Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 517.95

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В УРАВНЕНИЯХ ТОНКИХ КАПИЛЛЯРНЫХ ПЛЕНОК С НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИФФУЗИЕЙ И КОНВЕКЦИЕЙ

Р. М. Таранец

Аннотация: Исследуется эволюция носителя произвольного сильного обобщенного решения задачи Коши для уравнения тонких пленок с нелинейными диффузией и конвекцией. Найдена в некотором смысле точная верхняя оценка скорости распространения носителя этого решения.

Ключевые слова: уравнение тонких пленок, конвекция, задача Коши, распространение носителя.

Введение. В работе изучается поведение носителя обобщенного сильного решения следующей задачи Коши:

$$u_t + \operatorname{div}(u^n \nabla\Delta u - u^m \nabla u) = \vec{\chi} \cdot \nabla b(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u_0 \geq 0, \quad \operatorname{supp} u_0 \text{ — компакт}, \tag{2}$$

$$|b'(z)| \leq c|z|^{\lambda-1} \ \forall z \in \mathbb{R}^1, \quad b(0) = 0, \quad \lambda > 0,\ c > 0, \tag{3}$$

где $u = u(t,x)$, $N \leq 3$, $n > 0$, $m \in \mathbb{R}^1$, $\vec{\chi} \in \mathbb{R}^N$. Вырождающееся параболическое четвертого порядка уравнение (1) является характерным представителем широкого класса нелинейных уравнений структуры:

$$u_t + \operatorname{div}(f(u)\nabla\Delta u + \nabla A(u)) = g(t,x,u,\nabla u), \tag{4}$$

возникающих при моделировании различных процессов в теории упругих деформаций, динамике жидкостей и бинарных смесей [1–6]. Например, уравнение (1) с $b(u) = 0$ описывает эволюцию жидкой пленки, распространяющейся по твердой поверхности под действием сил поверхностного натяжения, вязкости и (при $m = n$) гравитации. Отметим, что при $m < 0$ член второго порядка в (1) соответствует межмолекулярным силам Ван-дер-Ваальса, а при $m > 0$ ($m \neq n$) — внутренним диффузионным силам. Член четвертого порядка в (1) описывает влияние капиллярных сил поверхностного натяжения. Показатель $n > 0$ характеризует поведение жидкости на линии ее контакта с твердой поверхностью. Так, например, случай $n = 3$ соответствует контакту без проскальзывания, а $n \in (0,3)$ — движению жидкости с частичным проскальзыванием. Случай $n = m = 1$ описывает изменение размера области, занятой жидкостью в полупространственной ячейке Хеле — Шоу в вязком режиме [7]. Случай $n = 1$, $m = 0$ соответствует главному члену при $u \to 0$ в уравнении Кана — Хиллиарда для бинарных смесей с логарифмической свободной энергией. Конвективное слагаемое в (1) описывает действие различных потенциалов: например, гравитации на наклонной плоскости ($\vec{\chi}b(u) = (u^n, 0, \dots, 0)$), поверхностного натяжения, обусловленного изменениями температурных режимов ($\vec{\chi}b(u) = (-u^{n-1}, 0, \dots, 0)$) [2, 8, 9] и т. п.

Математическое исследование вырождающихся уравнений четвертого порядка типа тонких пленок начато в работе [10], в которой, в частности, построено неотрицательное обобщенное слабое решение задачи Неймана с произвольной неотрицательной начальной функцией для одномерного уравнения:

$$u_t + \operatorname{div}(|u|^n \nabla \Delta u) = 0. \tag{5}$$

Построенное авторами решение «слабее» обычного обобщенного решения в том смысле, что соответствующие интегралы в интегральном тождестве существуют не во всей области изучения задачи. Отметим, что свойство неотрицательности решения присуще уравнениям типа тонких пленок и, вообще говоря, не справедливо для уравнений высокого порядка общего вида. В дальнейшем были построены неотрицательные обобщенные решения краевых задач для многомерного уравнения (5), описан ряд зависящих от параметров n, N качественных свойств построенных решений, например,

— свойство конечности скорости распространения возмущений при $N = 1$ и $0 < n < 2$ [11, 12], $2 \le n < 3$ [13, 14], $n \ge 4$ [15], при $N \in \{2, 3\}$ и $1/8 < n < 2$ [16], $2 \le n < 3$ [16, 17];

— свойство конечной обратной скорости при $N = 1$ и $1/2 < n < 3/2$ [11];

— эффект временно́й задержки распространения носителя при $N = 1$ и $0 < n < 3$, при $N \in \{2, 3\}$ и $1/8 < n < 2$ [18].

В работе [15] показано, что слабые решения не обладают свойством единственности. Для того чтобы выделить класс единственности, были введены сильные обобщенные решения — это слабые решения, удовлетворяющие специальной интегральной оценке, которая в соответствующей литературе называется энтропийной. Гипотеза о том, что именно класс сильных решений является классом единственности, до сих пор не доказана. Одним из важных свойств произвольного сильного решения является свойство конечности скорости распространения его носителя.

В работе [6] построены неотрицательные слабые решения задачи Неймана для (4) с $g = g(t, x, u)$, имеющей не более чем линейный рост по u, $|A'(u)| \le d_0 f(u)$ и $f(u)$, имеющей степенной рост в окрестности $u = 0$. В случае $g = g(t, x, u) \sim |u|^{\lambda-1}u$ ($\lambda > 0$), $A'(u) = -|u|^m$ и $f(u) = |u|^n$ уравнение (4) изучалось в [19, 20]. В работе [21] для многомерного уравнения (1) с $b(u) = 0$ построены неотрицательные обобщенные решения задачи Коши со слабым начальным следом ($m > 0,\ n \in (1/8, 2)$), найдены условия на параметры n, m, гарантирующие конечность ($m > 0,\ n \in (1/8, 2)$) и бесконечность ($m < 0$, $0 < m - n + 2 < 1/2$) скорости распространения возмущений, а также точная асимптотика движения носителя решения.

В [2, 8, 9] исследовалась устойчивость решений типа бегущей волны для одномерного уравнения (1) при $n = m = 3$, $\chi = 1$ и $b(u) = u^3 - u^2$. В [22] для одномерного уравнения (1) без диффузионного слагаемого при $n \in (0, 3)$, $\lambda > \max\{3n/4 - 1, 1/8\}$, $b(u)$ из (3) построено неотрицательное локальное обобщенное решение, а при дополнительном условии $\lambda < 9/2$ — неотрицательное глобальное обобщенное решение задачи (1)–(3). Там же доказано свойство конечности скорости распространения носителя и найдена ее оценка сверху при больших и малых временах. В работе [23] для многомерного уравнения (1) при

$m > 0$, $n \in (1/8, 2)$, $\max\{1, (3n-1)/4\} < \lambda < (5N+8)/(4N) + \min\{n, 5/4\}$, если $N < 3$, и $\max\{1, (3n-1)/4\} < \lambda < 2 + \min\{n, 5/4\}$, если $N = 3$, построено неотрицательное обобщенное решение задачи (1)–(3), обладающее свойством конечности скорости распространения возмущений.

В настоящей работе найдена оценка сверху для скорости движения носителя решения задачи (1)–(3). Метод доказательства состоит в исследовании поведения решений специальных функциональных неравенств и является обобщением метода введения малого параметра, предложенного в работе [24]. В свою очередь, этот метод основан на применении принципа Сен-Венана. Подробную информацию о принципе Сен-Венана и его применении для исследования уравнений в частных производных можно найти в обзорной работе [25].

Обозначения. Для $N \times N$-матрицы A и векторов $a, b \in \mathbb{R}^N$ определим $\langle a, A, b\rangle := \sum\limits_{i,j=1}^{N} a_i A_{ij} b_j$; χ_A — характеристическая функция множества A; для произвольной измеримой функции $v(t,x)$ определим множество положительности $\mathrm{P} := \mathrm{P}(v) = \{v > 0\} = \{(t,x) \in \mathrm{Dom}(v) : v(t,x) > 0\}$; $C_c^k(\Omega) := \{v \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp} v \subset \Omega\}$; $H^k(\Omega) := W_2^k(\Omega)$; $c(u_0)$, $c_i(u_0)$ — положительные постоянные, зависящие от известных параметров задачи (1)–(3), а также от начальной функции $u_0(x)$; d, d_i — положительные постоянные, не зависящие от параметров задачи (1)–(3). В ситуациях, где из контекста понятно, по какой области проводится интегрирование, соответствующие дифференциалы будем опускать.

По ходу статьи мы ссылаемся на леммы А.1–А.4, формулировки которых даны в приложении.

Определение сильного решения. Решение задачи (1)–(3) понимается в следующем смысле.

Определение 1. Пусть $N \leq 3$, $m > -1$, $n > 0$, $\lambda > 0$. Неотрицательную функцию $u(t,x) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+; H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)\big)$ будем называть *решением задачи* (1)–(3), если

(i) $\chi_{\mathrm{P}} u^{n-2}|\nabla u|^3$, $\chi_{\mathrm{P}} u^{n-1}|\nabla u|^2$, $u^n|\nabla u|$, u^{m+1} и $b(u)$ принадлежат пространству $L^1_{\mathrm{loc}}\big([0,\infty); L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)\big)$, где $\mathrm{P} = \mathrm{P}(u)$;

(ii) для любой функции $\zeta \in C_c^3([0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$ имеет место равенство

$$-\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} u\zeta_t - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0\zeta(0,x) + \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} \vec{\chi}\nabla\zeta b(u) = \frac{n(n-1)}{2} \iint\limits_{\mathrm{P}} u^{n-2}|\nabla u|^2 \nabla u \nabla\zeta + \frac{n}{2} \iint\limits_{\mathrm{P}} u^{n-1}|\nabla u|^2 \Delta\zeta + n \iint\limits_{\mathrm{P}} u^{n-1}\langle \nabla u, D^2\zeta, \nabla u\rangle + \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^n \nabla u \nabla\Delta\zeta + \frac{1}{m+1} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^{m+1}\Delta\zeta.$$

Замечание 1. Решение, удовлетворяющее определению 1, называют *слабым обобщенным решением* задачи (1)–(3). Концепция слабых решений для многомерных уравнений типа тонких пленок предложена в [5, 6, 26, 21].

