Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 510.51+519.716.35

ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА КЛАССОВ АВТОМАТНЫХ СТРУКТУР

Н. С. Винокуров

Аннотация: Получены точные оценки в арифметической и аналитической иерархиях индексных множеств различных классов автоматных моделей. Также получены оценки проблем существования вычислимого изоморфизма и вложения для автоматных структур.

Ключевые слова: автоматная модель, индексное множество, проблема вычислимого изоморфизма, однородность, универсальность.

В работе используется терминология из [1, 2]. Напомним основные определения.

Пусть λ — пустое слово, Σ — некоторый конечный алфавит. Тогда Σ^* — множество всех слов над этим алфавитом, а $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\lambda\}$.

Определение 1. Пусть Σ — некоторый конечный алфавит. Обозначим через $\Sigma_\diamondsuit$ алфавит $\Sigma \cup \{\diamondsuit\}$, где $\diamondsuit \notin \Sigma$. *Конволюцией кортежа* $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in (\Sigma^*)^n$ назовем кортеж $(\omega_1, \dots, \omega_n)^\diamondsuit \in (\Sigma_\diamondsuit^*)^n$, полученный добавлением наименьшего числа символов $\diamondsuit$ к правым концам ω_i, $1 \leq i \leq n$, так, чтобы все получившиеся слова имели одинаковую длину. *Конволюцией отношения* $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ назовем отношение $R^\diamondsuit \subset (\Sigma_\diamondsuit^*)^n$, сформированное как множество конволюций всех кортежей в R.

Определение 2. Будем говорить, что отношение $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ *распознаваемо конечным автоматом*, если его конволюция $R^\diamondsuit$ распознаваема конечным автоматом над алфавитом $(\Sigma_\diamondsuit)^n$.

Определение 3. Будем говорить, что *структура*

$$\mathscr{A} = \left(A, R_1^A, \dots, R_k^A, c_0^A, \dots, c_t^A\right)$$

автоматна над Σ, если ее носитель A содержится в Σ^* и все отношения $R_i^A \subseteq (\Sigma^*)^{n_i}$ распознаваемы конечными автоматами. Будем говорить, что *структура автоматна*, если она автоматна над некоторым алфавитом. Если существует изоморфизм между некоторой структурой $\mathscr{B}$ и автоматной структурой $\mathscr{A}$, то $\mathscr{B}$ называется *автоматно представимой* (над Σ), структура $\mathscr{A}$ — *автоматной копией структуры* $\mathscr{B}$, а изоморфизм — *автоматным представлением структуры* $\mathscr{B}$.

Пусть на Σ задан линейный порядок $<$. Тогда естественным образом на Σ^* порядком $<$ порождается лексикографический порядок $\prec_{\text{lex}}$. Считаем, что

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00819) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2112.2003.1).

$x \prec_{\mathrm{lex}} y$, если x является приставкой y или $x = a\sigma w$, $y = a\delta z$ для некоторых $a, w, z \in \Sigma^*$ и $\sigma, \delta \in \Sigma$ таких, что $\sigma < \delta$. Порядок $\prec_{\mathrm{lex}}$ автоматен.

Определим автоматный порядок $\prec_{\mathrm{llex}}$ на словах алфавита Σ, устроенный по типу ω:

$$x \prec_{\mathrm{llex}} y \risingdotseq (|x| < |y|) \vee (|x| = |y| \& x \prec_{\mathrm{lex}} y).$$

Определим функцию. Пусть $w = (w_1, \dots, w_p) \in (\Sigma^*)^p$ — p-мерное слово, тогда $\mathrm{Pr}_i(w) \risingdotseq w_i \in \Sigma^*$, $1 \le i \le p$. Хорошо известно, что функция Pr_i, выдающая по слову его i-ю проекцию, автоматна.

Нам будет полезно следующее хорошо известное утверждение, доказательство которого можно найти, например, в [1].

Лемма 1 (о накачке). *Пусть L_A — язык автомата A и число его состояний равно k. Пусть $\omega \in L_A$ имеет длину, большую чем k. Тогда существуют слова x, y, z такие, что $\omega = xyz$, $1 < |y| \leqslant k$, и для всех $i \in \omega$ выполнено $xy^iz \in L_A$.*

Лемма 2. *Пусть $f : A \to B$ — автоматная разнозначная функция из регулярного языка A в регулярный язык B. Тогда существует константа c такая, что $\forall x \in A\ ||x| - |f(x)|| \le c$.*

Доказательство следует из леммы о накачке.

Обозначим язык первого порядка, обогащенный квантором $\exists^\infty$ (существует бесконечно много), через $\mathrm{FO}(\exists^\infty)$. Блумензац и Гредель доказали следующую теорему.

Теорема 1 [3]. *Для любой автоматной структуры $\mathscr{A}$ множество всех $\mathrm{FO}(\exists^\infty)$-предложений, истинных в структуре $\mathscr{A}$, разрешимо.*

Из доказательства этой теоремы следует, что соответствующий разрешающий алгоритм строится равномерно по автоматному представлению модели. Из доказательства теоремы также легко получается следующее важное

Замечание 1. Любые формульные отношения языка $\mathrm{FO}(\exists^\infty)$ на автоматной структуре являются автоматными.

