Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 512.544

О СУЩЕСТВОВАНИИ В ГРУППЕ f–ЛОКАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

А. И. Созутов, М. В. Янченко

Аннотация: Доказано существование бесконечных подгрупп с нетривиальными локально конечными радикалами и бесконечных локально конечных подгрупп в группах с почти конечными почти разрешимыми элементами простых порядков и в группах с обобщенно конечными элементами.

Ключевые слова: группа, f-локальная подгруппа, почти конечный элемент, обобщенно конечный элемент, обобщенно конечная группа.

В работе обобщаются некоторые результаты из [1–10] и приводятся доказательства теорем, анонсированных в [11, 12].

Если множество элементов конечного порядка в бесконечной группе G конечно, то ввиду известной леммы Дицмана оно образует конечную вполне характеристическую подгруппу группы G. Если же множество таких элементов в G бесконечно, то возникают различные вопросы об их расположении в группе [9]. Одним из них является известный вопрос М. И. Каргаполова [13, вопрос 1.24] о существовании в бесконечной группе бесконечных абелевых подгрупп, отрицательный ответ на который в общем случае получен П. С. Новиковым и С. И. Адяном [14]. Поэтому его приходится рассматривать для многих классов бесконечных групп отдельно. Вопрос М. И. Каргаполова тесно связан с более слабым вопросом о существовании в группе f-локальных подгрупп, т. е. бесконечных подгрупп с нетривиальными локально конечными радикалами (см. вопрос С. П. Стрункова [13, вопрос 2.75]). В работе даны положительные ответы на указанные вопросы в некоторых классах групп.

Теорема 1. *Пусть G — бесконечная группа, a — элемент простого порядка $p > 2$ из G и почти для всех элементов $a^g \in a^G$ подгруппы $\langle a, a^g\rangle$ конечны и разрешимы. Тогда либо число элементов конечного порядка в G конечно, либо элемент a принадлежит f-локальной подгруппе, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка.*

Элемент x группы G назовем *разрешимым*, если все конечные подгруппы, порожденные элементами из x^G, разрешимы.

Теорема 2. *Пусть G — бесконечная группа, a и b — разрешимые элементы простых порядков из G, $|a| \cdot |b| > 4$ и почти для всех элементов $c \in b^G$ подгруппы $\langle a, c\rangle$ конечны. Тогда либо число элементов конечного порядка в G конечно, либо хотя бы один из элементов a, b принадлежит f-локальной подгруппе, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка.*

Говорят, что смешанная группа G обладает *периодической частью*, если все ее элементы конечного порядка составляют подгруппу [9]. Неединичный элемент a конечного порядка произвольной бесконечной группы G назовем *обобщенно конечным*, если a принадлежит основанию веера конечных подгрупп, амальгама которого почти полностью содержит неединичный класс сопряженных элементов группы G. Другими словами, почти для всех элементов c некоторого неединичного класса b^G подгруппы $\langle a, c\rangle$ конечны, т. е. выполняется (a, b)-условие конечности [9].

Теорема 3. *Если все конечные подгруппы группы G разрешимы и каждое ее сечение по конечной подгруппе либо является группой без кручения, либо обладает обобщенно конечным элементом простого порядка > 2, то G либо обладает конечной периодической частью, либо содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

В случае, когда свойство обобщенной конечности справедливо для всех элементов простого порядка из G и наследуется всеми ее подгруппами и фактор-группами по периодическим нормальным подгруппам, назовем G *обобщенно конечной группой.* Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Если в обобщенно конечной группе множество элементов конечного порядка бесконечно и все ее конечные подгруппы разрешимы, то она содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Полученные результаты пересекаются с теоремой, анонсированной в [15]. Дадим необходимые для ее формулировки определения. *Точками* группы G называются элементы конечного порядка следующего типа:

а) единица — точка в том и только том случае, если множество элементов конечного порядка из G конечно;

б) неединичный элемент $a \in G$ — точка в том и только том случае, если для любой неединичной конечной подгруппы $K < G$, нормализуемой элементом a, множество конечных подгрупп из $N_G(K)$, содержащих a, конечно.

Точка простого порядка называется *примитивной.* Ситуация, когда элемент a порождает почти с каждым элементом, сопряженным с b, конечную подгруппу, называется (a, b)-*условием конечности* в группе [15].

Теорема [15]. *Группа G тогда и только тогда обладает конечной периодической частью, когда в ней для пары примитивных точек a, b выполняется (a, b)-условие конечности.*

По-видимому, в этой теореме предполагается, что (a, b)-условие конечности выполняется для всех пар примитивных точек из G, поскольку В. П. Шунковым построена группа с парой примитивных точек a, b, удовлетворяющих (a, b)-условию конечности, в которой нет периодической части (см. пример 1). Из теорем 1, 2 вытекает

Следствие 2. *Если в группе G существует пара примитивных точек a, b, хотя бы одна из которых не инволюция, элемент a разрешим и порождает почти с каждым элементом сопряженным с b конечную подгруппу, то G обладает конечной периодической частью.*

1. Известные результаты

Приведем сначала пример В. П. Шункова [16], показывающий существенность ограничений на порядки элементов в теоремах 1, 2.

Пример 1. Пусть $V = A(m, n) \wr \langle a\rangle$ — сплетение группы Адяна $A(m, n)$ с помощью циклической группы $\langle a\rangle$ порядка 2. Группа $A(m, n)$ при $m \geq 2$ и нечетном $n \geq 665$ — группа без кручения с центральной циклической подгруппой $\langle d \rangle$, фактор-группа $A(m,n)/\langle d \rangle$ — свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ периода n [14]. Центр Z базы сплетения B в V является прямым произведением $Z = \langle d \rangle \times \langle d^a \rangle$ двух бесконечных циклических подгрупп, а централизатор $C_B(a)$ совпадает с диагональю, т. е. с множеством всех элементов вида gg^a, где $g \in A(m,n)$, и изоморфен $A(m,n)$. Бесконечная циклическая подгруппа $D = \langle d^{-1}a^{-1}da \rangle$ нормальна в V и состоит из всех строго вещественных элементов относительно инволюции a из подгруппы Z. Рассмотрим фактор-группу $G = V/D$. Тогда $Z/D = Z(G)$, инволюция $\bar{a} = aD$ с каждой своей сопряженной инволюцией порождает в G группу диэдра порядка $2n$ и $C_{\overline{B}}(\bar{a}) \simeq A(m,n)$. Необходимо отметить, что централизатор инволюции $\bar{a}$ в Z/D подрастает за счет образа элемента d, однако это не влияет на указанный изоморфизм. Любая максимальная периодическая подгруппа из G, содержащая инволюцию $\bar{a}$, является группой диэдра порядка $2n$ [16]. Поэтому в G нет бесконечных f-локальных подгрупп, содержащих вместе с инволюцией $\bar{a}$ бесконечно много элементов конечного порядка.