Сформулируем доказанную в [23] теорему о существовании сильного решения задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть* $N \le 3$, $m > 0$, $1/8 < n < 2$,

$$\max\{1, (3n-1)/4\} < \lambda < (5N+8)/4N + \min\{n, 5/4\}, \text{ если } N < 3;$$
$$\max\{1, (3n-1)/4\} < \lambda < 2 + \min\{n, 5/4\}, \text{ если } N = 3,$$

и $u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{m-n+2}(\mathbb{R}^N)$ *— неотрицательная функция с* $\operatorname{supp} u_0 \subset B(0, R_0), R_0 < +\infty$. *Тогда существует решение* $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *из определения* 1 *такое, что*

(i) $\operatorname{supp} u(t,.)$ *компактен для почти всех* $t > 0$ *и существует возрастающая функция* $\Gamma(t) \in C[0,+\infty)$, $\Gamma(0) = 0$, *такая, что* $\operatorname{supp} u(t,.) \subset B(0, R_0 + c(u_0)\Gamma(t))$ $\forall t > 0$;

(ii) *для произвольного* $\alpha \in \Delta_{n,\lambda} := ((1/2-n)_+, \min\{(n+1)/3, 2-n\})$, *дополнительно удовлетворяющего условиям*

$$\max\left\{\frac{3(\alpha+n)-1}{4}, 1\right\} < \lambda \le \frac{N+2}{N} + \frac{3(\alpha+n)}{4} \quad \text{при } N < 3;$$
$$\max\left\{\frac{3(\alpha+n)-1}{4}, 1\right\} < \lambda \le \frac{3(\alpha+n)+7}{4} \quad \text{при } N = 3$$

(*легко проверить, что в предположениях данной теоремы множество таких* α *непусто*), *имеют место включения*

$$u^{m-n+2} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N)), \quad u^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \in L^4_{\mathrm{loc}}\big([0,\infty); W^1_4(\mathbb{R}^N)\big),$$
$$u^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^N)), \quad u^{\frac{\alpha+m+1}{2}} \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^N));$$

(iii) *для почти всех* $0 \le t_1 < t_2$ *и произвольной неотрицательной функции* $\zeta \in C^2([t_1,t_2] \times \mathbb{R}^N)$ *справедливо следующее неравенство:*

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^4 u^{\alpha+1}(t_2,x)\,dx - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\zeta^4)_t u^{\alpha+1}$$
$$+ c_3^{-1} \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^4 \{|\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}|^2 + |\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4 + |D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2\}$$
$$\le \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^4 u^{\alpha+1}(t_1,x)\,dx + c_3 \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\{\zeta(t)>0\}} u^{\alpha+m+1}(\zeta^2|\nabla\zeta|^2 + \zeta^3|\Delta\zeta|)$$
$$+ c_3 \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\{\zeta(t)>0\}} u^{\alpha+n+1}(|\nabla\zeta|^4 + \zeta^2|\Delta\zeta|^2) - \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\{\zeta(t)>0\}} \vec{\chi}\mathscr{B}^{(\alpha)}(u)\nabla\zeta^4, \quad (6)$$

где $\mathscr{B}^{(\alpha)}(z) := \alpha^{-1} \int\limits_0^z b'(\tau)\tau^\alpha d\tau$, α *из* (ii);

(iv) $u(t,.) \underset{t\to 0}{\to} u_0(.)$ *сильно в* $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Замечание 2. В [23] при $N \le 3$, $m > 0$, $n \in (1/8, 2)$ и

$$1 < \lambda < \kappa + 1 + \max\{n+\kappa, m\} \quad \text{при } N < 3,$$
$$1 < \lambda < \min\{(4n+7)/3, 4\} \text{ при } N = 3; \quad \kappa := \frac{2}{N}\min\{(n+4)/3, 3-n\}$$

доказано существование локального по времени сильного решения задачи (1)–(3).

Скорость распространения возмущений в задаче Коши. Введем следующие обозначения:

$$\Omega(s) = \{x = (x_1, x') : x_1 > d_1(s + |x'|),\ 0 < d_1 < \infty\}, \quad Q_T(s) = \Omega(s) \times (0, T),$$

$$K_T(s, \delta) = Q_T(s) \backslash Q_T(s + \delta), \quad K(s, \delta) = \Omega(s) \backslash \Omega(s + \delta), \quad K := \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, dx,$$

$$h_0(s) := \int\limits_{\Omega(s)} u_0^{\alpha+1}(x)\, dx \quad \forall s \in \mathbb{R}^1,\ \delta > 0.$$

Не ограничивая общности, предположим, что

$$\operatorname{supp} u_0 \cap \{x_1 \geq d_2 |x'|\} = \varnothing, \quad \vec{\chi} = \overrightarrow{(\chi_1, 0, 0)},$$

где $d_2 \in [0, d_1)$ — некоторое фиксированное число. Отсюда вытекает, что

$$h_0(s) \equiv 0 \quad \forall s \geq 0.$$

Следующая теорема содержит оценки сверху для скорости движения носителя решения задачи (1)–(3).

Теорема 2. *Пусть $u(t, x)$ — произвольное сильное решение задачи* (1)–(3), *построенное в теореме* 1 *с начальной функцией $u_0(x)$, имеющей компактный носитель и такой, что $0 \leq u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{m-n+2}(\mathbb{R}^N)$. Тогда для фронта носителя $\Gamma(t) = \sup\{|x| : x \in \operatorname{supp} u(t, .)\}$ справедливы следующие оценки сверху:*

(i) *если $\chi_1 \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}$ и $b(u)$ удовлетворяет* (3), *то*

$$\Gamma(t) \leq \begin{cases} c_1(u_0) \max\{\Gamma_0(t), t^{1 - \frac{N(\lambda-1)}{nN+4}}\}\ \forall t > 0 & \text{при } 1 < \lambda \leq n + 1 + 4/N, \\ c_1(u_0) \max\{\Gamma_0(t), t^{1 - \frac{N(\lambda-1)}{mN+2}}\}\ \forall t > 0 & \text{при } 1 < \lambda \leq m + 1 + 2/N, \end{cases}$$

где $\Gamma_0(t) = \max\{t^{1/(nN+4)},\ t^{1/(mN+2)}\}$;

(ii) *если $\chi_1 > 0$, $b(u) \geq d u^\lambda$ и $\lambda > \max\{n + 1, m + 1\}$, то*

$$\Gamma(t) \leq c_2(u_0) \min\{\Gamma_0(t), \max\{t^{\frac{\lambda-n-1}{4(\lambda-1)-n}}, t^{\frac{\lambda-m-1}{2(\lambda-1)-m}}\}\} \quad \forall t > 0,$$

где $\Gamma_0(t)$ из (i);

(iii) *если $\chi_1 > 0$, $b(u) \geq d u^\lambda$ и $\lambda < \min\{n + 1, m + 1\}$, то*

$$\Gamma(t) \leq c_3(u_0) \min\{\Gamma_0(t), 1\} \quad \forall t > 0;$$

(iv) *если $\chi_1 > 0$, $b(u) \geq d u^\lambda$ и $\lambda = n + 1 = m + 1$, то*

$$\Gamma(t) \leq c_4(u_0) \min\{\Gamma_0(t), 1 + \ln(1 + t)\} \quad \forall t > 0,$$

где положительные постоянные $c_i(u_0)$ зависят только от $m, n, \lambda, N, \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ (кроме того, $c_3(u_0)$ и $c_4(u_0)$ зависят от $\|u_0\|_{L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^N)}$) и не зависят от нормы $u_0(x)$ в $H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{m-n+2}(\mathbb{R}^N)$, хотя начальная функция принадлежит этому пространству.

Замечание 3. В случае отсутствия конвекции ($\chi_1 = 0$) и в ситуации, когда $\chi_1 > 0$, $b(u) \geq d u^\lambda$ и $n + 1 < \lambda < m + 1$ (или $m + 1 < \lambda < n + 1$), оценка скорости движения носителя совпадает с найденной в [21] и имеет следующий вид: $\Gamma(t) \leq c(u_0)\Gamma_0(t)\ \forall t > 0$, где постоянная $c(u_0)$ зависит только от m, n, N и $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, $\Gamma_0(t)$ из п. (i) теоремы 2.

Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $u(t,x)$ — сильное решение задачи (1)–(3). Тогда для произвольного $\alpha \in \Delta_{n,\lambda}$ справедливы следующие неравенства:*

$$
\begin{aligned}
L_T^{(1)}(s+\delta) &:= \sup_{t\in(0,T)} \int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{\alpha+1}(t) + \frac{1}{T}\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+1} \\
&\quad + c_3^{-1} \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} [|D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2 + |\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4 + |\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}|^2] \\
&\le c\Bigg(\delta^{-2} \iint\limits_{K_T(s,\delta)} u^{\alpha+m+1} + \delta^{-4} \iint\limits_{K_T(s,\delta)} u^{\alpha+n+1} + |\chi_1|\delta^{-1} \iint\limits_{K_T(s,\delta)} u^{\alpha+\lambda} + h_0(s)\Bigg) \\
&:= R_T^{(1)}(s,\delta) \quad \forall s\in\mathbb{R}^1,\ \delta>0,\ T>0,\ \chi_1\in\mathbb{R}^1; \qquad (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in(0,T)} \int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{\alpha+1}(t) + \frac{1}{T}\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+1} + \frac{cd_3\chi_1}{\delta} \iint\limits_{K_T(s+\delta/4,\delta/4)} u^{\alpha+\lambda} \\
&\quad + c_3^{-1} \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} [|D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2 + |\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4 + |\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}|^2] \\
&\quad \le c\Bigg(\delta^{-2} \iint\limits_{K_T(s,\delta)} u^{\alpha+m+1} + \delta^{-4} \iint\limits_{K_T(s,\delta)} u^{\alpha+n+1} + h_0(s)\Bigg) \\
&\quad := R_T^{(2)}(s,\delta) \quad \forall s\in\mathbb{R}^1,\ \delta>0,\ T>0,\ \chi_1\ge 0,\ d_3>0. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Доказательство. Введем в рассмотрение неотрицательные срезающие функции $\zeta(\tau)$, $\varphi(\tau)$, принадлежащие пространству $C^2(\mathbb{R}^1)$ и обладающие следующими свойствами:

$$
\varphi(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau \le 0, \\ 1, & \text{если } \tau \ge \frac{15d_1}{16}, \end{cases} \qquad \zeta(\tau) = \begin{cases} \tau, & \text{если } \tau \ge \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{16}, & \text{если } \tau < \frac{1}{32}, \end{cases}
$$

$$
0 \le \varphi(\tau) \le 1, \quad \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} \ge 0 \quad \forall \tau\in\mathbb{R}^1,
$$

кроме того,

$$
\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau) \ge 0 \quad \forall\tau\in\mathbb{R}^1, \quad \frac{d}{d\tau}\varphi(\tau) \ge d_0 > 0 \quad \forall\tau\in\left(\frac{3d_1}{16}, \frac{3d_1}{4}\right).
$$

Определим семейство основных срезающих функций:

$$
\varphi_{s,\delta}(x) = \varphi\left(-d_1\zeta\left(\frac{|x'|}{\delta}\right) + \frac{x_1 - d_1 s}{\delta}\right) \quad \forall s\in\mathbb{R}^1,\ \delta>0.
$$

В силу приведенных выше свойств срезок $\varphi(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ функции из указанного семейства удовлетворяют следующим соотношениям:

$$
\varphi_{s,\delta}(x) = \begin{cases} 0 & \forall x : x_1 \le d_1\big(s + \delta\zeta\big(\frac{|x'|}{\delta}\big)\big), \\ 1 & \forall x : x_1 \ge d_1\big(s + \delta\big(\zeta\big(\frac{|x'|}{\delta}\big) + \frac{15}{16}\big)\big), \end{cases} \qquad 0 \le \varphi_{s,\delta}(x) \le 1\ \forall x\in\mathbb{R}^N.
$$

Для всех x таких, что $d_1(s+\delta\zeta(|x'|/\delta)) \le x_1 \le d_1(s+\delta(\zeta(|x'|/\delta)+15/16))$, выполнены неравенства

$$|\nabla\varphi_{s,\delta}| \le \frac{d}{\delta}, \quad |\Delta\varphi_{s,\delta}| \le \frac{d}{\delta^2},$$

а для всех x таких, что $d_1(s+\delta(\zeta(|x'|/\delta)+3/16)) \le x_1 \le d_1(s+\delta(\zeta(|x'|/\delta)+3/4))$, имеем

$$(\varphi_{s,\delta}(x))_{x_1} \ge \frac{d_3}{\delta} > 0.$$

Кроме того, очевидны следующие включения:

$$\Omega(s+\delta) \subset \{x=(x_1,x') : x_1 \ge d_1(s+\delta(\zeta(|x'|/\delta)+15/16))\} \subset \Omega(s+15/16\delta) \\ \subset \{x : x_1 \ge d_1(s+\delta\zeta(|x'|/\delta))\} \subset \Omega(s),$$

$$K(s,\delta) \supset \{x : d_1(s+\delta\zeta(|x'|/\delta)) \le x_1 \le d_1(s+\delta(\zeta(|x'|/\delta)+15/16))\},$$

$$K(s+\delta/4,\delta/4) \subset \{x : d_1(s+\delta(\zeta(|x'|/\delta)+3/16)) \\ \le x_1 \le d_1(s+\delta(\zeta(|x'|/\delta)+3/4))\}.$$

Из данных включений, в частности, вытекает, что $\operatorname{supp}\varphi_{s,\delta}(x) \Subset \Omega(s)$.

Полагая в локальной энтропийной оценке (6)

$$\zeta^4(x,t) = \varphi^4_{s,\delta}(x)\exp(-tT^{-1}) \quad \forall T>0,$$

после простых преобразований получаем неравенства (7), (8). $\square$

Лемма 2. *Пусть $u(x,t)$ — произвольное сильное решение задачи (1)–(3). Введем энергетические функции, связанные с этим решением:*

$$E_T(s) := \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+m+1}, \quad I_T(s) := \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+n+1}, \quad F_T(s) := \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+\lambda}. \tag{9}$$

Тогда справедливы следующие оценки убывания:

$$E_T(s) \le c_1(u_0)Ts^{-N(\alpha+m)}, \quad I_T(s) \le c_2(u_0)Ts^{-N(\alpha+n)},$$
$$F_T(s) \le \begin{cases} c_3(u_0)Ts^{-\frac{N(\lambda+\alpha-1)}{N(n-\lambda+1)+4}}, & \text{если } 1<\lambda\le n+1+\frac{4}{N}, \\ c_3(u_0)Ts^{-\frac{N(\lambda+\alpha-1)}{N(m-\lambda+1)+2}}, & \text{если } 1<\lambda\le m+1+\frac{2}{N}, \end{cases} \tag{10}$$

для любых $s>0$, $T>0$, где $c_i(u_0) = c_i(m,n,\lambda,N,K)$, $K = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$.

Доказательство. Применяя интерполяционное неравенство из леммы A.1 в области $K(s,\delta)$ к функции $v_1 := u^{(\alpha+m+1)/2}$ при $a=d=2$, $b=2/(\alpha+m+1)$, $i=0$, $j=1$, а затем интегрируя по времени от 0 до T, получаем

$$\iint\limits_{K_T(s,\delta)} u^{\alpha+m+1} \le c_4\delta^{-N(\alpha+m)}TK^{\alpha+m+1} + c_5T^{1-\mu_1}K^{(1-\mu_1)(\alpha+m+1)} \\ \times\Bigl(\iint\limits_{K_T(s,\delta)} |\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}|^2\Bigr)^{\mu_1}, \text{ где } \mu_1 = \frac{N(\alpha+m)}{N(\alpha+m)+2}. \tag{11}$$

Аналогично, применяя неравенство из леммы A.1 в $K(s,\delta)$ к функции $v_2 := u^{(\alpha+n+1)/2}$ при $a = d = 2$, $b = 2/(\alpha+n+1)$, $i = 0$, $j = 2$, а затем интегрируя по времени, находим

$$\iint\limits_{K_T(s,\delta)} u^{\alpha+n+1} \le c_6\delta^{-N(\alpha+n)}TK^{\alpha+n+1} + c_7T^{1-\mu_2}K^{(1-\mu_2)(\alpha+n+1)}$$

$$\times\Bigg(\iint\limits_{K_T(s,\delta)} \big|D^2u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\big|^2\Bigg)^{\mu_2}, \text{ где } \mu_2 = \frac{N(\alpha+n)}{N(\alpha+n)+4}. \quad (12)$$

Применяя неравенство из леммы A.1 в области $K(s,\delta)$ к функциям v_1 при $a = 2(\alpha+\lambda)/(\alpha+m+1)$, $d = 2$, $b = 2/(\alpha+m+1)$, $i = 0$, $j = 1$ и v_2 при $a = 4(\alpha+\lambda)/(\alpha+n+1)$, $d = 4$, $b = 4/(\alpha+n+1)$, $i = 0$, $j = 1$, а затем интегрируя по времени, получаем

$$\iint\limits_{K_T(s,\delta)} u^{\alpha+\lambda} \le c_8\delta^{-N(\alpha+\lambda-1)}TK^{\alpha+\lambda} + c_9T^{1-\mu_{i+2}}c(K)\Bigg(\iint\limits_{K_T(s,\delta)} |\nabla v_i|^{2i}\Bigg)^{\mu_{i+2}}, \quad (13)$$

$i = 1,2$, где $\mu_3 = \frac{N(\alpha+\lambda-1)}{N(\alpha+m)+2} \le 1 \Rightarrow 1 < \lambda \le m+1+\frac{2}{N}$, $\mu_4 = \frac{N(\alpha+\lambda-1)}{N(\alpha+n)+4} \le 1 \Rightarrow 1 < \lambda \le n+1+\frac{4}{N}$. Подставляя (11)–(13) в (7) и используя неравенство Юнга с «ε», приходим к неравенству

$$L_T^{(1)}(s+\delta) \le \varepsilon \iint\limits_{K_T(s,\delta)} [|D^2u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2 + |\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4 + |\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}|^2]$$

$$+c(\varepsilon,K)T(\delta^{-(N(\alpha+m)+2)} + \delta^{-(N(\alpha+n)+4)} + \delta^{-\frac{N(\alpha+n)+4}{N(n-\lambda+1)+4}}) \quad \forall\varepsilon>0,\ s\ge 0,\ \delta>0,$$