Наравне с одноленточными машинами Тьюринга (МТ) в работе будут рассматриваться и n-ленточные МТ, т. е. МТ, имеющие n бесконечных в одну сторону лент и n головок по одной на каждой ленте. Все головки на фиксированном шаге находятся в одинаковых состояниях, все ленты имеют один и тот же алфавит. Команда программы выглядит следующим образом:

$$(a_1, \dots, a_n)q_i \to (b_1, \dots, b_n)q_k(d_1, \dots, d_n),$$

где $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ принадлежат алфавиту ленты, а $d_1, \dots, d_n$ — множеству $\{\mathrm{Right}, \mathrm{Left}\}$. Команда

$$(a_1, \dots, a_n)q_i \to (b_1, \dots, b_n)q_k(d_1, \dots, d_n)$$

применима, если все головки находятся в состоянии q_i и на j-й ленте каждая головка обозревает ячейку со значением a_j, где $1 \le j \le n$. Пусть команда $(a_1, \dots, a_n)q_i \to (b_1, \dots, b_n)q_k(d_1, \dots, d_n)$ применима, тогда результатом ее выполнения будут следующие действия: на j-й ленте значение текущей ячейки заменяется на b_j, затем в зависимости от значения d_j головка сдвигается влево или вправо соответственно, где $1 \le j \le n$. Все головки меняют свое состояние на q_k.

Начальной конфигурацией, соответствующей входу $(w_1, \dots, w_n)$ (n-ка слов алфавита ленты), будем называть такую конфигурацию, в которой головки находятся в выделенном состоянии, называемом начальным, и обозревают первую ячейку. Справа от головок на i-й ленте начиная с первой ячейки написано слово w_i, $1 \le i \le n$, и далее лента пустая. *Конечной конфигурацией* назовем конфигурацию, в которой головки находятся в выделенном состоянии, называемом конечным, и обозревают первую ячейку.

Определение 4. Пусть T — МТ. Назовем *графом конфигураций* T граф $\mathscr{C}(T) = (V, E)$, где V — множество всех конфигураций T, а $E = \{(w, v) \mid w, v \in V$ за один шаг T попадает из w в $v\}$.

В [4] показано, что граф конфигураций МТ автоматен. Из доказательства этого утверждения понятно, что множество конфигураций, являющихся начальными, регулярно.

Определение 5. Назовем МТ T *обратимой*, если каждая вершина в $\mathscr{C}(T)$ имеет не более одного входящего и не более одного выходящего ребер.

В [5] показана

Теорема 2. *Для любой детерминированной одноленточной* МТ T *существует обратимая двухленточная* МТ R *такая, что* T *на любом входе* w *приходит в конечную конфигурацию тогда и только тогда, когда на входе* (w, λ) *машина* R *приходит в конечную конфигурацию, причем слова и положение головки на ленте машины* T *и первой ленте машины* R *в этой конфигурации совпадают.*

Приведем конструкцию доказательства этой теоремы, она понадобится нам в дальнейшем. Пусть T — детерминированная МТ. Построим по ней двухленточную обратимую МТ R, эквивалентную T. Пусть все команды T пронумерованы числами $\{1, \dots, k\}$. Идея доказательства в следующем: на 1-й ленте R имитирует работу T, а на 2-й последовательно записывает номера выполняемых команд T. Пусть

$$T = \langle \Sigma_T, Q_T, \Delta_T, q_{0T}, q_{fT}, b_T \rangle.$$

Здесь Σ_T — алфавит ленты, Q_T — множество состояний, Δ_T — функция переходов, $q_{0T} \in Q_T$ — начальное состояние, $q_{fT} \in Q_T$ — конечное состояние, b_T — пустой символ. Определим МТ R через МТ T:

$$\Sigma_R = \Sigma_T \cup \{1, \dots, k\}, \quad Q_R = Q_T, \quad q_{fR} = q_{fT}, \quad q_{0R} = q_{0T}, \quad b_R = b_T,$$

$$\Delta_R((\sigma_1, \sigma_2), q_i) = ((\delta_1, \delta_2), q_j, (d_1, \mathrm{Right})),$$

если $\Delta_T(\sigma_1, q_i) = (\delta_1, q_j, d_1)$ — команда МТ T, δ_2 — номер этой команды, $\sigma_2 = b_T$.

Выполнение условий теоремы очевидно. R не может иметь более одного выходящего ребра ввиду детерминированности T и более одного входящего — по построению, т. е. R обратима. Из доказательства ясно, что обратимая МТ R строится равномерно эффективно по номеру МТ T.

Пусть зафиксирована гёделева нумерация $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \omega}$ всех автоматных структур, т. е. такая нумерация, что по автоматному представлению структуры можно эффективно вычислить ее номер и, обратно, по номеру эффективно построить структуру.

Перейдем к формулировке результатов.

Теорема 3. *Множество* $\mathrm{Hom} = \{n \mid \mathfrak{A}_n$ *однородна* $\}$ Π^0_3*-полно.*

Доказательство. Проведем сначала оценку сверху. По определению

$$\mathfrak{A}_n \text{ однородна } \Leftrightarrow \forall a_0,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n((\mathfrak{A},a_1,\dots,a_n) \equiv (\mathfrak{A},b_1,\dots,b_n) \\ \to \exists b_0(\mathfrak{A},a_0,\dots,a_n) \equiv (\mathfrak{A},b_0,\dots,b_n)).$$

Пусть есть две автоматные структуры одной сигнатуры и зафиксирована гёделева нумерация $(\varphi_l)_{l\in\omega}$ всех предложений этой сигнатуры. Тогда равенство теорий этих моделей записывается Π^0_1-выражением

$$\mathfrak{A}_n \equiv \mathfrak{A}_m \Leftrightarrow \forall l\ Q(n,m,l),$$

где предикат $Q(n,m,l) \leftrightharpoons (\mathfrak{A}_n \models \varphi_l \leftrightarrow \mathfrak{A}_m \models \varphi_l)$ является вычислимым по теореме 1. Отсюда следует, что $\mathrm{Hom} \in \Pi^0_3$.