Характер расположения элемента a простого порядка в группе G может существенно влиять на строение конечных подгрупп группы G, содержащих элемент a, а иногда и подгруппы $\langle a^G \rangle$ [9]. Мы приведем необходимые для дальнейшего результаты в стиле исследования частного случая теоремы 1. Пусть далее, если не оговорено противное, элемент a бесконечной группы $G = \langle a^G \rangle$ имеет простой порядок и не содержится ни в одной f-локальной подгруппе, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка. В наших дальнейших рассуждениях большую роль играет известная лемма Дицмана [17], которую мы сформулируем в следующем виде.

Предложение 1. *Пусть a — неединичный элемент конечного порядка бесконечной группы G. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *индекс $C_G(a)$ в G конечен;*

2) *класс a^G сопряженных элементов конечен;*

3) *подгруппа $\langle a^G \rangle$ конечна.*

В частности, если G содержит лишь конечное число элементов конечного порядка, то все они составляют в G конечную вполне характеристическую подгруппу.

Из леммы Дицмана следует бесконечность класса a^G. Предположим, что в G имеется бесконечно много конечных подгрупп, содержащих элемент a. В. П. Шунков [3–5] первым обратил внимание на близость почти всех конечных разрешимых подгрупп, содержащих элемент a, к группам Фробениуса. В этом анализе используется техника вееров из [3–5, 10]. *Веером X с основанием T* мы называем произвольное множество X конечных подгрупп группы G с нетривиальным пересечением T. Веер X называется *конечным* или *бесконечным* в зависимости от конечности или бесконечности множества X. Теоретико-множественное объединение $\Sigma(X)$ подгрупп веера X называется его *амальгамой*, а произвольное подмножество $Y \subseteq X$ — *подвеером*. Элемент $a \in T$ называется *ручкой* бесконечного веера X, если для любой подгруппы $V \leq T$ веера X из $a \in N_G(V)$ следует $|N_G(V) \cap \Sigma(X)| < \infty$. Бесконечный веер X с основанием T называется *правильным*, если $T \notin X$ и для любой подгруппы $V \leq T$ такой, что $|N_G(V) \cap \Sigma(X)| < \infty$, имеет место включение $N_G(V) \cap \Sigma(X) \leq T$. Отметим, что впервые некоторые из этих понятий под другими названиями появились в работах [1, 2]. Напомним также, что для конечной группы H через $F(H)$ обозначается ее подгруппа Фиттинга [17]. Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть элемент a группы G имеет простой порядок p и не содержится ни в одной f-локальной подгруппе, включающей бесконечно много элементов конечного порядка, и X — веер всех конечных разрешимых подгрупп из G, содержащих элемент a. Тогда существует разбиение $X = W \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n$ веера X на конечный (или пустой) веер W и конечное число n бесконечных правильных вееров X_i с основаниями T_i, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) X_i состоит из групп вида $H = F(H) \leftthreetimes T_i$, не являющихся группами Фробениуса, $T_i = O_2(T_i)N_H(\langle a\rangle)$, $F(H) \leftthreetimes C_H(a)$ — группа Фробениуса и $p \neq 2$;

2) X_i состоит из квазифробениусовых групп вида $H = F(H) \leftthreetimes T_i$, где $T_1 = N_H(\langle a\rangle)$, $F(H) \leftthreetimes C_H(a)$ — группа Фробениуса и $p \neq 2$;

3) X_i состоит из групп Фробениуса $H = F(H) \leftthreetimes T_i$ с дополнением T_i.

Доказательство. Учитывая определение 1.11 и лемму 2.1 из [10], приходим к выводу, что X — ограниченный веер с ручкой a. Наконец, применяя теорему 3.1 из [10], получаем утверждения леммы. $\square$

Нам понадобится лемма, легко вытекающая из описания конечных групп Фробениуса [18].

Лемма 2. *Если H — неинвариантный множитель разрешимой конечной группы Фробениуса, то ее подгруппа $\Omega_1(H)$, порожденная всеми элементами простых порядков, есть группа одного из типов:*

1) $\Omega_1(H)$ — циклическая группа;

2) $\Omega_1(H) = T \times L$, где T — циклическая $\{2,3\}'$-группа, а $L \simeq SL_2(3)$.

Из лемм 1, 2 следует, что в группе $G = \langle a^G\rangle$ без инволюций почти все конечные подгруппы $L_g = \langle a, a^g\rangle$ для нашего элемента a будут группами Фробениуса с циклическим неинвариантным множителем $\langle a\rangle$. В [6] с целью обобщения результатов из [5] доказан следующий признак непростоты.

Предложение 2. *Пусть G — бесконечная группа, H — ее собственная подгруппа, a — ее элемент простого порядка $p > 2$ и почти для всех элементов a^g, где $g \in G \setminus H$, подгруппа $\langle a, a^g\rangle$ является группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a\rangle$. Тогда либо $|a^G| < \infty$, либо $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a\rangle)$ и $F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — бесконечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a\rangle$.*

Поэтому если в G почти для всех элементов $a^g \in a^G$ подгруппы $L_g = \langle a, a^g\rangle$ конечны, то в силу предложений 1, 2 $G = \langle a^G\rangle$ — бесконечная группа Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$ и ядром F. В [6, 19] доказано следующее свойство таких групп.

Предложение 3. *Пусть $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — бесконечная группа Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$ простого порядка и все подгруппы вида $\langle a, a^g\rangle$ в G конечны. Тогда каждый элемент $f \in F$ содержится в бесконечной локально конечной a-допустимой подгруппе из F.*

Теперь для доказательства теоремы 1 в случае, когда конечные подгруппы $\langle a, a^g\rangle$ не содержат инволюций, достаточно воспользоваться одним результатом А. А. Черепа [20].

Предложение 4. *Пусть $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — бесконечная группа Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$ и почти для всех элементов $a^g \in a^G$ подгруппы $\langle a, a^g\rangle$ конечны. Тогда в G конечны все подгруппы вида $\langle a, a^g\rangle$.*

Из результатов работ В. П. Шункова [8, 9] по группам с инволюциями вытекает

Предложение 5. *Пусть G — бесконечная группа, a — элемент простого порядка $p > 2$ из G, все подгруппы $\langle a, a^g\rangle$ конечны и почти все разрешимы. Тогда либо G обладает конечной периодической частью, либо элемент a принадлежит f-локальной подгруппе, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка.*

Теорема 1 обобщает этот результат, поскольку при ее условиях некоторые из подгрупп $\langle a, a^g\rangle$ потенциально могут быть бесконечными. Отметим, что данное обстоятельство существенно используется в доказательстве теоремы 2. С помощью предложения 5 для групп без инволюций в [7, 10] доказан ослабленный аналог теоремы 2.