или

$$L_T^{(1)}(s+\delta) \le \varepsilon \iint\limits_{K_T(s,\delta)} [|D^2u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2 + |\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4 + |\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}|^2]$$

$$+c(\varepsilon,K)T(\delta^{-(N(\alpha+m)+2)} + \delta^{-(N(\alpha+n)+4)} + \delta^{-\frac{N(\alpha+m)+2}{N(m-\lambda+1)+2}}) \quad \forall\varepsilon>0,\ s\ge 0,\ \delta>0,$$

где $L_T^{(1)}(s+\delta)$ из (7). Выбирая

$$\varepsilon \in (0, \min\{2^{-(N(\alpha+n)+4)}, 2^{-(N(\alpha+n)+4)}, 2^{-\frac{N(\alpha+n)+4}{N(n-\lambda+1)+4}}, 2^{-\frac{N(\alpha+m)+2}{N(m-\lambda+1)+2}}\})$$

достаточно малым и проводя стандартную итерационную процедуру, устанавливаем, что

$$L_T^{(1)}(s_0+\delta_0) \le c(K)TU_i(\delta_0) \quad \forall s_0\ge 0,\ \delta_0>0,\ i=1,2, \quad (14)$$

где

$$U_1(\delta_0) := \delta_0^{-(N(\alpha+m)+2)} + \delta_0^{-(N(\alpha+n)+4)} + \delta_0^{-\frac{N(\alpha+m)+2}{N(m-\lambda+1)+2}},$$

$$U_2(\delta_0) := \delta_0^{-(N(\alpha+m)+2)} + \delta_0^{-(N(\alpha+n)+4)} + \delta_0^{-\frac{N(\alpha+n)+4}{N(n-\lambda+1)+4}}.$$

В неравенствах (11)–(13) устремим $\delta \to +\infty$ и воспользуемся оценкой (14) при $s_0 = 0$ и $\delta_0 = s > 0$. В итоге получаем

$$I_T(s) \le c(K)TU^{\mu_1}(s),\ E_T(s) \le c(K)TU^{\mu_2}(s),\ F_T(s) \le c(K)TU^{\mu_{i+2}}(s), \quad i=1,2,$$

для любого $s > 0$. Отсюда вытекают оценки (10). $\square$

Лемма 3. *Пусть* $\chi_1 \geq 0$, $b(u) \geq du^\lambda$ *и* $u(t,x)$ — *произвольное сильное решение задачи* (1)–(3). *Тогда для любых* $s \geq 0$, $\delta > 0$ *и* $T > 0$ *имеет место следующее неравенство:*

$$\sup_{t\in(0,T)} \int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{\alpha+1}(t) + \frac{1}{T} \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+1} + \frac{cd_3\chi_1}{\delta} \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+\lambda}$$
$$+ c_3^{-1} \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} [|D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2 + |\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4 + |\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}|^2]$$
$$\leq c\Bigg(\delta^{-2} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+m+1} + \delta^{-4} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+n+1}\Bigg) := \widetilde{R}_T^{(2)}(s,\delta). \quad (15)$$

Доказательство. Для заданных $s_0 \geq 0$ и $\delta > 0$ полагаем $s_i = s_{i-1} + \delta/4$, $i \in \mathbb{N}$. Выбирая в (8) $s = s_i$, а затем суммируя полученные неравенства, получаем (15). $\square$

Лемма 4. *Пусть* $\chi_1 \geq 0$, $b(u) \geq du^\lambda$ *и* $E_T(s)$, $I_T(s)$ — *функции из* (9), *связанные с произвольным сильным решением* $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3). *Тогда для любых* $s > 0$ *и* $T > 0$ *справедливы следующие оценки убывания:*

$$I_T(s) \leq c_{10} T\Gamma^N(T) s^{-\frac{3(\alpha+n+1)}{\lambda-n-1}}, \quad E_T(s) \leq c_{11} T\Gamma^N(T) s^{-\frac{\alpha+m+1}{\lambda-m-1}}, \qquad (16)$$

если $\lambda > \max\{n+1, m+1\}$, *где* $c_i = c_i(m,n,\lambda,N)$, $\Gamma(T)$ *из теоремы* 2;

$$\begin{gathered} I_T(s) \leq c_{12}(u_0) s^{-\xi_1},\ E_T(s) \leq c_{13}(u_0) s^{-\xi_2}, \qquad \text{если } \lambda < \min\{n+1, m+1\}, \\ I_T(s) = E_T(s) \leq c_{14}(u_0) T^{1-\theta_i} d_4^{-s}, \qquad \text{если } \lambda = n+1 = m+1, \end{gathered} \qquad (17)$$

для любого $s > 0$, *где* $\theta_1 = mN/(mN + 2(\alpha+1))$, $\theta_2 = nN/(nN + 4(\alpha+1))$; $c_i(u_0) = c_i(m,n,\lambda,N,\|u_0\|_{L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^N)})$, $d_4 > 1$,

$$s^{-\xi_1} = \max\{s^{-4\frac{(\alpha+1)(N(m-\lambda+1)+2(\alpha+1))}{N(m-\lambda+1)(N(n-\lambda+1)+4(\alpha+1))}}, s^{-12\frac{\alpha+1}{N(n-\lambda+1)}}\},$$

$$s^{-\xi_2} = \max\{s^{-\frac{6(\alpha+1)(N(n-\lambda+1)+4(\alpha+1))}{N(n-\lambda+1)(N(m-\lambda+1)+2(\alpha+1))}}, s^{-2\frac{\alpha+1}{N(m-\lambda+1)}}\}.$$

Доказательство. Применяя неравенство Юнга с «ε» с показателями $(\alpha+\lambda)/(\alpha+m+1) > 1$ ($\Rightarrow \lambda > m+1$), $(\alpha+\lambda)/(\lambda-m-1)$ и $(\alpha+\lambda)/(\alpha+n+1) > 1$ ($\Rightarrow \lambda > n+1$), $(\alpha+\lambda)/(\lambda-n-1)$, оценим интегралы из правой части неравенства (15):

$$c\delta^{-2} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+m+1} \leq \varepsilon \frac{c\chi_1}{\delta} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+\lambda}$$
$$+ c(\varepsilon) T \chi_1^{-\frac{\alpha+m+1}{\lambda-m-1}} \delta^{\frac{\alpha+\lambda}{\lambda-m-1}(\frac{\alpha+m+1}{\alpha+\lambda}-2)} \operatorname{mes}\{\Omega(s) \cap \operatorname{supp} u(t,.)\} \quad \forall \varepsilon \in (0,1);$$

$$c\delta^{-4} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+n+1} \leq \varepsilon \frac{c\chi_1}{\delta} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+\lambda}$$
$$+ c(\varepsilon) T \chi_1^{-\frac{\alpha+n+1}{\lambda-n-1}} \delta^{\frac{\alpha+\lambda}{\lambda-n-1}(\frac{\alpha+n+1}{\alpha+\lambda}-4)} \operatorname{mes}\{\Omega(s) \cap \operatorname{supp} u(t,.)\} \quad \forall \varepsilon \in (0,1).$$

Подставляя найденные оценки в (15), выбирая

$$\varepsilon \in (0, \min\{2^{\frac{\alpha+\lambda}{\lambda-m-1}(\frac{\alpha+m+1}{\alpha+\lambda}-2)}, 2^{\frac{\alpha+\lambda}{\lambda-n-1}(\frac{\alpha+n+1}{\alpha+\lambda}-4)}\})$$

и итерируя получающееся неравенство при $s = s_i$, $\delta = \delta_i$, $s_i = s_{i-1} + \delta_{i-1} - \delta_i$, $\delta_i = 2^{-i}\delta_0$, $i = \overline{1,\infty}$, $s_0 \geq 0$, $\delta_0 > 0$, устанавливаем, что

$$\sup_{t\in(0,T)} \int\limits_{\Omega(s_0+\delta_0)} u^{\alpha+1}(t) + \frac{1}{T} \iint\limits_{Q_T(s_0+\delta_0)} u^{\alpha+1} + \frac{cd_3\chi_1}{\delta} \iint\limits_{Q_T(s_0+\delta_0)} u^{\alpha+\lambda}$$

$$+ c_3^{-1} \iint\limits_{Q_T(s_0+\delta_0)} [|D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2 + |\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4 + |\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}|^2]$$

$$\leq cT\big(\chi_1^{-\frac{\alpha+m+1}{\lambda-m-1}} \delta_0^{\frac{\alpha+\lambda}{\lambda-m-1}(\frac{\alpha+m+1}{\alpha+\lambda}-2)} + \chi_1^{-\frac{\alpha+n+1}{\lambda-n-1}} \delta_0^{\frac{\alpha+\lambda}{\lambda-n-1}(\frac{\alpha+n+1}{\alpha+\lambda}-4)}\big)$$

$$\times (\Gamma(T) - s_0)_+^N \quad \forall \delta_0 > 0,\ s_0 \geq 0, \tag{18}$$