Покажем точность оценки сведением к Hom Π^0_3-полного множества $A = \{x \mid W_x$ кобесконечно$\}$. Доказательство Π^0_3-полноты множества A можно найти в [6, § 14.8]. Пусть есть МТ T_x с номером x. По теореме 2 существует эквивалентная ей обратимая МТ R_x, строящаяся эффективно по x. Пусть $\mathscr{C}(R_x) = (V,E)$ — граф конфигураций R_x. Он автоматен. Множество начальных конфигураций init регулярно. Рассмотрим автоматную структуру

$$B = \langle 1^*0^*, (1,1)^*(0,1)(0,0)^*\rangle.$$

Она представляет собой множество цепей всех конечных длин. Пусть $B_\omega = (V_\omega, E_\omega)$ — ω копий структуры B. Добавим к носителю новый элемент b_0 и к ребрам — множество, определяемое формулой

$$\mathrm{Ed}(x,y) \leftrightharpoons (x=b_0)\&(\forall z(z,y)\notin E_\omega).$$

Иными словами, получилась автоматная модель (V_0,E_0), в которой из b_0 выходит бесконечное множество цепей каждой конечной длины. Заметим, что аналогичным образом можно построить автоматную модель (V_1,E_1), в которой из выделенной вершины b_1 выходит бесконечное множество цепей каждой конечной длины и бесконечное множество цепей, устроенных по типу ω. Можно считать, что V_0, V_1, V попарно не пересекаются. Определим множество

$$E_{b_0}(x,y) \leftrightharpoons (x=b_0)\&(y\in \mathrm{init}).$$

Модель $H = (V\cup V_1\cup V_0, E\cup E_1\cup E_0\cup E_{b_0})$ автоматна, так как объединение автоматных множеств автоматно, модели (V,E), (V_0,E_0), (V_1,E_1) автоматны, и E_{b_0} формульно определимо через автоматное множество init, следовательно, является автоматным. Объединим H с бесконечным множеством отдельных цепей, каждой конечной длины, бесконечным множеством отдельных цепей, устроенных по типу ω и по типу целых чисел. Получилась модель H_x, которая автоматна. Утверждается, что $x\in A \Leftrightarrow H_x \in \mathrm{Hom}$.

Пусть $x\in A$ и $(H_x,a_1,\dots,a_n)\equiv(H_x,c_1,\dots,c_n)$. Покажем, что существует автоморфизм, переводящий $\bar a$ в $\bar c$. Для простоты покажем это для $n=1$, для $n>1$ рассмотрение проводится аналогично. Если a_1 лежит в отдельной цепи, то и c_1 лежит в отдельной цепи, причем эти цепи равной длины (возможно, и бесконечной), a_1 и c_1 лежат на одинаковом расстоянии от соответствующих начал цепей. Искомый автоморфизм переводит цепи друг в друга естественным образом, на остальных действует тождественно.

Пусть a_1, c_1 лежат в одной из двух компонент связности, являющихся «пучками цепей». Тогда длина цепи, на которой лежит a_1, совпадает с длиной цепи, на которой лежит c_1, и a_1, c_1 лежат на одинаковом расстоянии от центра компоненты. Искомый автоморфизм переводит эти цепи друг в друга, на остальных элементах действует тождественно.

Пусть a_1, c_1 лежат в разных компонентах связности, каждая из которых не является цепью. Тогда искомый автоморфизм переводит компоненты друг в друга естественным образом, на остальных элементах действует тождественно.

Пусть $x \notin A$. Тогда МТ с номером x расходится на конечном множестве. Следовательно, b_0 является началом конечного набора бесконечных цепей. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — все последователи b_0, являющиеся началами бесконечных цепей. Пусть $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ — некоторые последователи b_1, являющиеся началами бесконечных цепей. Понятно, что не существует такого c_{n+1}, что $(H_x, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \equiv (H_x, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1})$. Покажем, что $(H_x, a_1, \ldots, a_n) \equiv (H_x, c_1, \ldots, c_n)$.

Построим счетное элементарное расширение модели $H_c \leftrightharpoons (H_x, c_1, \ldots, c_n)$. Добавим счетное множество констант в сигнатуру H_c. Нетрудно выписать множество предложений Y, утверждающее, что эти константы образуют ω бесконечных цепей, выходящих из элемента b_0. Пусть $D^*(H_c)$ — полная диаграмма модели H_c. Множество $D^*(H_c) \cup Y$ локально выполнимо. Действительно, модель H_c выполняет любое конечное подмножество этого множества. Значит, существует счетная модель $\mathfrak{M}$, выполняющая $Y \cup D^*(H_c)$ и, следовательно, являющаяся элементарным расширением H_c.

Аналогично построим модель $\mathfrak{N}$ — счетное элементарное расширение модели $H_a \leftrightharpoons (H_x, a_1, \ldots, a_n)$.

Модели $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ изоморфны. Действительно, модели разбиваются на следующие отдельные части.