Предложение 6. *Пусть G — бесконечная группа без инволюций, a и b — элементы простых порядков из G такие, что почти для всех элементов вида b^g подгруппы $L_g = \langle a, b\rangle$ конечны. Тогда хотя бы один из элементов a, b содержится в бесконечной f-локальной подгруппе.*

Однако для случая, когда все подгруппы $L_g = \langle a, b^g\rangle$ конечны, теорема 2 в классе групп без инволюций доказана в [10] полностью.

Нам понадобятся следующие предложения, которые можно найти в [21].

Предложение 7. *Если группа G конечна над своим центром, т. е. $|G : Z(G)| < \infty$, то G — группа с конечными классами сопряженных элементов.*

Из леммы Дицмана следует

Предложение 8. *Группа с конечными классами сопряженных элементов обладает локально конечной периодической частью.*

2. Доказательство теоремы 1

Предположим, что теорема 1 неверна, и пусть пара (G, a) — контрпример к теореме. Ввиду леммы Дицмана класс a^G бесконечен, по предложению 5 G содержит бесконечную подгруппу $L_g = \langle a, a^g\rangle$, и в силу лемм 1, 2 и предложений 2–4 бесконечно много конечных подгрупп $L_g = \langle a, a^g\rangle$ не являются группами Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$. Уточним строение таких подгрупп L_g.

Лемма 3. *Если подгруппы $L_g = \langle a, a^g\rangle$, не являющиеся группами Фробениуса, составляют бесконечный правильный веер X_i с основанием $T = T_i$, то это веер типа 1 леммы 1, и дополнительно выполняются следующие утверждения:*

1) подгруппы $\langle a\rangle$ и $\langle a^g\rangle$ сопряжены в L_g;

2) $T = S \leftthreetimes \langle a\rangle$, где $S = O_2(T)$, $Z(S) = Z(T) = \langle z\rangle$ и фактор-группа $T/Z(T)$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle aZ(T)\rangle$ и элементарным абелевым ядром;

3) для каждой подгруппы $H = L_g \in X_i$ подгруппа $F(H)$ абелева, инвертируется инволюцией z, $F(H) \leftthreetimes \langle az\rangle$ — группа Фробениуса и $H = F(H) \leftthreetimes T$;

4) для любых элементов $s \in S \setminus \langle z\rangle$ и $c \in F(H)$ выполняются равенства $\langle a, a^{sc}\rangle = \langle a, a^{cs}\rangle = \langle a, s, c\rangle$.

Доказательство. Согласно лемме 1 X_i — бесконечный веер типа 1 или 2. Пусть $H \in X_i$. По утверждению 3 леммы 3.2 из [10] силовские p-подгруппы из H циклические. По теореме Силова подгруппы $\langle a\rangle$ и $\langle a^g\rangle$ сопряжены в H. Утверждение 1 доказано.

Из первого утверждения леммы следует, что в G нет бесконечных вееров X_i типа 2 леммы 2, состоящих из подгрупп L_g. Итак, X_i — веер типа 1 леммы 1, $T_i = T = S \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $S = O_2(T) \neq 1$, $S \not\leq C_T(a)$. По утверждению 4 леммы 3.2 из [10] $Z(S)$ и $Z(T) \cap S$ — циклические группы, содержащие инволюцию z, которая инвертирует $F(H)$, в частности, $F(H)$ — абелева группа. По теореме 1.13 из [17, с. 49] $S = A * B$, где A — экстраспециальная подгруппа (или $A = 1$), а B — циклическая, диэдральная, квазидиэдральная или кватернионная группа. Если S изоморфна группе кватернионов, то это группа кватернионов порядка 8, $T \simeq SL_2(3)$ и все H из X_i являются группами Фробениуса с дополнением T. Нетрудно убедиться, что все утверждения леммы в этом случае верны.

Пусть S не группа кватернионов, тогда $A \neq 1$. Пусть $\overline{S} = S/\langle z \rangle$. Из предложений 1.14, 1.15 в [17, с. 49, 50] следует, что фактор-группы $\overline{A}$, $\Omega_1(Z(\overline{B}))$ содержатся в $\overline{V} = \Omega_1(Z(\overline{S}))$, при этом $|\overline{A}| \geq 4$. Учитывая строение подгруппы B, приходим к выводу, что $W = \overline{S}/\overline{V} \simeq \overline{B}/\Omega_1(Z(\overline{B}))$ либо циклическая группа, либо группа диэдра, либо четверная группа Клейна. Первый и второй случаи невозможны, поскольку группы автоморфизмов циклической и диэдральной 2-групп являются 2-группами и поэтому фактор-группа T/V не может порождаться двумя элементами порядка p. В третьем случае $|a| = 3$, а B изоморфна либо группе диэдра, либо группе кватернионов порядка 16. В этом случае B содержит циклическую подгруппу $\langle x \rangle$ порядка 8 и подгруппа $R = \langle x^2 \rangle$ является характеристической в S, поскольку порождается квадратами всех элементов из S. По теореме Машке $\overline{V} = \overline{R} \times \overline{Y}$ и $\overline{Y}$ нормальна в $\overline{T}$. Но тогда $\overline{S}/\overline{Y}$ — группа диэдра порядка 8 и поэтому $\overline{T}/\overline{Y}$ не может порождаться двумя элементами порядка p. Полученное противоречие означает, что полный прообраз фактор-группы $\overline{V}$ в T совпадает с S, S — группа периода 4, а фактор-группа $\overline{S} = S/\langle z \rangle$ элементарная абелева. Далее, если $S_a = C_S(a)$, то очевидно, что $S_a \triangleleft C_H(a)$, $C_{\overline{S}}(\bar{a}) = \overline{S}_a$. Если $\overline{S}_a \neq 1$, то по теореме Машке $\overline{S} = \overline{S}_a \times \overline{Y}$, где подгруппы $\overline{S}_a$ и $\overline{Y}$ нормальны в $\overline{T}$. Поскольку все элементы порядка p содержатся в $\overline{Y} \leftthreetimes \langle \bar{a} \rangle$, а $\overline{T}$ порождена двумя элементами порядка p, заключаем, что $C_S(a) = S_a = \langle z \rangle$. Утверждения 1–3 леммы доказаны.