где $\lambda > \max\{n+1, m+1\}$. Применяем неравенство Гёльдера с показателями $(\alpha+\lambda)/(\alpha+m+1) > 1$, $(\alpha+\lambda)/(\lambda-m-1)$ и $(\alpha+\lambda)/(\alpha+n+1) > 1$, $(\alpha+\lambda)/(\lambda-n-1)$ к функциям $E_T(s)$ и $I_T(s)$. Используя неравенство (18) с $s_0 = 0$, $\delta_0 = s > 0$, получаем

$$E_T(s) \leq \Big(\iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+\lambda}\Big)^{\frac{\alpha+m+1}{\alpha+\lambda}} \Big(\iint\limits_{Q_T(s)} 1\Big)^{\frac{\lambda-m-1}{\alpha+\lambda}} \leq c[T\Gamma^N(T)]^{\frac{\lambda-m-1}{\alpha+\lambda}}$$

$$\times [Ts^{1+\frac{\alpha+\lambda}{\lambda-m-1}(\frac{\alpha+m+1}{\alpha+\lambda}-2)}\Gamma^N(T)]^{\frac{\alpha+m+1}{\alpha+\lambda}} = cT\Gamma^N(T)s^{-\frac{\alpha+m+1}{\lambda-m-1}}, \quad \text{если } \lambda > m+1,$$

и

$$I_T(s) \leq \Big(\iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+\lambda}\Big)^{\frac{\alpha+n+1}{\alpha+\lambda}} \Big(\iint\limits_{Q_T(s)} 1\Big)^{\frac{\lambda-n-1}{\alpha+\lambda}} \leq c[T\Gamma^N(T)]^{\frac{\lambda-n-1}{\alpha+\lambda}}$$

$$\times [Ts^{1+\frac{\alpha+\lambda}{\lambda-n-1}(\frac{\alpha+n+1}{\alpha+\lambda}-4)}\Gamma^N(T)]^{\frac{\alpha+n+1}{\alpha+\lambda}} = cT\Gamma^N(T)s^{-\frac{3(\alpha+n+1)}{\lambda-n-1}}, \text{ если } \lambda > n+1.$$

Тем самым оценки (16) установлены.

Теперь покажем справедливость соотношений (17). Применяя лемму A.2 в области $Q_T(s+\delta)$ к функции $v_1 := u^{(\alpha+m+1)/2}$ при $p = 2$, $r = 2(\alpha+\lambda)/(\alpha+m+1)$, $q = 2(\alpha+1)/(\alpha+m+1)$, $1 - b_1 = 2(\alpha+1)/(N(m-\lambda+1) + 2(\alpha+1))$, имеем

$$E_T(s+\delta) := \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+m+1} \leq c\Big(\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} |\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}|^2\Big)^{b_1} \Big(\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+\lambda}\Big)^{1-b_1}$$

$$\times \sup_{t\in(0,T)} \Big(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{\alpha+1}(t)\Big)^{\frac{m-\lambda+1}{\alpha+1}(1-b_1)} \overset{(15)}{\leq} c\delta^{1-b_1}(\widetilde{R}_T^{(2)}(s,\delta))^{1+\ell_1}, \tag{19}$$

где $\ell_1 = 2(m-\lambda+1)/(N(m-\lambda+1)+2(\alpha+1))$ и $\lambda < m+1$. Аналогично, применяя лемму A.2 в области $Q_T(s+\delta)$ к функции $v_2 := u^{(\alpha+n+1)/4}$ при $p = 4$, $r = 4(\alpha+\lambda)/(\alpha+n+1)$, $q = 4(\alpha+1)/(\alpha+n+1)$, $1-b_2 = 4(\alpha+1)/(N(n-\lambda+1)+4(\alpha+1))$, получаем

$$I_T(s+\delta) := \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+n+1} \leq c\Big(\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} |\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^2\Big)^{b_2} \Big(\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+\lambda}\Big)^{1-b_2}$$

$$\times \sup_{t\in(0,T)} \Big(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{\alpha+1}(t)\Big)^{\frac{n-\lambda+1}{\alpha+1}(1-b_2)} \overset{(15)}{\leq} c\delta^{1-b_2}\big(\widetilde{R}_T^{(2)}(s,\delta)\big)^{1+\ell_2}, \tag{20}$$

где $\ell_2 = 4(n-\lambda+1)/(N(n-\lambda+1)+4(\alpha+1))$ и $\lambda < n+1$. Из (19), (20), используя глобальную энтропийную оценку ((6) с $\zeta \equiv 1$), получаем

$$E_T(s+\delta) \le c(u_0)\biggl(\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+\lambda}\biggr)^{1-b_1}, \ b_1 = \frac{N(m-\lambda+1)}{N(m-\lambda+1)+2(\alpha+1)}, \ \lambda < m+1;$$

$$I_T(s+\delta) \le c(u_0)\biggl(\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+\lambda}\biggr)^{1-b_2}, \ b_2 = \frac{N(n-\lambda+1)}{N(n-\lambda+1)+4(\alpha+1)}, \ \lambda < n+1,$$

где $c(u_0) = c(n, m, \lambda, N, \|u_0\|_{L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^N)})$. Пусть $Z_T(s) := E_T^{1-b_2}(s) + I_T^{1-b_1}(s)$, тогда из полученных неравенств и оценки (15) вытекает, что

$$Z_T(s+\delta) \le c(u_0)\bigl(\delta^{-\beta} Z_T^{1-b_1}(s) + \delta^{-3\beta} Z_T^{1-b_2}(s)\bigr), \quad \beta = (1-b_1)(1-b_2).$$

Отсюда, применяя неравенство Юнга с «ε», находим

$$Z_T(s+\delta) \le \varepsilon Z_T(s) + c(u_0)(\varepsilon^{-\frac{1-b_1}{b_1}}\delta^{-\frac{\beta}{b_1}} + \varepsilon^{-\frac{1-b_2}{b_2}}\delta^{-\frac{3\beta}{b_2}}) \quad \forall \varepsilon \in (0,1).$$

Учитывая, что функция $Z_T(s)$ убывает по s, проитерируем это неравенство при $s = s_i$ и $\delta = \delta_i$, $s_0 \ge 0$, $\delta_0 > 0$, $s_i = s_{i-1} + \delta_{i-1} - \delta_i$, $\delta_i = 2^{-i}\delta_0$, $i = \overline{1, \infty}$. Выбирая ε из интервала $(0, \min\{2^{-\beta/b_1}, 2^{-3\beta/b_2}\})$, получаем

$$Z_T(s_0+\delta_0) \le c(u_0)\bigl(\delta_0^{-\frac{\beta}{b_1}} + \delta_0^{-\frac{3\beta}{b_2}}\bigr),$$

откуда, полагая $s_0 = 0$, $\delta_0 = s > 0$, приходим к оценке

$$Z_T(s) \le c(u_0)(s^{-\frac{\beta}{b_1}} + s^{-\frac{3\beta}{b_2}}) \quad \forall s > 0.$$

Вспоминая определение функции $Z_T(s)$, имеем

$$E_T(s) \le c(u_0)\max\{s^{-\frac{1-b_1}{b_1}}, s^{-\frac{3(1-b_1)}{b_2}}\} \quad \forall s > 0,$$

$$I_T(s) \le c(u_0)\max\{s^{-\frac{1-b_2}{b_1}}, s^{-\frac{3(1-b_2)}{b_2}}\} \quad \forall s > 0,$$

если $\lambda < \min\{n+1, m+1\}$, откуда вытекают требуемые оценки убывания.

В случае $\lambda = n+1 = m+1$ из (15) следует, что

$$\frac{cd_3\chi_1\delta^3}{1+\delta^2}\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\alpha+n+1} \le \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+n+1} \quad \forall s \ge 0, \ \delta > 0,$$

тем самым для любого $i \in \mathbb{N}$

$$\biggl(\frac{cd_3\chi_1\delta^3}{1+\delta^2}\biggr)^i \iint\limits_{Q_T(s+i\delta)} u^{\alpha+n+1} \le \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+n+1}.$$

Выбирая δ_0 таким, что $d = \bigl(cd_3\chi_1\delta_0^3/\bigl(1+\delta_0^2\bigr)\bigr)^{1/\delta_0} > 1$, получаем

$$d^{i\delta_0} I_T(s+i\delta_0) \le I_T(s) \quad \forall s \ge 0, \ \delta_0 > 0,$$

следовательно,

$$I_T(s+\sigma) \le d^{\delta_0-\sigma} I_T(s) \quad \forall \sigma > 0, \ s \ge 0, \ d > 1.$$