1. Множество отдельных цепей. Эти части у моделей изоморфны, так как они состоят из бесконечного набора цепей каждой конечной длины и из бесконечного множества цепей, устроенных по типу ω и по типу целых чисел.

2. Компоненты связности, содержащие соответственно $\bar{a}$ и $\bar{c}$. Эти части состоят из вершины и присоединенным к ней бесконечным набором цепей каждой конечной длины. В модели $\mathfrak{N}$ к этой вершине также присоединено бесконечное множество цепей бесконечной длины, так как в H_x к соответствующей вершине было присоединено бесконечное множество цепей бесконечной длины. В модели $\mathfrak{M}$ к этой вершине присоединено бесконечное множество цепей бесконечной длины по построению расширения.

3. Оставшиеся две компоненты связности, не содержащие $\bar{a}$ и $\bar{c}$. Их изоморфизм рассматривается аналогично предыдущему случаю.

Итак, $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$, следовательно, $H_c \equiv H_a$. Значит, модель H_x неоднородна.

Определение 6. Назовем автоматную структуру $\mathfrak{A}$ *автоматно однородной*, если $\forall \bar{a}, \bar{b}\ (\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \bar{b}) \Rightarrow$ существует автоматный автоморфизм, переводящий $\bar{a}$ в $\bar{b}$.

Теорема 4. *Множество* $\mathrm{AHom} = \{n \mid \mathfrak{A}_n$ *автоматно однородна*$\}$ Π^0_2*-полно.*

Доказательство. Приведем оценку сверху. Зафиксируем эффективную нумерацию $R^l_{n\in\omega}$ всех автоматных бинарных отношений на множестве $|\mathfrak{A}_l|$. Определим предикат $\mathrm{Aut}(l, n, \bar{a}, \bar{b}) \leftrightharpoons$ бинарное отношение R^l_n является автоморфизмом $\mathfrak{A}_l$ и переводит $\bar{a}$ в $\bar{b}$. По теореме 1 предикат Aut вычислим. Структура $\mathfrak{A}_l$ автоматно однородна, если $\forall \bar{a}, \bar{b}\ (\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \bar{b}) \Rightarrow \exists n\, \mathrm{Aut}(l, n, \bar{a}, \bar{b})$. В теореме 3 показано, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \bar{b})$ записывается Π^0_1-выражением. Отсюда следует, что $\mathrm{AHom} \in \Pi^0_2$.

Покажем, что множество AHom Π^0_2-полно. Сведем Π^0_2-полное множество $B = \{x \mid W_x = \mathbb{N}\}$ к множеству AHom. Доказательство Π^0_2-полноты множества B можно найти в [6, § 14.8]. Пусть T_x — МТ с номером x. Возьмем обратимую МТ R_x из теоремы 2, эквивалентную МТ T_x. Пусть $\mathscr{C}(R_x) = (V, E)$ — граф конфигураций R_x. Он автоматен. Множество начальных конфигураций init регулярно. Определим множество N init:

$$x \in \mathrm{N\,init} \leftrightharpoons (x \notin \mathrm{init}) \& \neg(\exists y (y, x) \in E).$$

Определим множество E_{llex}:

$$(x, y) \in E_{\mathrm{llex}} \leftrightharpoons (x \in \mathrm{N\,init}) \& (y \in \mathrm{N\,init}) \& (x \prec_{\mathrm{llex}} y).$$

Пусть $b_0 \notin V$. Определим множество E_{b_0}:

$$(x, y) \in E_{b_0} \leftrightharpoons (x = b_0) \& (y \in \mathrm{init}).$$

Наконец, определим

$$H_x = (V \cup \{b_0\} \cup 11^+, E \cup E_{\mathrm{llex}} \cup E_{b_0} \cup \{((11)^n, (11)^n 11 \mid n \in \omega\} \cup (b_0, 11)).$$

Заметим, что граф H_x автоматен. Утверждается, что $x \in B \Leftrightarrow H_x \in \mathrm{AHom}$.

Пусть $x \in B$. Граф H_x состоит из двух компонент связности. Пусть $\mathrm{Th}(H_x, \bar{a}) = \mathrm{Th}(H_x, \bar{b})$. Для простоты будем считать, что $|\bar{a}| = 1$. Если a принадлежит компоненте, не содержащей b_0, то ее значение совпадает со значением b. Искомый автоморфизм тождественный. Пусть a принадлежит другой компоненте. Так как $x \in B$, из b_0 выходит только одна бесконечная цепь. Если a принадлежит этой цепи, то значение b совпадает со значением a и опять искомый автоморфизм тождественный. Пусть теперь a принадлежит конечной цепи, тогда и b принадлежит конечной цепи такой же длины, причем отстоит от b_0 на том же расстоянии, что и a. Поэтому существует конечный автоморфизм, переводящий a в b.

Пусть $x \notin B$. Тогда существует начальная конфигурация, на которой МТ с номером x не определена. Возьмем в качестве a эту конфигурацию. Элемент 11 возьмем в качестве b. Понятно, что $(H_x, a) \equiv (H_x, b)$. Но длина каждой последующей конфигурации МТ R_x больше длины предыдущей на единицу. А длина каждого последующего элемента цепи, началом которой является 11, больше длины предыдущей на два. Тем самым по лемме 2 не существует автоматного автоморфизма, переводящего a в b.

Определение 7. Автоматная модель $\mathfrak{A}$ *универсальна в классе автоматных моделей*, если для любой автоматной модели $\mathfrak{B}$ такой, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, существует элементарное вложение $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$.