Пусть $s \in S$, $1 \neq s \neq z$ и $W = \langle a, a^s \rangle$. Понятно, что $z \in W$, ибо в противном случае $F(H)W$ было бы группой Фробениуса с ядром $F(H)(S \cap W)$ и ввиду теоремы Томпсона выполнялось бы $1 \neq S \cap W \leq C_H(F(H))$, что противоречит свойствам подгруппы Фиттинга [17]. Перейдем к фактор-группе $\overline{W} = W/\langle z \rangle = \langle \bar{a}, \bar{a}^{\bar{s}} \rangle$. Как подгруппа конечной группы Фробениуса $\overline{T} = T/\langle z \rangle$ подгруппа $\overline{W}$ содержит элемент $\bar{s}$, что влечет $W = \langle a, s \rangle$. Пусть $1 \neq c \in F(H)$, $M = \langle a, a^{sc} \rangle$ и $F = F(H) \cap M$. По доказанному выше для фактор-группы $\overline{M} = M/F \simeq F(H)M/F(H)$ имеют место равенства $\overline{M} = \langle \bar{a}, \bar{a}^{\bar{s}} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{s} \rangle$. Отсюда выводим, что $s \in M$ и $v = a^s \in M$. Так как $\langle v, c \rangle$ — группа Фробениуса с циклическим дополнением, то $\langle v, c \rangle = \langle v, v^c \rangle \leq M$ и $M = \langle a, s, c \rangle$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Не ограничивая общности, можно считать, что элемент a почти регулярен в G, т. е. $|C_G(a)| < \infty$.*

Доказательство. Как уже утверждалось, для некоторого элемента a^g подгруппа $L = \langle a, a^g \rangle$ бесконечна. Ввиду леммы Дицмана подгруппа L содержит бесконечно много элементов из a^G и очевидно, что теорему 1 достаточно доказать для группы L. Поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $G = L$. Если $Z(G)$ содержит нееденичный элемент конечного порядка, то уже сама группа G f-локальна, что противоречит предположению. Поэтому центр группы G либо единичен, либо является группой без кручения, при этом

$Z(G) = C_G(a) \cap C_G(a^g)$. Из бесконечности $G = \langle a, a^g \rangle$ следует бесконечность подгрупп вида $L_r = \langle a, b^r \rangle$, где $r \in C_G(a)$. Следовательно, $|C_G(a) : Z(G)| < \infty$. Среди всех контрпримеров к теореме 1 выберем группу G с минимальным значением числа $k = |C_G(a) : Z(G)|$.

Перейдем к фактор-группе $\overline{G} = G/Z(G)$. В $\overline{G}$ подгруппы $\langle \bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}} \rangle$ конечны почти для всех элементов $\bar{a}^{\bar{g}}$ и централизатор элемента $\bar{a}$ конечен. Покажем, что в качестве контрпримера к теореме 1 можно выбрать пару $(\overline{G}, \bar{a})$. Достаточно доказать, что в группе $\overline{G}$ нет f-локальных подгрупп, содержащих вместе с элементом $\bar{a}$ бесконечно много элементов конечного порядка. Допустим, что такая подгруппа $\overline{M}$ в G найдется. Ввиду конечности $C_{\overline{G}}(\bar{a})$ полный прообраз M группы $\overline{M}$ содержит бесконечно много элементов из a^G. Поэтому пара (M, a) — контрпример к теореме 1, в частности, среди подгрупп $L_g = \langle a, a^g \rangle$ $(g \in M)$ найдется хотя бы одна бесконечная и мы можем считать, что уже $M = \langle a, a^g \rangle$.

Пусть $\overline{V}$ — конечная нормальная подгруппа группы $\overline{M}$. Если полный прообраз V подгруппы $\overline{V}$ содержит нееединичный элемент конечного порядка, то по теореме из [21] все элементы конечного порядка в V составляют конечную характеристическую подгруппу K. Тогда $M \cap a^G \subseteq N_G(K)$, что противоречит сделанным предположениям. Следовательно, V — группа без кручения, и снова по теореме из [21] $V \leq C_G(a^g)$ для любого $a^g \in M$. Тогда $|C_M(a) : Z(M)| < k$, что противоречит выбору числа k. Значит, локально конечный радикал $\overline{R}$ группы $\overline{M}$ бесконечен. В этом случае $\overline{K} = \langle \overline{R}, \bar{a} \rangle$ — бесконечная локально конечная группа, и пусть K — ее полный прообраз. В силу регулярности элемента $\bar{a}$ в $\overline{K}$ пересечение $a^G \cap K$ бесконечно и мы можем считать, что K — контрпример к теореме 1. Построим в $\overline{K}$ возрастающую бесконечную цепочку $\overline{V}_1 < \overline{V}_2 < \overline{V}_3 < \dots$ конечных подгрупп, содержащих элемент $\bar{a}$, и соответствующую цепочку их прообразов

$$V_1 < V_2 < V_3 \dots . \tag{1}$$

Все подгруппы V_i цепочки (1) как группы, конечные над своим центром, являются группами с конечными классами сопряженных элементов. В силу теоремы из [21] каждая из подгрупп V_i обладает конечной периодической частью T_i, и цепочке (1) соответствует цепочка конечных подгрупп

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots , \tag{2}$$

содержащих элемент a. Ввиду предположений $T = \bigcup T_i$ — конечная группа, поэтому цепочка (2) стабилизируется на некотором шаге n, т. е. имеют место равенства $T_n = T_{n+1} = \dots$. Как периодическая часть группы $V = \bigcup V_i$ подгруппа T нормальна в V и $|V : C_V(a)| < \infty$, что влечет $|C_{\overline{V}}(\bar{a})| = \infty$, здесь $\overline{V} = V/Z(G)$. Однако это противоречит конечности централизатора $C_{\overline{G}}(\bar{a})$. Полученное противоречие означает, что пара $(\overline{G}, \bar{a})$ есть контрпример к теореме, и лемма доказана. □

Обозначим через N_a множество всех элементов из ядер всех конечных групп Фробениуса группы G, один из неинвариантных множителей которых совпадает с подгруппой $\langle a \rangle$.

Лемма 5. *G — периодическая группа.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и g — элемент бесконечного порядка из G. В силу леммы 4 для любой бесконечной последовательности