Полагая в полученной оценке $s = 0$, $\sigma = s > 0$, имеем

$$I_T(s) = E_T(s) \le d^{\delta_0 - s} I_T(0) \quad \forall s > 0.$$

Применяя интерполяционное неравенство из леммы A.1 к функции v_1 при $a = d = 2$, $b = 2(\alpha+1)/(\alpha+m+1)$, $i = 0$, $j = 1$, $\theta_1 = mN/(mN + 2(\alpha+1))$ (v_2 при $a = d = 4$, $b = 4(\alpha+1)/(\alpha+n+1)$, $i = 0$, $j = 1$, $\theta_2 = nN/(nN + 4(\alpha+1))$), интегрируя по t и используя (6) с $\zeta = 1$, находим, что

$$I_T(0) = E_T(0) \le c(u_0) T^{1-\theta_i}.$$

Таким образом, лемма 4 доказана полностью. □

Все вспомогательные рассуждения проведены, и теперь приступим непосредственно к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. (i) Пусть $I_T(s), E_T(s), F_T(s)$ из (9). Применяем интерполяционное неравенство из леммы A.1 в области $\Omega(s+\delta)$ к функциям $v_1 := u^{(\alpha+m+1)/2}$ при $a = d = 2$, $b = 2(\alpha+1)/(\alpha+m+1)$, $i = 0$, $j = 1$, $\theta_1 = mN/(mN+2(\alpha+1))$; $v_2 := u^{(\alpha+n+1)/4}$ при $a = d = 4$, $b = 4(\alpha+1)/(\alpha+n+1)$, $i = 0$, $j = 1$, $\theta_2 = nN/(nN+4(\alpha+1))$; v_1 при $a = 2(\alpha+\lambda)/(\alpha+m+1)$, $d = 2$, $b = 2(\alpha+1)/(\alpha+m+1)$, $i = 0$, $j = 1$, $\tilde\theta_3 = N(\lambda-1)(\alpha+m+1)[(\alpha+\lambda)(mN+2(\alpha+1))]^{-1}$, $\lambda > 1$; v_2 при $a = 4(\alpha+\lambda)/(\alpha+n+1)$, $d = 4$, $b = 4(\alpha+1)/(\alpha+n+1)$, $i = 0$, $j = 1$, $\tilde\theta_4 = N(\lambda-1)(\alpha+n+1)[(\alpha+\lambda)(nN+4(\alpha+1))]^{-1}$, $\lambda > 1$. Интегрируем получающиеся неравенства по t. С учетом (7) приходим к следующим соотношениям:

$$E_T(s+\delta) \le cT^{1-\theta_1}\big(R_T^{(1)}(s,\delta)\big)^{1+k_1}, \quad \theta_1 = \frac{mN}{mN+2(\alpha+1)},\ k_1 = \frac{2m}{mN+2(\alpha+1)}, \tag{21}$$

$$I_T(s+\delta) \le cT^{1-\theta_2}\big(R_T^{(1)}(s,\delta)\big)^{1+k_2}, \quad \theta_2 = \frac{nN}{nN+4(\alpha+1)},\ k_2 = \frac{4n}{nN+4(\alpha+1)}, \tag{22}$$

$$F_T(s+\delta) \le cT^{1-\theta_{i+2}}\big(R_T^{(1)}(s,\delta)\big)^{1+k_{i+2}}, \quad i = 1, 2,$$

где $T > 0$, $R_T^{(1)}(s,\delta)$ из (7),

$$\theta_3 = \frac{N(\lambda-1)}{mN+2(\alpha+1)},\ k_3 = \frac{2(\lambda-1)}{mN+2(\alpha+1)}, \quad \text{если } 1 < \lambda \le m+1+\frac{2(\alpha+1)}{N},$$
$$\theta_4 = \frac{N(\lambda-1)}{nN+4(\alpha+1)},\ k_4 = \frac{4(\lambda-1)}{nN+4(\alpha+1)}, \quad \text{если } 1 < \lambda \le n+1+\frac{4(\alpha+1)}{N}.$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции, связанные с энергетическими функциями (9):

$$A_T(s+\delta) := E_T^{(1+k_2)(1+k_{i+2})}(s+\delta) \le cT^{(1-\theta_1)(1+k_2)(1+k_{i+2})}\big(R_T^{(1)}(s,\delta)\big)^{\beta_1},$$
$$B_T(s+\delta) := I_T^{(1+k_1)(1+k_{i+2})}(s+\delta) \le cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})}\big(R_T^{(1)}(s,\delta)\big)^{\beta_1},$$
$$C_T(s+\delta) := F_T^{(1+k_1)(1+k_2)}(s+\delta) \le cT^{(1-\theta_{i+2})(1+k_1)(1+k_2)}\big(R_T^{(1)}(s,\delta)\big)^{\beta_1},$$
$$D_T(s+\delta) := T^h A_T(s+\delta) + B_T(s+\delta) + T^\mu C_T(s+\delta), \quad i = 1, 2,$$

где

$$\beta_1 := (1+k_1)(1+k_2)(1+k_{i+2}), \quad h := [(1-\theta_2)(1+k_1) - (1-\theta_1)(1+k_2)](1+k_{i+2}),$$

$$\mu := [(1-\theta_2)(1+k_{i+2}) - (1-\theta_{i+2})(1+k_2)](1+k_1), \quad i = 1, 2.$$

Учитывая приведенные выше неравенства, для функции $D_T(s)$ в силу неравенства $(a-b)^{\alpha+1} \le a^{\alpha+1} - b^{\alpha+1}$ $\forall \alpha > 0$, $a > b > 0$, имеем

$$\begin{aligned} D_T(s+\delta) &\le cT^{(1-\theta_2)(1+k_1)}(R_T^{(1)}(s,\delta))^{\beta_1} \\ &\qquad \le c[\delta^{-2\beta_1}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-h(1+k_1)}(\Delta D_T(s))^{1+k_1} \\ &\qquad\qquad + \delta^{-4\beta_1}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})}(\Delta D_T(s))^{1+k_2} \\ &\qquad\qquad + \delta^{-\beta_1}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-\mu(1+k_1)}(\Delta D_T(s))^{1+k_{i+2}}] \\ &\le c\big[\delta^{-2\beta_1}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-h(1+k_1)}D_T^{k_1}(s) + \delta^{-4\beta_1}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})}D_T^{k_2}(s) \\ &\qquad + \delta^{-\beta_1}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-\mu(1+k_1)}D_T^{k_{i+2}}(s)\big]\Delta D_T(s), \end{aligned} \tag{23}$$

где $\Delta D_T(s) = D_T(s) - D_T(s+\delta)$. Теперь осуществим выбор параметра $\delta > 0$. Пусть

$$\delta_T^{(1)}(s) := \big[T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-h(1+k_1)}D_T^{k_1}(s)\big]^{\frac{1}{2\beta_1}} = T^{\frac{(1-\theta_2)(1+k_{i+2})-h}{2(1+k_2)(1+k_{i+2})}}D_T^{\frac{k_1}{2\beta_1}}(s),$$

$$\delta_T^{(2)}(s) := \big[T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})}D_T^{k_2}(s)\big]^{\frac{1}{4\beta_1}} = T^{\frac{1-\theta_2}{4(1+k_2)}}D_T^{\frac{k_2}{4\beta_1}}(s),$$

$$\delta_T^{(i+2)}(s) := \big[T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-\mu(1+k_1)}D_T^{k_{i+2}}(s)\big]^{\frac{1}{\beta_1}} = T^{\frac{(1-\theta_2)(1+k_1)-\mu}{(1+k_1)(1+k_2)}}D_T^{\frac{k_{i+2}}{\beta_1}}(s),$$

$$S_T^{(2)} := \big\{s \in \mathbb{R}^+ : \delta_T^{(2)}(s) \ge \max\big\{\delta_T^{(1)}(s), \delta_T^{(i+2)}(s)\big\}\big\},$$

$$S_T^{(i+2)} := \mathbb{R}^+ \backslash \big\{S_T^{(1)} \cup S_T^{(2)}\big\},$$

$$J_T(s) := \max\big\{\delta_T^{(1)}(s), \delta_T^{(2)}(s), \delta_T^{(i+2)}(s)\big\}, \quad i = 1, 2.$$

Полагая в (23) $\delta = \delta_T^{(1)}(s)$, имеем

$$D_T\big(s + \delta_T^{(1)}(s)\big) \le \frac{3c}{1+3c}D_T(s) \quad \forall s \in S_T^{(1)}. \tag{24}$$

В самом деле, если $\delta_T^{(1)}(s) \ge \delta_T^{(k)}(s) > 0$, то

$$\begin{aligned} &\big(\delta_T^{(1)}(s)\big)^{-4\beta}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})}D_T^{k_2}(s) \\ &\qquad\qquad \le \big(\delta_T^{(2)}(s)\big)^{-4\beta}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})}D_T^{k_2}(s) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\big(\delta_T^{(1)}(s)\big)^{-\beta}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-\mu(1+k_1)}D_T^{k_{i+2}}(s) \\ &\qquad\qquad \le \big(\delta_T^{(i+2)}(s)\big)^{-\beta}T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-\mu(1+k_1)}D_T^{k_{i+2}}(s) = 1. \end{aligned}$$

Если $\delta_T^{(1)}(s) \ge \delta_T^{(k)}(s) = 0$, то $D_T(s) = 0$, $\delta_T^{(1)}(s) = 0$, и утверждение теоремы очевидно. Аналогично поступаем в случаях $\delta = \delta_T^{(k)}(s)$:

$$D_T\big(s + \delta_T^{(k)}(s)\big) \le \frac{3c}{1+3c}D_T(s) \quad \forall s \in S_T^{(k)},\ k = \overline{2,4}. \tag{25}$$

Объединяя (24) и (25), получаем

$$D_T(s + J_T(s)) = \big\{D_T\big(s + \delta_T^{(k)}(s)\big), s \in S_T^{(k)}, k = \overline{1,4}\big\} \le \frac{3c}{1+3c}D_T(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

Возводя обе части полученного неравенства в степень $k_1/(2\beta_1)$ и умножая на $T^{[(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-h(1+k_1)]/(2\beta_1)}$, получим неравенство относительно $\delta_T^{(1)}(s)$, а возводя в степень $k_2/(4\beta_1)$ (k_{i+2}/β_1) и умножая на $T^{(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})/(4\beta_1)}$ $(T^{[(1-\theta_2)(1+k_1)(1+k_{i+2})-\mu(1+k_1)]/\beta_1})$, находим соответствующее неравенство для $\delta_T^{(2)}(s)$ $(\delta_T^{(i+2)}(s))$. Объединяя полученные для $\delta_T^{(k)}(s)$, $k=\overline{1,4}$, оценки, придем к основному функциональному соотношению относительно функции $J_T(s)$:

$$J_T(s+J_T(s)) \le \gamma J_T(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^+,\ 0<\gamma=\mathrm{const}<1. \tag{26}$$