В доказательстве следующей теоремы используется конструкция из доказательства Σ^1_1-полноты проблемы изоморфизма для автоматных структур, изложенная в [4].

Теорема 5. *Множество* $\mathrm{Un} = \{n \mid \mathfrak{A}_n$ *универсальна в классе автоматных моделей*$\}$ Σ^1_1*-полно.*

Доказательство. Понятно, что $\mathrm{Un} \in \Sigma^1_1$. Докажем, что это точная оценка, сведением к Un множества $C = \{n \mid T_n$ вычислимое дерево, имеющее бесконечную ветвь$\}$. В статье [7] по номеру n вычислимого дерева T_n эффективно строится дерево S_n такое, что если в T_n есть бесконечный путь, то в S_n есть поддерево, изоморфное $\omega^{<\omega}$. А если в T_n нет бесконечного пути, то и в S_n нет бесконечного пути. Теперь по S_n, используя конструкцию из [4], эффективно построим автоматную модель U_n. Определим множества

$$N = \{0,1\}^*1 \cup \lambda, \quad (x,y) \in E_N \leftrightharpoons (x \prec_p y) \& \neg(\exists z(x \prec_p z \prec_p y)),$$

где $x \prec_p y \leftrightharpoons x$ является приставкой y. В графе (N, E_N) к каждой вершине присоединим по бесконечному набору цепей каждой конечной длины. Затем к полученному графу добавим по бесконечному множеству отдельных цепей каждой конечной длины и по бесконечному набору отдельных цепей бесконечной длины, устроенных по типу ω и по типу целых чисел. Это делается по аналогии с теоремами 3, 4 так, чтобы полученный граф (D, E_D) был автоматным. Можно считать, что S_n — вычислимое поддерево (N, E_N). Пусть МТ P_n работает на элементах из N, причем P_n на входе x зацикливается, если $x \in S_n$, иначе останавливается. R_n — обратимая МТ, эквивалентная P_n из теоремы 2. Пусть $\mathscr{C}(R_n)$ — граф конфигураций R_n. Пусть $\mathscr{C}_\omega(R_n)$ ω копий $\mathscr{C}(R_n)$. Теперь возьмем граф (D, E_D), объединим его с графом $\mathscr{C}_\omega(R_n)$ и свяжем каждую вершину $p \in N$ с соответствующими ей ω начальными конфигурациями. Получилась автоматная модель $\mathfrak{B} = (|\mathfrak{B}|, E_{\mathfrak{B}})$.

Определим новую модель $\mathfrak{B}_\omega$:

$$|\mathfrak{B}_\omega| \leftrightharpoons |\mathfrak{B}| \times \{0^* \cup 1^*\}.$$

Определим отношение $\prec$ на множестве $\{0^* \cup 1^*\}$:

$$x \prec y \leftrightharpoons (x = y0) \vee (x1 = y).$$

Это отношение — предикат следования на множестве целых чисел. Определим отношение

$$(x,y) \in E_{\mathfrak{B}_\omega} \leftrightharpoons x, y \in |\mathfrak{B}_\omega| \& ((\mathrm{Pr}_2(x) = \mathrm{Pr}_2(y) \& (\mathrm{Pr}_1(x), \mathrm{Pr}_1(y)) \in E_{\mathfrak{B}}) \\ \vee (\mathrm{Pr}_1(x) = \mathrm{Pr}_1(y) = \lambda) \& \mathrm{Pr}_1(x) \prec \mathrm{Pr}_1(y)).$$

Модель $\mathfrak{B}_\omega = (|\mathfrak{B}_\omega|, E_{\mathfrak{B}_\omega})$ состоит из ω копий моделей $\mathfrak{B}$, причем все корни копий упорядочены по типу целых чисел.

Возьмем ω копий $\mathfrak{B}_\omega$ и добавим к ним модель $\mathfrak{B}$. Получим модель U_n. Будем рассматривать модель U_n в расширенной сигнатуре

$$\Sigma = \left(S^{(2)}, P^{(1)}_{\mathrm{tree}}, \mathrm{root}, P^{(1)}_{\mathrm{init}}, P^{(1)}_{\mathrm{end}}\right),$$

где отношение S — это предикат следования, предикат P_{tree} выделяет элементы дерева, константа root выделяет корень этого дерева, $P^{(1)}_{\mathrm{init}}$ выделяет все вершины, не имеющие предшественников, $P^{(1)}_{\mathrm{end}}$ выделяет все вершины, не имеющие последователей. Все эти отношения формульно записываются через предикат $S^{(2)}$, кроме того, U_n в сигнатуре S^2 автоматна, значит, U_n в сигнатуре Σ автоматна.

Утверждается, что $n \in C \Leftrightarrow U_n \in \mathrm{Un}$.

Пусть $n \in C$, тогда в S_n вкладывается полное дерево, а следовательно, и в U_n вкладывается полное дерево, у которого каждая вершина есть начало бесконечного набора цепей каждой конечной длины и бесконечной длины.