$$g_1,\, g_2,\, g_3 \dots \tag{3}$$

различных элементов из подгруппы $\langle g\rangle$ все элементы a^{g_j} различны, поэтому для подходящей последовательности (3) все подгруппы $L_j = \langle a, a^{g_j}\rangle$ конечны и составляют веер Y, содержащийся в веере $X_1 \cup \dots \cup X_n$ из леммы 1. Более того, последовательность (3) можно подобрать так, что веер Y будет содержаться в одном из вееров X_i леммы 1. Допустим, что X_i состоит из групп Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$. Поскольку подгруппы $\langle a\rangle$, $\langle a^{g_j}\rangle$ в L_j сопряжены с помощью некоторого элемента c_j из ядра, для подходящих элементов $r_j \in R = N_G(\langle a\rangle)$ и $c_j \in N_a$ имеют место равенства $g_j = r_j c_j$, $j = 1, 2, \dots$. Ввиду конечности R (лемма 4) последовательность (3) можно выбрать такой, что все элементы r_j, $j = 1, 2, \dots$, равны между собой. Тогда элементы $g_1^{-1} g_j = c_1^{-1} c_j = (ac_1)^{-1}(ac_j)$ имеют бесконечный порядок при всех $j \geq 2$. Поскольку $ac_1, ac_j \in a^G$, среди бесконечной последовательности элементов $ac_2, ac_3, \dots$ имеются элементы ac_j, для которых подгруппы $L_j = \langle ac_1, ac_j\rangle$ конечны и в то же время содержат элементы $g_1^{-1} g_j = c_1^{-1} c_j$ бесконечного порядка; противоречие. Следовательно, веер X_i удовлетворяет условиям леммы 3. В этом случае согласно утверждениям леммы 3 имеют место равенства $g_j = r_j s_j c_j$ ($j = 1, 2, \dots$), где $r_j \in R = N_G(\langle a\rangle)$, $s_j \in S$, $c_j \in N_a$, $j = 1, 2, \dots$. Ввиду конечности R (лемма 4) и определения подгруппы S (лемма 3) множество RS конечно и последовательность (3) можно выбрать такой, что опять все элементы $r_j s_j$, $j = 1, 2, \dots$, равны фиксированному элементу t. Как и выше, элементы $g_1^{-1} g_j = (tc_1)^{-1}(tc_j) = c_1^{-1} c_j = (ac_1)^{-1}(ac_j)$ имеют бесконечный порядок при всех $j \geq 2$, что снова приводит к противоречию. Следовательно, G — периодическая группа. Лемма доказана. □

Лемма 5 завершает доказательство теоремы 1. Действительно, ввиду леммы 3 в G есть инволюция z, перестановочная с элементом $a \in C_G(z)$. Поскольку пара (G, a) — контрпример и по лемме 5 G — периодическая группа, то подгруппа $C_G(z)$ конечна. Но тогда по известной теореме Шункова о периодических группах с почти регулярной инволюцией [22] группа G локально конечна, что противоречит предположениям. Следовательно, контрпримера к теореме 1 не существует.

3. Строение подгрупп $L_g = \langle a, b^g\rangle$ в контрпримере к теореме 2

Пусть тройка (G, a, b) — контрпример к теореме 2, $|a| = p$, $|b| = q$. Уточним строение подгрупп вида $L_g = \langle a, b^g\rangle$.

Лемма 6. *Если подгруппы $L_g = \langle a, b^g\rangle$, не являющиеся группами Фробениуса, составляют бесконечный правильный веер Y с основанием T, то это веер типа 1 леммы 1 и дополнительно выполняются следующие утверждения:*

1) *справедливы неравенства $2 \neq p \neq q \neq 2$;*

2) *подгруппа T содержит элемент t из $b^G \cap C_G(a)$, $Z(T) = \langle z\rangle$ — циклическая группа порядка 2 и $C_T(a) = \langle atz\rangle$ — циклическая группа порядка $2pq$;*

3) *$T = S \rtimes \langle at\rangle$, где $S = O_2(T)$, $Z(S) = \langle z\rangle$ и фактор-группа $T/Z(T)$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle atZ(T)\rangle$ и элементарным абелевым ядром;*

4) *для каждой подгруппы $H = L_g \in X_i$ подгруппа $F(H)$ абелева, инвертируется инволюцией z, $F(H) \rtimes \langle atz\rangle$ — группа Фробениуса и $H = F(H) \rtimes T$;*

5) *для любого нецентрального элемента $s \in S$ и любого неединичного элемента $r \in \langle at\rangle$ выполняются включение $z \in V$ и равенство $V = \langle r, r^s\rangle = \langle r, s\rangle$;*

6) *для любого нецентрального элемента $s \in S$ и любых неединичных элементов $r \in \langle at\rangle$ и $c \in F(H)$ выполняются равенства $\langle r, r^{sc}\rangle = \langle r, r^{cs}\rangle = \langle r, s, c\rangle$.*

Доказательство. Согласно лемме 1 $|a| = p > 2$ и $Y \subseteq X_i$, где X_i — бесконечный веер типа 1 или 2 из леммы 1. Очевидно, что $b^g \notin F(H)$ для любой подгруппы $H \in X_i$ и основание T_i веера X_i содержит некоторый элемент $t \in b^G$ (не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что $t = b$). Ввиду условий теоремы b — ручка веера X_i, в частности, по теореме 3.1 из [10] b действует регулярно на $F(H)$ и ввиду утверждения 5 леммы 3.2 в [10] $|b| = q > 2$. По утверждению леммы 3.2 в [10] силовские p-подгруппы и q-подгруппы из H циклические. Если $q = p$, то подгруппы $\langle a\rangle$ и $\langle b\rangle$ сопряжены в H и ввиду теоремы 1 G не контрпример к теореме 2. Значит, $q \neq p$. Учитывая теоремы Силова, можно считать, что $b \in N_H(\langle a\rangle)$, а по известной теореме Бернсайда [18] $ab = ba$. Следовательно, в G нет бесконечных вееров X_i типа 2, состоящих из подгрупп L_g. Итак, X_i — веер типа 1 леммы 1, $T_i = T = S \leftthreetimes \langle ab\rangle$, где $S = O_2(T) \neq 1$, $S \not\leq C_T(a)$. По утверждению 4 леммы 3.2 в [10] $Z(S)$ и $Z(T) \cap S$ — циклические группы, содержащие инволюцию z, которая инвертирует $F(H)$, в частности, $F(H)$ — абелева группа.