Из (26) в силу леммы А.3 следует, что

$$J_T(s) \equiv 0 \quad \forall s \ge s_0 + \frac{1}{1-\gamma} J_T(s_0). \tag{27}$$

Отсюда вытекает верхняя оценка движения границы носителя:

$$\Gamma(T) \le s_0 + \frac{1}{1-\gamma} J_T(s_0) = c \min_{s_0\in\mathbb{R}^+} \bigl\{\max_{j=\overline{1,9}}\{F_j(s_0)\}\bigr\} \quad \forall s_0 \ge 0. \tag{28}$$

Пусть $\widetilde{F}_i(s_0)$ — правые части оценок для $F_i(s_0)$ $(i=\overline{1,9})$, полученных с использованием оценок убывания (10). Минимизируем с помощью леммы А.4 функции $\widetilde{F}_i(s_0)$ по s_0. В итоге получаем

$$\min \widetilde{F}_1(s_0) = \widetilde{F}_1\bigl(s_{\rm opt}^{(1)}\bigr) = c(u_0)s_{\rm opt}^{(1)}, \quad \min \widetilde{F}_5(s_0) = \widetilde{F}_5\bigl(s_{\rm opt}^{(5)}\bigr) = c(u_0)s_{\rm opt}^{(5)},$$

$$\min \widetilde{F}_9(s_0) = \widetilde{F}_9\bigl(s_{\rm opt}^{(9)}\bigr) = c(u_0)s_{\rm opt}^{(9)},$$

где

$$s_{\rm opt}^{(1)} = c(u_0)T^{1/(mN+2)}, \quad s_{\rm opt}^{(5)} = c(u_0)T^{1/(nN+4)},$$

$$s_{\rm opt}^{(9)} = \begin{cases} c(u_0)T^{[N(m-\lambda+1)+2]/(mN+2)}, & \text{если } 1<\lambda\le m+1+2/N, \\ c(u_0)T^{[N(n-\lambda+1)+4]/(nN+4)}, & \text{если } 1<\lambda\le n+1+4/N. \end{cases}$$

Проводя простые, но громоздкие вычисления, несложно убедиться, что

$$s_{\rm opt}^{(k)} \le c(u_0)\max\bigl\{s_{\rm opt}^{(1)}, s_{\rm opt}^{(5)}, s_{\rm opt}^{(9)}\bigr\}, \quad k\in\{2,3,4,6,7,8\}.$$

Тем самым утверждение (i) доказано.

(ii) Для энергетических функций $I_T(s), E_T(s)$ из (9), используя оценку (8) и схему из (i), получаем основное функциональное неравенство вида (26) для

$$J_T(s) := \max\bigl\{T^{\frac{1-\theta_2-\tilde h}{2(1+k_2)}}\bigl(T^{\tilde h}E_T^{1+k_2}(s)+I_T^{1+k_1}(s)\bigr)^{\frac{k_1}{2\beta_2}}, \\ T^{\frac{1-\theta_2}{4(1+k_2)}}\bigl(T^{\tilde h}E_T^{1+k_2}(s)+I_T^{1+k_1}(s)\bigr)^{\frac{k_2}{4\beta_2}}\bigr\},$$

где $\beta_2 := (1+k_1)(1+k_2)$, $\tilde h := (1-\theta_2)(1+k_1)-(1-\theta_1)(1+k_2)$. В силу леммы А.3 приходим к (27). Отсюда вытекает верхняя оценка движения границы носителя:

$$\Gamma(T) \le c \min_{s_0\in\mathbb{R}^+} \bigl\{\max_{j=\overline{1,4}}\{F_j(s_0)\}\bigr\} \quad \forall s_0 \ge 0. \tag{29}$$

Используя оценки (16) и лемму А.4, для $\Gamma(T)$ получаем

$$\Gamma(T) \le cs_{\rm opt}^{(1)} = cT^{\frac{\lambda-m-1}{2(\lambda-1)-m}}, \quad \Gamma(T) \le cs_{\rm opt}^{(4)} = cT^{\frac{\lambda-n-1}{4(\lambda-1)-n}},$$

$$\Gamma(T) \le c s_{\rm opt}^{(2)} {=} cT^{\mu_1},\ \mu_1{=}\frac{(\lambda-n-1)[(1-\theta_1)(1+k_2)+k_1\theta_2]}{3k_1(n+\alpha+1)+2(1+k_2)(\lambda-n-1)-Nk_1(\lambda-n-1)},$$

$$\Gamma(T) \le c s_{\rm opt}^{(3)} {=} cT^{\mu_2},\ \mu_2{=}\frac{(\lambda-m-1)[(1-\theta_2)(1+k_1)+k_2\theta_1]}{k_2(m+\alpha+1)+4(1+k_1)(\lambda-m-1)-Nk_2(\lambda-m-1)}.$$

Нетрудно показать, что

$$s_{\rm opt}^{(k)} \le \max\bigl\{s_{\rm opt}^{(1)}, s_{\rm opt}^{(4)}\bigr\}, \quad k=2,3.$$

Это доказывает оценку (ii).

(iii) Теперь рассмотрим ситуацию, когда $\chi_1 > 0$ и $\lambda < \min\{n{+}1, m{+}1\}$. Для энергетических функций $I_T(s)$, $E_T(s)$ из (9) введем вспомогательную функцию следующего вида:

$$D_T(s+\delta) := E_T^{1+\ell_2}(s+\delta) + I_T^{1+\ell_1}(s+\delta), \quad \ell_i \text{ из } (19),\ (20).$$

В силу оценок (19), (20) получаем

$$\begin{aligned} D_T(s+\delta) &\le c(\delta^{(1-b_1)(1+\ell_2)} + \delta^{(1-b_2)(1+\ell_1)})\bigl(\widetilde{R}_T^{(2)}(s,\delta)\bigr)^{\beta_3} \\ &\le c\bigl(\delta^{\kappa_1-2\beta_3} D_T^{\ell_1}(s) + \delta^{\kappa_1-4\beta_3} D_T^{\ell_2}(s)\bigr)\Delta D_T(s), \quad b_i \text{ из } (19),\ (20), \end{aligned}$$

где $\beta_3 := (1+\ell_1)(1+\ell_2)$, $\delta^{\kappa_1} = \max\bigl\{\delta^{(1-b_1)(1+\ell_2)}, \delta^{(1-b_2)(1+\ell_1)}\bigr\}$, $\widetilde{R}_T^{(2)}(s,\delta)$ из (15). Рассуждая так же, как в (i), устанавливаем неравенство типа (26) для

$$J_T(s) := c\max\Bigl\{\bigl(E_T^{1+\ell_2}(s) + I_T^{1+\ell_1}(s)\bigr)^{\frac{\ell_1}{2\beta_3-\kappa_1}}, \bigl(E_T^{1+\ell_2}(s) + I_T^{1+\ell_1}(s)\bigr)^{\frac{\ell_2}{4\beta_3-\kappa_1}}\Bigr\}.$$

В силу леммы А.3 из (26) вытекают (27) и аналог оценки (29). Оценим правую часть (29), используя (17), а затем минимизируем получающиеся оценки с помощью леммы А.4. Учитывая, что постоянные $c_{12}(u_0)$, $c_{13}(u_0)$ из (17) не зависят от T, после несложных преобразований приходим к оценке

$$\Gamma(T) \le c_{16}(u_0) \quad \forall T > 0,$$

где $0 < c_{16}(u_0) = c_{16}(m,n,\lambda,N,\|u_0\|_{L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^N)})$, откуда вытекает (iii).

(iv) В случае $\chi_1 > 0$, $\lambda = n+1 = m+1$ энергетические функции $I_T(s)$, $E_T(s)$ из (9) совпадают, поэтому, применяя интерполяционное неравенство из леммы А.1 в области $\Omega(s{+}\delta)$ к функции v_1 при $a=d=2$, $b=2(\alpha{+}1)/(\alpha{+}m{+}1)$, $i=0$, $j=1$, $\theta_1 = mN/(mN+2(\alpha+1))$ (v_2 при $a=d=4$, $b=4(\alpha{+}1)/(\alpha{+}n{+}1)$, $i=0$, $j=1$, $\theta_2 = nN/(nN+4(\alpha+1))$), интегрируя по t и используя оценку (15), получаем

$$\begin{aligned} I_T(s+\delta) = E_T(s+\delta) &\le cT^{1-\theta_i}\bigl(\widetilde{R}_T^{(2)}(s,\delta)\bigr)^{1+k_i} \\ &\le cT^{1-\theta_i}\delta^{-\kappa_2(1+k_i)} I_T^{1+k_i}(s), \quad \delta^{-\kappa_2} = \max\{\delta^{-2}, \delta^{-4}\},\ i=1,2, \end{aligned}$$

где θ_i, k_i из (21), (22); $\widetilde{R}_T^{(2)}(s,\delta)$ из (15). Выбирая в этом неравенстве

$$\delta = \delta_T(s) = \bigl[(1+c)^{-1} T^{1-\theta_i} I_T^{k_i}(s)\bigr]^{\frac{1}{\kappa_2(1+k_i)}},$$