Рассмотрим теорию T сигнатуры Σ со следующей системой аксиом:

1) $x = \mathrm{root} \Rightarrow P_{\mathrm{tree}}(x) \& \neg(\exists y S(y,x))$;

2) предложение, утверждающее, что для любого элемента, не являющегося константой root и не лежащего в $P_{\mathrm{init}}^{(1)}$, существует ровно один предшественник;

3) $\{\phi_n \mid n \in \omega\}$, где ϕ_n утверждает, что у элемента, лежащего в P_{tree}, есть n последователей, также лежащих в P_{tree};

4) $\{\varphi_n^m \mid n \in \omega, m \in \omega\}$, где φ_n^m утверждает, что из любого элемента, принадлежащего P_{tree}, выходит m цепей длины n, которые состоят из элементов, не лежащих в P_{tree};

5) $\{\psi_n^m \mid n \in \omega, m \in \omega\}$, где ψ_n^m утверждает, что существует m отдельных цепей длины n, которые состоят из элементов, не лежащих в P_{tree};

6) φ утверждает, что каждый элемент, не лежащий в P_{tree} и не лежащий в P_{end}, имеет ровно одного последователя, причем не лежащего в P_{tree}, а лежащий в P_{end} не имеет ни одного последователя;

7) ψ утверждает, что каждый элемент, не лежащий в P_{tree} и не лежащий в P_{init}, имеет ровно одного предшественника, а лежащий в P_{init} не имеет предшественников.

Любая модель теории T состоит из дерева с корнем, бесконечного набора цепей каждой конечной длины, какого-то множества отдельных цепей (возможно, и пустого, и бесконечного), устроенных по типу ω и по типу целых чисел, и некоторой совокупности (возможно, и пустой, и бесконечной) деревьев следующего вида: к каждому элементу цепи, устроенной по типу целых чисел, присоединяется по ω-ветвящемуся дереву. При этом из каждой вершины каждого дерева этой модели выходит по бесконечному набору цепей каждой конечной длины и некоторому (возможно, и пустому, и бесконечному) множеству цепей бесконечной длины. Понятно, что все такие модели вкладываются в U_n. Кроме того, ясно, что U_n — модель теории T.

Пусть $\mathfrak{A}$ — модель теории U_n. Считаем ввиду вышеизложенного, что $\mathfrak{A} \subseteq U_n$. Покажем, что $\mathfrak{A} \preccurlyeq U_n$. Построим элементарное расширение $\mathfrak{A}_1$ модели $\mathfrak{A}$.

Добавим в сигнатуру счетное число новых попарно различных константных символов. Нетрудно записать множество Y предложений, утверждающих, что

1) с каждым элементом модели $\mathfrak{A}$, являющимся элементом дерева, связано ω деревьев, составленных из константных символов, причем каждое дерево представляет из себя копию полного ω-ветвящегося дерева, с каждым элементом которого связано ω цепей каждой конечной длины и бесконечной длины;

2) добавленные константы образуют ω компонент связности следующего вида: в модели, представляющей из себя целые числа с предикатом следования, к каждому элементу присоединяется по ω копий полного ω-ветвящегося дерева, причем с каждым элементом полученной модели связано счетное множество цепей каждой конечной длины и счетное множество цепей бесконечной длины;

3) некоторые константы образуют счетное множество отдельных цепей каждой конечной длины, устроенных по типу ω и по типу целых чисел.

4) с каждым элементом модели $\mathfrak{A}$, являющимся вершиной дерева, связано ω бесконечных цепей и ω цепей каждой конечной длины, составленных из константных символов.

Множество $Y \cup D^*(\mathfrak{A})$, где $D^*(\mathfrak{A})$ — полная диаграмма модели $\mathfrak{A}$, локально выполнимо. Действительно, модель $\mathfrak{A}$ выполняет любое конечное подмножество Y. Значит, существует счетная модель $\mathfrak{A}_1$, элементарно расширяющая $\mathfrak{A}$ и выполняющая Y.

Аналогично построим счетное элементарное расширение $\mathfrak{U}$ модели U_n.

Модель $\mathfrak{U}$ изоморфна модели $\mathfrak{A}_1$. Более того, изоморфизм φ можно построить таким образом, чтобы на элементах из $\mathfrak{A}$ он действовал тождественно.

Построим частичный изоморфизм для компонент связности, содержащих root. Элемент $\mathrm{root}^{\mathfrak{A}_1}$ перейдет в элемент $\mathrm{root}^{\mathfrak{U}}$. Заметим, что если один элемент цепи, лежащей в U_n, лежит в $\mathfrak{A}$, то и вся цепь лежит в $\mathfrak{A}$, в противном случае в модели $\mathfrak{A}$ появился бы элемент, не имеющий последователя и не лежащий в P_{end} либо не имеющий предшественника и не лежащий в P_{init}. Это противоречит совпадению теорий моделей $\mathfrak{A}$ и U_n.

Поэтому все цепи, связанные с $\mathrm{root}^{\mathfrak{A}_1}$ и лежащие в $\mathfrak{A}$, переведем в тождественные им, связанные с $\mathrm{root}^{\mathfrak{U}}$. Оставшиеся неотображенными цепи (их ω по построению расширения), связанные с $\mathrm{root}^{\mathfrak{A}_1}$, отображаются в оставшиеся цепи (их тоже ω по построению расширения), связанные с $\mathrm{root}^{\mathfrak{U}}$.

Пусть элемент $a \in \mathfrak{A}_1$ отобразился в элемент $b \in \mathfrak{U}$. Все последователи a, лежащие в P_{tree} и принадлежащие $\mathfrak{A}$, отображаются тождественно в элементы из $\mathfrak{U}$. Оставшиеся последователи a (их ω по построению расширения) отображаются в оставшиеся последователи b (их тоже ω по построению расширения). Связанные с ними цепи отображаются аналогично вышеразобранному случаю.