Коснемся строения подгруппы S. По теореме 1.13 из [17, с. 49] $S = A * B$, где A — экстраспециальная подгруппа (или $A = 1$), а B — циклическая, диэдральная, квазидиэдральная или кватернионная группа. Изоморфизм $S \simeq Q_8$ невозможен, поскольку в этом случае H обязана быть группой Фробениуса с неинвариантным множителем, содержащим подгруппу $SL_2(3)$, который ввиду леммы 2 не может порождаться элементом порядка p и q. Так как группа внешних автоморфизмов группы $B \not\simeq Q_8$ не содержит элементов нечетного порядка, то $A \neq 1$. Из предложений 1.14, 1.15 в [17, с. 49, 50] следует, что фактор-группы $\overline{A}$, $\Omega_1(Z(\overline{B}))$ содержатся в $\overline{V} = \Omega_1(Z(\overline{S}))$, при этом $|\overline{A}| \geq 4$. Очевидно, что $W = \overline{S}/\overline{V} \simeq \overline{B}/\Omega_1(Z(\overline{B}))$ либо группа диэдра, либо абелева ранга 2, поэтому хотя бы один из элементов $\bar{a}\overline{V}$, $\bar{b}\overline{V}$ централизует W. Но в этом случае фактор-группа $\overline{T}/\overline{V}$ не может порождаться двумя элементами порядков p и q. Следовательно, полный прообраз фактор-группы $\overline{V}$ в T совпадает с S. Значит, S — группа периода 4, а фактор-группа $\overline{S} = S/\langle z\rangle$ элементарная абелева. Далее, если $S_a = C_S(a)$, то очевидно, что $S_a \lhd C_H(a)$, $C_{\overline{S}}(\bar{a}) = \overline{S}_a$. Если и $\overline{S}_a \neq 1$, то по теореме Машке $\overline{S} = \overline{S}_a \times \overline{Y}$, где подгруппы $\overline{S}_a$ и $\overline{Y}$ нормальны в $\overline{T}$. Поскольку $\overline{T}$ порождена двумя элементами порядков p и q, заключаем, что S_a — группа кватернионов порядка 8, b — элемент порядка 3 и группа $\overline{S}_a \leftthreetimes \langle\bar{b}\rangle$ изоморфна знакопеременной группе степени 4. При этом $\overline{T} = \langle\bar{a}, \bar{y}\bar{s}\bar{b}\rangle$, где $y \in \overline{Y}$, $s \in \overline{S}_a$. Однако данная ситуация также невозможна, поскольку $\bar{s}\bar{b} \in C_{\overline{S}}(\bar{a})$ и $\bar{y}\bar{s}\bar{b} \in Y \leftthreetimes \langle\bar{s}\bar{b}\bar{a}\rangle \neq \overline{T}$. Следовательно, $C_S(a) = S_a = \langle z\rangle$, и ввиду симметричности рассматриваемого случая относительно элементов a и b аналогично имеем $C_S(b) = \langle z\rangle$. Таким образом, $T = S \leftthreetimes \langle ab\rangle$, $C_T(a) = C_T(b) = \langle abz\rangle$ — циклическая группа порядка $2pq$, и ввиду леммы 1 утверждения 1–4 верны.

Пусть $s \in S$, $1 \neq s \neq z$, $1 \neq r \in \langle at\rangle$ и $V = \langle r, r^s\rangle$. Понятно, что $z \in V$, поскольку в противном случае $F(H)V$ было бы группой Фробениуса с ядром $F(H)(S \cap V)$ четного порядка и ввиду теоремы Томпсона выполнялось бы $1 \neq S \cap V \leq C_H(F(H))$, что противоречит свойствам подгруппы Фиттинга [17]. Перейдем к фактор-группе $\overline{V} = V/\langle z\rangle = \langle\bar{r}, \bar{r}^{\bar{s}}\rangle$. Как подгруппа конечной группы Фробениуса $\overline{T} = T/\langle z\rangle$ подгруппа $\overline{V}$ содержит элемент $\bar{s}$, что влечет $V = \langle r, s\rangle$. Пусть, дополнительно, $1 \neq c \in F(H)$, $M = \langle r, r^{sc}\rangle$ и $F = F(H) \cap M$. Ввиду доказанного выше для фактор-группы $\overline{M} = F(H)M/F(H)$ имеют место равенства $\overline{M} = \langle\bar{r}, \bar{r}^{\bar{s}}\rangle = \langle\bar{r}, \bar{s}\rangle$. Отсюда выводим, что $s \in M$ и $v = r^s \in M$. Так как $\langle v, c\rangle$ — группа Фробениуса с циклическим дополнением, то $\langle v, c\rangle = \langle v, v^c\rangle \leq M$

и $M = \langle r, s, c\rangle$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. *Не ограничивая общности, можно считать, что в G выполняется (b, a)-условие конечности, т. е. почти для всех элементов $a^g \in a^G$ подгруппы $\langle a^g, b\rangle$ конечны.*

Доказательство. Если для всех элементов $b^g \in b^G$ подгруппы $\langle a, b^g\rangle$ конечны, то для всех элементов $a^g \in a^G$ подгруппы $\langle a^g, b\rangle$ конечны и лемма верна. Пусть для некоторого элемента $x = b^g$ подгруппа $L = \langle a, x\rangle$ бесконечна. Тогда ввиду леммы Дицмана [17] подгруппа L содержит бесконечно много элементов из a^G и b^G. Очевидно, что теорему 2 достаточно доказать для группы L, поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $G = L$. Если $Z(G)$ содержит неединичный элемент конечного порядка, то уже сама группа G f-локальна, что противоречит сделанному выше предположению. Поэтому центр $Z(G) = C_G(a) \cap C_G(x)$ группы G либо единичен, либо является группой без кручения. Из бесконечности $G = \langle a, x\rangle$ следует бесконечность подгрупп вида $L_r = \langle a, x^r\rangle$, где $r \in C_G(a)$. Отсюда и из (a, b)-условия конечности заключаем, что $|C_G(a) : Z(G)| < \infty$.

Перейдем к фактор-группе $\overline{G} = G/Z(G)$. Тогда для ее элементов $\bar{a}$, $\bar{b}$ имеет место $(\bar{a}, \bar{b})$-условие конечности, при этом в $\overline{G}$ централизатор элемента $\bar{a}$ конечен. Далее, если подгруппа $\overline{M}_{\bar{g}} = \langle \bar{a}^{\bar{g}}, \bar{b}\rangle$ в $\overline{G}$ конечна, то ее полный прообраз M в G по предложению 7 является группой с конечными классами сопряженных элементов, а в силу предложения 8 M обладает конечной периодической частью. Поэтому каждая подгруппа вида $M_g = \langle a^g, b\rangle$ из M конечна. Также доказывается, что в полном прообразе A циклической подгруппы $\langle \bar{a}^{\bar{g}}\rangle$ есть только одна циклическая подгруппа вида $\langle a^g\rangle$, при этом $A = \langle a^g\rangle \times Z(G)$. Аналогично полный прообраз циклической подгруппы $\langle \bar{b}\rangle$ является прямым произведением $\langle b\rangle \times Z(G)$. Поэтому каждой бесконечной подгруппе $M_{\bar{t}} = \langle \bar{a}^{\bar{t}}, \bar{b}\rangle$ в G соответствует в точности одна бесконечная подгруппа вида $M_t = \langle a^t, b\rangle$.