находим

$$I_T(s+\delta_T(s)) \le \frac{c}{1+c} I_T(s) \quad \forall s > 0,$$

отсюда после простых преобразований вытекает, что

$$\delta_T(s+\delta_T(s)) \le \gamma\delta_T(s) \quad \forall s\in\mathbb{R}^+,\ 0<\gamma<1.$$

Согласно лемме A.3 из полученного неравенства следует, что

$$\delta_T(s)\equiv 0 \quad \forall s\ge s_0+\frac{1}{1-\gamma}\delta_T(s_0).$$

Значит, в силу оценки (17) имеем

$$\Gamma(T)\le s_0+c(u_0)T^{1-\theta_i}d_4^{-\eta_0 s_0},\quad \eta_0=\frac{k_i}{\kappa_2(1+k_i)},\quad d_4>1.$$

Минимизируя с помощью леммы A.4 правую часть этого неравенства относительно s_0, получаем

$$\Gamma(T)\le \left\{\begin{array}{rl} c(u_0)T^{1-\theta_i}, & \text{если } c(u_0)T^{1-\theta_i}<\eta_0^{-1} \\ c(1+\ln(c(u_0)\eta_0 T^{1-\theta_i})), & \text{если } c(u_0)T^{1-\theta_i}>\eta_0^{-1}\end{array}\right\} \le c(u_0)(1+\ln(1+T)) \quad \forall T>0,$$

где $c(u_0)$ зависит от $\|u_0\|_{L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^N)}$. Тем самым теорема 2 доказана полностью.

А. Приложение.

Лемма A.1 [27]. *Если $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей, $a>1$, $b\in(0,a)$, $d>1$, $0\le i<j$, $i,j\in\mathbb{N}$, то существуют положительные постоянные d_1 и d_2 ($d_2=0$, если Ω неограниченная), зависящие только от Ω,d,j,b и N, такие, что для любой функции $v(x)\in W_d^j(\Omega)\cap L^b(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|D^i v\|_{L^a(\Omega)}\le d_1\|D^j v\|^{\theta}_{L^d(\Omega)}\|v\|^{1-\theta}_{L^b(\Omega)}+d_2\|v\|_{L^b(\Omega)},\quad \theta=\frac{\frac{1}{b}+\frac{i}{N}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{j}{N}-\frac{1}{d}}\in[i/j,1).$$

Лемма A.2 [28]. *Пусть $\Omega(s):=\{x=(x_1,x'):x_1>d(s+|x'|),\ 0<d<\infty\}$, $\Omega(s)\subset\mathbb{R}^N$, $p>1$, $r>0$, $r\le p$, $q>0$, $1-b=pq(pq+N(p-r))^{-1}$. Тогда для любой функции $v(t,x)\in L^p\big(0,T;W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega(s))\big)$ справедливо неравенство*

$$\int_0^T\int_{\Omega(s)}|v|^p\le d_1\left(\int_0^T\int_{\Omega(s)}|\nabla v|^p\right)^b\left(\int_0^T\int_{\Omega(s)}|v|^r\right)^{1-b}\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_{\Omega(s)}|v|^q\right)^{\frac{(p-r)(1-b)}{q}}\quad \forall T>0,$$

где $0<d_1=d_1(N,p,q,r)$ не зависит от T.

Лемма A.3 [14]. *Пусть $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ — неотрицательная невозрастающая функция такая, что $f(s+f(s))\le\gamma f(s)$ $\forall s\ge s_0\ge 0$, $0<\gamma<1$. Тогда $f(s)\equiv 0$ $\forall s\ge s_0+(1-\gamma)^{-1}f(s_0)$.*

Лемма A.4. *Пусть $F(s)=s+ds^{-a}$, $a>0$, $d>0$ ($F(s)=s+bd_1^{-a_1 s}$, $a_1>0$, $b>0$, $d_1>1$) $\forall s>0$. Тогда*

$$\min F(s)=F(s_{\mathrm{opt}})=(1+a^{-1})s_{\mathrm{opt}}$$

$$(\min F(s)=F(s_{\mathrm{opt}})=(a_1\ln d_1)^{-1}(1+\ln(a_1 b\ln d))),$$

где $s_{\mathrm{opt}}=(ad)^{\frac{1}{a+1}}$ $\big(s_{\mathrm{opt}}=a_1^{-1}\log_{d_1}(a_1 b\ln d_1)\big)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bernis F.* Viscous flows, fourth order nonlinear degenerate parabolic equations and singular elliptic problems // Free boundary problems: theory and applications / Proc. Intern. conf. held in Toledo, Spain, June 21–26, 1993. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1995. P. 40–56. (Pitman Res. Notes Math.; Ser. 323).
2. *Bertozzi A. L., Münch A., Shearer M.* Undercompressive shocks in thin film flows // Phys. D. 1999. V. 134. P. 431–464.
3. *Bertozzi A. L., Pugh M.* The lubrication approximation for thin viscous films: the moving contact line with a porous media cutoff of the Van der Waals interactions // Nonlinearity. 1994. V. 7, N 6. P. 1535–1564.
4. *Bertozzi A. L., Pugh M.* Long-wave instabilities and saturation in thin film equations // Comm. Pure Appl. Math. 1998. V. 51, N 6. P. 625–661.
5. *Elliot C. M., Garcke H.* On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27, N 2. P. 404–423.
6. *Grün G.* Degenerate parabolic differential equations of fourth order and plasticity model with non-local hardening // Z. Anal. Anwendungen. 1995. Bd 14. S. 541–574.
7. *Oron A., Davis S. H., Bankoff G.* Long-scale evolution of thin liquid films // Rev. Mod. Phys. 1997. V. 69, N 3. P. 931–980.
8. *Bertozzi A. L., Münch A., Shearer M., Zumbrun K.* Stability of compressive and undercompressive thin film traveling waves. The dynamics of thin fluid films // European J. Appl. Math. 2001. V. 12, N 3. P. 253–291.
9. *Bertozzi A.L., Shearer M.* Existence of undercompressive traveling waves in thin film equations // SIAM J. Math. Anal. 2000. V. 32, N 1. P. 194–213.
10. *Bernis F., Friedman A.* Higher order nonlinear degenerate parabolic equations // J. Differential Equations. 1990. V. 83, N 1. P. 179–206.
11. *Bernis F.* Finite speed of propagation and continuity of the interface for thin viscous flows // Adv. Differential Equations. 1996. V. 1, N 3. P. 337–368.
12. *Kersner R., Shishkov A.* Existence of free-boundaries in thin-film theory // Donetsk, 1996. 15 p. (Preprint IAMM NASU; № 6).
13. *Bernis F.* Finite speed of propagation for thin viscous flows when $2 \leq n < 3$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1996. V. 322, N 12. P. 1169–1174.
14. *Hulshof J., Shishkov A.* The thin film equation with $2 \leq n < 3$: Finite speed of propagation in terms of the L^1-norm // Adv. Differential Equations. 1998. V. 3, N 5. P. 625–642.
15. *Beretta E., Bertsch M., Dal Passo R.* Nonnegative solutions of a fourth-order nonlinear degenerate parabolic equation // Arch. Rational Mech. Anal. 1995. V. 129, N 2. P. 175–200.
16. *Bertsch M., Dal Passo R., Garcke H., Grün G.* The thin viscous flow equation in higher space dimension // Adv. Differential Equations. 1998. V. 3, N 3. P. 417–440.
17. *Grün G.* Droplet spreading under weak slippage: A basic result on finite speed of propagation // SIAM J. Math. Anal. 2003. V. 34, N 4. P. 992–1006.
18. *Dal Passo R., Giacomelli L., Grün G.* A waiting time phenomenon for thin film equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 2001. V. 30, N 2. P. 437–464.
19. *Таранец Р. М.* Распространение возмущений в уравнениях тонких капиллярных пленок с нелинейным поглощением // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. 2003. Т. 8. С. 181–194.
20. *Таранец Р. М., Шишков А. Е.* Эффект временной задержки распространения носителя в уравнениях тонких пленок // Укр. мат. журн. 2003. Т. 55, № 7. С. 935–952.
21. *Dal Passo R., Giacomelli L., Shishkov A.* The thin film equation with nonlinear diffusion // Comm. Partial Differential Equations. 2001. V. 26, N 9&10. P. 1509–1557.
22. *Giacomelli L., Shishkov A.* Propagation of support in one-dimensional convected thin-film flow. Rome, Sept. 2003, 22 p. (Preprint / IAC "Mauro Picone"; to appear in Indiana Univ. Math. J.).
23. *Таранец Р. М., Шишков А. Е.* Об уравнении течения тонких пленок с нелинейной конвекцией в многомерных областях // Укр. мат. вісник. 2004. Т. 1, № 3. С. 402–444.
24. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, № 5. С. 7–76.
25. *Galaktionov V. A., Shishkov A. E.* Saint-Venant's principle in blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 2003. V. 133, N 5. P. 1075–1119.

26. *Dal Passo R., Garcke H., Grün G.* On a fourth-order degenerate parabolic equation: Global entropy estimates, existence and qualitative behavior of solutions // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 29, N 2. P. 321–342.

27. *Nirenberg L.* An extended interpolation inequality // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. III. 1966. Ser. 20. P. 733–737.

28. *Bernis F.* Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equation with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1986. V. 104. P. 1–19.

Статья поступила 12 апреля 2005 г.

Таранец Роман Михайлович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
`taranets_r@yahoo.com`