Таким образом строится изоморфизм компонент связности, содержащих root. Изоморфизм компонент связности моделей $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{U}$ строится аналогично. Итак, существует изоморфизм между моделями $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{U}$, причем такой, что элементы модели $\mathfrak{A}$ он отображает тождественно. Тогда для любой формулы ϕ и для любого кортежа $\bar{a} \in \mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_1 \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{U} \models \phi(\varphi(\bar{a})) \Leftrightarrow \mathfrak{U} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow U_n \models \phi(\bar{a}).$$

Следовательно, $\mathfrak{A} \preccurlyeq U_n$. Значит, $U_n \in \mathrm{Un}$.

Пусть $n \notin C$. Возьмем полное дерево, у которого каждая вершина есть начало бесконечного набора цепей каждой конечной длины и бесконечной длины, и добавим к нему по ω отдельных цепей каждой конечной длины. Построим элементарные расширения этой модели и U_n аналогично разобранному выше случаю. Эти расширения будут изоморфны, следовательно, теории расширений будут совпадать, а значит, и теории этих моделей совпадают, но вложения быть не может, так как в U_n нет бесконечной ветки, из каждой вершины которой выходит бесконечная цепь.

Следствие 1. *Множество универсальных автоматных структур не менее чем Σ^1_1-полное.*

Доказательство. В доказательстве по вычислимому дереву эффективно строится автоматная структура, в которую элементарно вкладываются все структуры (не только автоматные) той же теории, если дерево имеет бесконечную ветвь, и не все, если не имеет.

Следствие 2. *Множество универсальных вычислимых структур не менее чем Σ^1_1-полное.*

Доказательство. В доказательстве по вычислимому дереву эффективно строится автоматная (а значит, и вычислимая) структура, в которую элементарно вкладываются все структуры (не только автоматные) той же теории, если дерево имеет бесконечную ветвь, и не все, если не имеет.

Теперь получим оценку проблемы вычислимого изоморфизма для автоматных структур. Пусть $v^m_{n,n\in\omega}$ — эффективная нумерация всех слов из языка $|\mathfrak{A}_m|$.

Теорема 6. *Множество* $\mathrm{Aut}_{\Delta_1^0} = \{(m,n,l) \mid \exists f - \Delta_1^0$ *вычислимый автоморфизм* $\mathfrak{A}_m$ *такой, что* $f(v_n^m) = v_l^m\}$ Σ_3^0*-полно.*

Доказательство. Понятно, что это множество принадлежит Σ_3^0. Докажем, что это точная оценка. Пусть множество S принадлежит Σ_3^0. Сведем его к $\mathrm{Aut}_{\Delta_\alpha^0}$. Существует вычислимый предикат P_S такой, что

$$n \in S \Leftrightarrow \exists x \exists^\omega y \quad P_S(n,x,y)$$

(см. [6, § 14.8]).

Пусть n фиксировано. Определим новый вычислимый предикат

$$P_S^1(x,y) = \bigvee_{i \le x} P_S(n,i,y).$$

Заметим, что если существует бесконечно много y, для которых $P_S(n,x,y)$ истинен, то для любого $x_1 > x$ существует бесконечно много y таких, что $P_S^1(x_1,y)$ истинен. А если не существует x, для которого существует бесконечно много y таких, что $P_S(n,x,y)$ истинен, то и не существует x, для которого существует бесконечно много y таких, что $P_S^1(x,y)$ истинен.

Пусть R — обратимая МТ, вычисляющая предикат $P_S^1(x,y)$, причем пусть если предикат $P_S^1(x,y)$ истинен, то на входе (x,y) МТ R зацикливается, иначе останавливается. Пусть $\mathscr{C}(R) = (V,E)$ — граф конфигураций R. Пусть init — множество начальных конфигураций R. Пусть $H \in \mathrm{init}$ соответствует входу (x,y). Тогда на второй проекции H записана входная информация, т. е. слово $\underbrace{1\dots1}_{x} b \underbrace{1\dots1}_{y}$, на первой — текущее состояние головки, т. е. начальное, третья проекция H — это λ. Определим бинарное отношение $\mathrm{Projection}(H,x)$:

$$\mathrm{Projection}(H,x) \leftrightharpoons H \in \mathrm{init} \,\&x \in 1^* \& \exists y \,\mathrm{Pr}_2(H) = xb\underbrace{1\dots1}_{y}.$$

Это отношение регулярно. Пусть b_0 — новый элемент. Определим отношение E_1:

$$(x,y) \in E_1 \leftrightharpoons (x = b_0 \& y \in 1^*) \vee (x \in 1^* \& y \in \mathrm{init} \,\&\, \mathrm{Projection}(y,x))$$

Теперь в модели $(V \cup 1^* \cup \{b_0\}, E \cup E_1)$ к каждому элементу множества 1^* присоединим по бесконечному набору цепей каждой конечной длины. Получилась модель Gr.