Ввиду утверждения 2 леммы 6 можно считать, что $ab = ba$. Если $\overline{B} = C_{\overline{G}}(\bar{b})$ — бесконечная группа, то пересечение $\overline{B} \cap \bar{a}^{\overline{G}}$ бесконечно и полный прообраз B подгруппы $\overline{B}$ в G содержит бесконечно много элементов из a^G. По доказанному выше $B \leq N_G(\langle b\rangle)$, что противоречит выбору группы G. Следовательно, подгруппа $C_{\overline{G}}(\bar{b})$ конечна, т. е. элемент $\bar{b}$ почти регулярен в $\overline{G}$. Допустим, что $(\bar{b}, \bar{a})$-условие конечности в фактор-группе $\overline{G}$ не выполняется. Тогда существует бесконечное множество $\overline{T}$ элементов $\bar{t} \in \overline{G}$, для которых подгруппы $M_{\bar{t}} = \langle \bar{a}^{\bar{t}}, \bar{b}\rangle$ бесконечны. Но тогда и все подгруппы $L_{\bar{t}^{-1}} = \bar{t} M_{\bar{t}} \bar{t}^{-1}$ бесконечны. Каждая из подгрупп $L_{\bar{t}^{-1}}$ порождается элементами $\bar{a}$ и $\bar{t}\bar{b}\bar{t}^{-1}$. Ввиду конечности централизатора $\bar{b}$ в $\overline{G}$ и бесконечности множества $\overline{T}$ заключаем, что элементов вида $\bar{t}\bar{b}\bar{t}^{-1}$, где $\bar{t} \in \overline{T}$, бесконечно много. Однако это противоречит $(\bar{a}, \bar{b})$-условию конечности. Следовательно, в фактор-группе $\overline{G}$ $(\bar{b}, \bar{a})$-условие конечности обязано выполняться. Отсюда выводим, что в G также выполняется (b, a)-условие конечности. Лемма доказана. $\square$

В силу леммы 7 элементы a и b участвуют в условиях теоремы симметрично. В дальнейшем будем предполагать, что $p = |a| < |b| = q$. Согласно леммам 1, 6 G содержит бесконечные правильные вееры фробениусовых групп $L_g = \langle a, b^g\rangle$.

Лемма 8. *Если X_i — бесконечный правильный веер с основанием T_i, состоящий из групп Фробениуса $L_g = \langle a, b^g\rangle$, то T_i — циклическая группа порядка pq. В частности, когда $p = 2$, почти все подгруппы L_g в G суть группы Фробе-*

ниуса с циклическим дополнением порядка $2q$.

Доказательство. Лемма легко следует из разрешимости подгрупп L_g и лемм 1, 2. $\square$

4. Метод обособленных ядер Фробениуса

Для произвольного элемента $x \in G$ через N_x будем обозначать множество всех элементов из ядер конечных фробениусовых подгрупп группы G, дополнением Фробениуса в которых является подгруппа $\langle x \rangle$. Из лемм 1, 6, 7 следует, что множества N_a, N_b и $N = N_a \cap N_b$ бесконечны. Согласно сделанным предположениям каждая конечная a-допустимая подгруппа $F_0 \subset N_a$ содержится в конечной максимальной подгруппе $F \subset N_a$. Рассмотрим веер X_a всех максимальных фробениусовых подгрупп вида $F \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $F \subset N_a$.

Лемма 9. *Существует разбиение $X_a = W \cup Y_a$ веера X_a на конечный (или пустой) веер W и правильный веер Y_a, ядро каждой подгруппы которого пересекает ядро любой другой подгруппы веера X_a по единице. В частности, если $H = F \leftthreetimes \langle a \rangle \in Y_a$, $x \in N_G(\langle a \rangle)$ и $F \cap F^x \neq 1$, то $x \in N_G(F)$.*

Доказательство. Если только конечное число фробениусовых подгрупп веера X_a имеют нетривиальные попарные пересечения ядер, то, включив их в веер W, мы тем самым докажем лемму. Допустим теперь, что подгрупп из X_a с нетривиальными пересечениями ядер бесконечно много. Выберем пары подгрупп $H, M \in X_a$ с неединичными пересечениями $F(H) \cap F(M) = F(H, M)$ так, что хотя бы для одной из подгрупп данное пересечение было максимально возможное. Понятно, что таких пар бесконечно много. Заметим, что ввиду леммы 1 веер X_a разбивается на конечное число правильных вееров и поэтому соответствующих выбранным парам пересечений $F(H, M)$ также бесконечно много. Ясно, что в нормализаторе $N_G(F(H, M))$ содержатся элемент a и подгруппы $F_H = N_{F(H)}(F(H, M))$, $F_M = N_{F(M)}(F(H, M))$, которые ввиду нормализаторного условия в нильпотентных группах $F(H)$, $F(M)$ отличны от $F(H, M)$. По условиям теоремы $N_G(F(H, M))$ обладает конечной периодической частью с разрешимым радикалом $V(H, M)$, который содержит F_H, F_M и элемент a. Все такие подгруппы $V(H, M)$ обладают нетривиальной подгруппой Фиттинга и, очевидно, составляют бесконечный веер Y с основанием, содержащим элемент a. Учитывая лемму 1, получаем разбиение $Y = Y_0 \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ веера Y на конечный или пустой веер Y_0 и конечное число правильных вееров Y_i типов 1–3 леммы 1. Из описания свойств подгрупп таких вееров (лемма 1) легко следует, что F_H и F_M содержатся в подгруппе Фиттинга $F(V)$ группы $V(H, M) \in Y_i$. Очевидно, что $F(V) \subset N_a$ и $F(V)$ содержится в ядре $F(K)$ подходящей подгруппы $K \in X_a$. Тогда пересечения $F(K) \cap F(H)$ и $F(K) \cap F(M)$ собственно содержат пересечение $F(H) \cap F(M)$, что противоречит выбору пары $H, M \in X_a$. Полученное противоречие означает, что подгрупп из X_a с нетривиальными пересечениями ядер конечное число и тем самым разбиение $X_a = W \cup Y_a$ с указанными свойствами существует. Второе утверждение — очевидное следствие «обособленности» ядер подгрупп из Y_a в N_a. Лемма доказана. $\square$

Лемма 10. *Имеет место неравенство $|N_b \setminus N_a| < \infty$.*

Доказательство. По определению множества N_b каждый элемент вида bc, где $c \in N_b$, сопряжен с элементом b. Ввиду (a, b)-условия конечности в группе G и лемм 1, 6 только для конечного числа элементов $c \in N_b$ подгруппы

$$L^+ = \langle a, bc \rangle, \quad L^- = \langle a, b^{-1}c \rangle$$

не являются либо группами Фробениуса с циклическим дополнением порядка $2q$, либо группами вида $F \leftthreetimes (S \leftthreetimes \langle at\rangle)$, описанными в лемме 6. Без ограничения общности мы можем считать, что N_b уже не содержит таких элементов c. При условии данного соглашения подгруппы $\langle a\rangle$ и $\langle a^c\rangle$ сопряжены в L^+ и L^- с помощью некоторого элемента sc_a, где $1 \neq c_a \in N_a \cap L^+ \cap L^-$ и либо $s = 1$, либо $s \in S$. Отсюда $c = rsc_a$, где $r \in N_G(\langle a\rangle)$. Заметим здесь, что для элемента s имеется конечное число возможностей, поскольку $\langle z\rangle = Z(S) \leq C_G(a)$, число таких инволюций z конечно и для каждой из них $C_G(z)$ обладает конечной периодической частью.

