+$
$^2B_2$	g_1, g_2	$-$
$^2F_4$	g_1, g_2, g_3, g_4	$-$

Очевидно, элемент u будет строго вещественным, если выражение $s + z + \bar{\bar{z}} + y$ обратится в нуль. Для этого достаточно доказать следующее равенство:

$$\{z + \bar{z} + y \mid z \in K, \quad y \in K_0\} = K. \tag{16}$$

Пусть $z \in K$ и $z+\bar{z} \in K_0$. Тогда $z+\bar{z} = \bar{z}+\bar{\bar{z}}$. Отсюда $z = \bar{\bar{z}}$ и, следовательно, $z \in K_0$. Так как $\operatorname{char} K = 2$, то $z + \bar{z} = 0$. Таким образом, имеем

$$\{z + \bar{z} \mid z \in K\} \cap K_0 = \{0\}. \tag{17}$$

Так как поле, допускающее автоморфизм порядка 3, имеет размерность 3 над подполем неподвижных элементов, то в силу (17) для доказательства равенства (16) достаточно показать, что в множестве $\{z + \bar{z} \mid z \in K\}$ есть два линейно независимых элемента над подполем K_0. Пусть $z \notin K_0$ и существует ненулевой элемент $\alpha \in K_0$ такой, что $\alpha(z + \bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$. Тогда $\alpha(z + \bar{z}) = (z + \bar{z})^2$ и, следовательно, $(z+\bar{z}) = \alpha$, но это противоречит равенству (17). Таким образом, элементы $(z + \bar{z})$ и $z^2 + \bar{z}^2$ линейно независимы над полем K_0.

В табл. 1 для каждого типа (исключая типы $^2B_2$ и $^2F_4$) явно выписаны представители каждого класса сопряженных регулярных унипотентных элементов расширенной группы лиева типа над конечным полем K характеристики 2 и указано, является ли данный класс строго вещественным. Строгая вещественность сопряженного класса отмечена знаком «+» в третьем столбце. Для групп нормального типа $\eta \in K$ и многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K[X]$. Со скрученными группами типа $^2A_{2l}$, $^2A_{2l-1}$, $^2D_{l+1}$, $^2E_6$, $^2D_4$ мы ассоциируем системы корней типа B_l, C_l, B_l, F_4, G_2 соответственно, и в этих случаях $\eta \in K_0$ и многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K_0[X]$.

Авторы признательны Е. П. Вдовину за предоставленные копии статей и полезные обсуждения вопросов, затронутых в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gow R.* Products of two involutions in classical groups of characteristic 2 // J. Algebra. 1981. V. 71. P. 583–591.
2. *Elers E. W., Nolte W.* Bireflectional of orthogonal and symplectic groups // Arch. Math. 1982. V. 39. P. 113–118.
3. *Gow R.* Commutators in the symplectic group // Arch. Math. 1988. V. 50. P. 204–209.
4. *Baginski C.* On sets of elements of the same order in the alternating group A_n // Publ. Math. 1987. V. 34. P. 313–315.
5. *Kolesnikov S. G., Nuzhin Ya. N.* On strong reality of finite simple groups // Acta Appl. Math. 2005. V. 85, N 1–3. P. 195–203.
6. *Tiep P. H., Zalesskii A. E.* Real conjugacy classes in algebraic groups and finite groups of Lie type // J. Group Theory. 2005. V. 8. P. 291–315.
7. *Газданова М. А., Нужин Я. Н.* О строгой вещественности унипотентных подгрупп групп лиева типа над полем характеристики 2 // Междунар. алгебраическая конф.: Тез. докл. Екатеринбург, 2005. С. 46–47.
8. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. IV–VI. М.: Мир, 1972.
9. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: Wiley and Sons, 1972.
10. *Tiep P. H., Zalesskii A. E.* Unipotent elements of finite groups of Lie type and realization fields of their complex representations // J. Algebra. 2004. V. 271. P. 327–390.
11. *Семинар* по алгебраическим группам / Борель А. и др. М.: Мир, 1973.
12. *Mizuno K.* The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7, E_8 // Tokyo J. Math. 1980. V. 3, N 2. P. 391–459.
13. *Shinoda K.* The conjugacy classes of Chevalley groups of type F_4 // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1974. V. 21. P. 133–159.
14. *Isaacs I. M., Karagueuzian D.* Conjugacy in groups of upper triangular matrices // J. Algebra. 1998. V. 202. P. 704–711.

15. *Isaacs I. M., Karagueuzian D.* Erratum (Isaacs I. M., Karagueuzian D. Conjugacy in groups of upper triangular matrices // J. Algebra. 1998. V. 202. P. 704–711.) // J. Algebra. 1998. V. 208. P. 722.

16. *Arregi J. M., Vera-Lopez A.* Conjugacy classes in Sylow p-subgroups of $GL(n, q)$ // J. Algebra. 1992. V. 152. P. 1–19.

17. *Arregi J. M., Vera-Lopez A.* Some algorithms for the calculation conjugacy classes in the Sylow p-subgroups of $GL(n, q)$ // J. Algebra. 1995. V. 177. P. 899–925.

18. *Vera-Lopez A., Arregi J. M.* Computing in unitriangular matrices over finite fields // J. Linear Algebra Appl. 2004. V. 387. P. 193–219.

Статья поступила 11 октября 2005 г.

Газданова Марина Алтеговна, *Нужин Яков Нифантьевич*
Красноярский гос. технический университет,
ул. Киренского, 26, Красноярск 660074
nuzhin@fipu.kgtu.runnet.ru, nuzhin@fipu.krasnoyarsk.edu