Определим множество $\mathrm{Pair} \leftrightharpoons 2^* \times 2^*02^*$. Определим множество ребер

$$\begin{aligned}(x,y) \in \mathrm{Edge} \leftrightharpoons {} & (x \in 2^* \& y \in \mathrm{Pair} \,\&\, \mathrm{Pr}_1(y) = \lambda \& |\mathrm{Pr}_2(y)| = |x|) \\ & \vee (x \in \mathrm{Pair} \,\& y \in \mathrm{Pair} \,\&\, \mathrm{Pr}_2(x) = \mathrm{Pr}_2(y) \& \mathrm{Pr}_1(x)2 = \mathrm{Pr}_1(y)).\end{aligned}$$

Модель $\mathrm{Bundle} = (2^* \cup \mathrm{Pair}, \mathrm{Edge})$ представляет собой набор «пучков» бесконечных цепей, «пучок» с началом $\underbrace{2\dots2}_{n}$ состоит из n бесконечных цепей. Присоединим к каждому элементу $x \in 2^*$ по бесконечному множеству цепей каждой конечной длины. Возьмем ω копий этой модели. Получилась Bundle_ω. Теперь добавим Bundle_ω к Gr и соединим все вершины «пучков» в Bundle_ω с элементом b_0 из Gr. Получилась модель Gr Bundle.

Теперь возьмем копию Bundle_ω и добавим к ней ω копий модели, состоящей из вершины и бесконечного набора цепей каждой конечной длины и бесконечного множества цепей бесконечной длины, выходящих из этой вершины. Теперь добавим новую вершину a_0 и соединим ее со всеми вершинами «пучков» полученной модели. Объединим эту модель с моделью Gr Bundle. Получилась автоматная модель A_n. Утверждается, что

$$n \in S \Leftrightarrow (A_n, a_0, b_0) \in \mathrm{Aut}_{\Delta_1^0}.$$

Пусть $n \in S$, тогда существует минимальное число x_0, для которого существует бесконечно много y таких, что $P_S(n, x_0, y)$ истинен. Тогда все «пучки», связанные с b_0, вершины которых являются конфигурациями, соответствующими числам, бо́льшим x_0, имеют бесконечное множество цепей бесконечной длины. Тем самым, зная x_0, а также конечное множество пар $\{(x, y) \mid x < x_0, P_S(n, x, y)$ истинен$\}$, мы можем эффективно вычислять тип «пучка». Теперь устраиваем автоморфизм φ следующим образом: упорядочим по типу ω каждый набор всех «пучков» одного типа, связанных с a_0, и так же упорядочим все «пучки», связанные с b_0. Теперь каждый «пучок», связанный с a_0, переводится в соответствующий «пучок», связанный с b_0, все остальные элементы переводятся сами в себя. Так как S вычислим, тип каждой цепи каждого «пучка» эффективно определяется по элементу этой цепи. Следовательно, вышеуказанный автоморфизм является эффективным. Значит, $(A_n, a_0, b_0) \in \mathrm{Aut}_{\Delta_1^0}$.

Пусть $n \notin S$, тогда не существует автоморфизма модели A_n, переводящего a_0 в b_0, так как с a_0 соединен «пучок» с бесконечным набором цепей бесконечной длины, а с b_0 не соединен. Следовательно, $(A_n, a_0, b_0) \notin \mathrm{Aut}_{\Delta_1^0}$.

Следствие 3. *Множество*

$$\mathrm{Iso}_{\Delta_1^0} = \{(m, n) \mid \mathfrak{A}_m \cong_{\Delta_1^0} \mathfrak{A}_n\}$$

Σ_3^0-*полно.*

Доказательство. Оценка сверху показывается, как в предыдущей теореме, а снизу — сведением множества $\mathrm{Aut}_{\Delta_1^0}$ к $\mathrm{Iso}_{\Delta_1^0}$. Действительно,

$$(\mathfrak{A}_n, a, b) \in \mathrm{Aut}_{\Delta_1^0} \Leftrightarrow (\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b) \in \mathrm{Iso}_{\Delta_1^0},$$

где модели $\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b$ — это модели $\mathfrak{A}$ с соответственно добавленными в сигнатуру элементами a, b.

Следствие 4. *Множество*

$$\mathrm{Emb}_{\Delta_1^0} = \{(m, n) \mid \mathfrak{A}_m \hookrightarrow_{\Delta_1^0} \mathfrak{A}_n\}$$

Σ_3^0-*полно.*

Доказательство. Пусть $E \in \Sigma_3^0$. Пусть L_n — модель, полученная выкидыванием из модели A_n модели Gr Bundle, а в качестве M_n возьмем модель Gr Bundle, где A_n и Gr Bundle из теоремы 6 построены по E. Тогда $n \in E \Leftrightarrow (L_n, M_n) \in \mathrm{Emb}_{\Delta_1^0}$, что доказывается, как в предыдущей теореме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khoussainov B., Nerode A.* Automata theory and its applications. Boston etc.: Birkhauser, 2001.
2. *Khoussainov B., Rubin S., Ishihara H.* On isomorphism invariants of some automatic structures // Proc. 17th IEEE sympos. on logic in computer science. Copenhagen (Denmark), 2002. P. 43–53.
3. *Blumensath A., Grädel E.* Automatic structures // Proc. 15th IEEE sympos. on logic in computer science. Santa Barbara (California), 2000. P. 51–62.

4. *Rubin S.* Automata structures: Thes ... doct. mathematics. University of Auckland, 2004.
5. *Bennett C.* Logical reversibility of computation // IBM J. Res. Develop. 1973. V. 17. P. 525–532.
6. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
7. *Гончаров С. С., Найт Дж.* Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 6. С. 639–681.

Статья поступила 18 мая 2005 г., окончательный вариант — 22 марта 2006 г.

Винокуров Никита Сергеевич
Новосибирский гос. университет, Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vinokurov@gorodok.net