Пусть X_a — веер всех максимальных фробениусовых подгрупп с ядрами из множества N_a и дополнением $\langle a\rangle$, а Y_a — веер из леммы 9. Ввиду леммы 9 амальгама $\Sigma(Y_a)$ веера Y_a может не содержать только конечного множества элементов из N_a. Учитывая также конечное число возможностей для элемента s, приходим к выводу, что почти для каждого элемента $c = rsc_a \in N_b$ элемент c_a принадлежит $\Sigma(Y_a)$. Пусть H — подгруппа из Y_a, содержащая элемент c_a. Из свойств веера Y_a следует, что ядра подгрупп L^+ и L^- содержатся в ядре F группы H и $bcc_a^{-1} = brs$, $b^{-1}cc_a^{-1} = b^{-1}rs \in N_G(H)$. Поскольку $|b| = q > 2$, то $\langle b\rangle = \langle b^2\rangle \leq N_G(H)$ и, значит, $c \in N_G(H)$. В силу бесконечности множества N_b в веере Y_a найдется бесконечный подвеер Y_1, состоящий из таких подгрупп $H \in Y$, что множество N_b, за исключением, быть может, конечного числа элементов, содержится в нормализаторах подгрупп $H \in Y_1$, причем элемент b принадлежит нормализатору каждой подгруппы H из Y_1. Поскольку $a \in N_G(H)$, то $N_G(H)$ обладает конечной периодической частью M_H.

Рассмотрим веер W, состоящий из периодических частей M_H подгрупп $N_G(H)$, где $H \in Y_1$. Веер W бесконечен, и его основание D содержит как элемент a, так и элемент b, при этом a и b являются ручками веера W. Применяя лемму 1 и используя максимальность подгруппы $H \in Y_a$, получаем, что $F(M_H) = F$ почти для всех подгрупп $M_H \in W$, при этом $F(M_H) \subset N_b \cap N_a$. Так как с $\in M_H$, то $c \in F$ и $c \in N_a$. Это означает, что $|N_b \setminus N_a| < \infty$. Лемма доказана. $\square$

На бесконечных подмножествах группы G введем отношение $\sim$: $X \sim Y$ в том и только том случае, если $|X \setminus Y|, |Y \setminus X| < \infty$. Очевидно, что $\sim$ — отношение эквивалентности.

Лемма 11. *Имеет место отношение $N_b \sim N_a$.*

Доказательство. Ввиду леммы 7 элементы a и b входят в условие теоремы симметрично. Для случая $p \neq 2$ имеем $\langle a^2\rangle = \langle a\rangle$ (равенство $\langle b^2\rangle = \langle b\rangle$ использовалось в доказательстве леммы 10). Поэтому аналогично $|N_a \setminus N_b| < \infty$ и $N_b \sim N_a$.

Случай $p = 2$ нуждается в отдельном рассмотрении. Так как a — инволюция, множество N_a состоит в точности из элементов нечетного порядка, инвертируемых инволюцией a, и единицы группы. Пусть $c \in N_a$, тогда $ca \in a^G$. По лемме 8 почти все подгруппы $L_c = \langle ac, b\rangle$, где $c \in N_a$, суть группы Фробениуса с циклическим дополнением порядка $2q$. Поскольку $\langle b\rangle$ и $\langle b^c\rangle$ сопряжены в L с помощью некоторого элемента $c_b \in N_b$, то $c = rc_b$, где $r \in N_G(\langle b\rangle)$.

Пусть X_b — множество всех максимальных конечных подгрупп из G, являющихся группами Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle b\rangle$. Применяя доказанное неравенство $|N_b \setminus N_a| < \infty$ и лемму 9, получаем разбиение $X_b = V \cup Y_b$, где V — конечный или пустой веер, веер Y_b бесконечен и ядро любой подгруппы $H \in Y_и$ пересекается тривиально с ядром каждой отличной от H подгруппы из X_b.

Поскольку пересечение $C_G(a) \cap C_G(b)$ имеет конечный индекс в $C_G(b)$ и в $C_G(a)$, а пересечение $N_b \cap rN_b$ пусто для любого неединичного элемента $r \in N_G(\langle b \rangle)$, только для конечного числа элементов $c = rc_b \in N_b$ элементы c_b не содержатся в амальгаме веера Y_b. Поэтому без ограничения общности можно считать, что уже все элементы вида c_b содержатся в подгруппах из Y_b. Пусть H — подгруппа из Y_b, содержащая элемент c_b. Из свойств веера Y следует, что ядро группы L содержится в ядре F группы H и $ar \in N_G(H) \leq N_G(F)$. Вследствие доказанного выше неравенства $|N_b \setminus N_a| < \infty$ можно считать, что a инвертирует F. Но тогда $r \in N_G(F)$ и $c = rc_b \in N_G(F)$.

В силу бесконечности множества N_a в веере Y_b найдется бесконечный подвеер Y_1, состоящий из таких подгрупп H, что множество N_a, за исключением, быть может, конечного числа элементов, содержится в нормализаторах подгрупп $H \in Y_1$, причем элемент a принадлежит $N_G(H)$ каждой подгруппы H из Y_1. В силу сделанных предположений и леммы Дицмана каждая подгруппа $N_G(H)$ обладает конечной периодической частью M_H. Ввиду бесконечности N_a веер W, состоящий из подгрупп M_H, где $H \in Y_1$, бесконечен. Основание D данного веера содержит как элемент a, так и элемент b, и с учетом леммы 1 почти все подгруппы M_H веера W являются группами Фробениуса, дополнениями в которых служат централизаторы инволюции a. Используя максимальность подгруппы $H \in X_a$, получаем, что $F(M_H) = F(H)$ и $F(H) \subset N_b$ почти для всех подгрупп $M_H \in W$. Поскольку с $\in M_H$ и $c^a = c^{-1}$, то $c \in F(H)$ и $c \in N_b$. Следовательно, $|N_a \setminus N_b| < \infty$, и ввиду леммы 10 $N_a \sim N_b$. Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Лемма 12. *Пусть B — подгруппа из $C_G(a)$, порожденная множеством $b^G \cap C_G(a)$. Тогда либо $B = \langle b \rangle$, либо $p = 2$, $q = 3$, $B \simeq SL_2(3)$ и $a \in B$.*

Доказательство. Пусть $\langle b_1 \rangle, \dots, \langle b_m \rangle$ — все различные сопряженные с $\langle b \rangle$ подгруппы из $C_G(a)$. Поскольку $C_G(a)$ обладает конечной периодической частью, то m — конечное число и $B = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ — конечная подгруппа.

Ввиду леммы 11 имеем

$$N_a \sim N_{b_1} \sim \dots \sim N_{b_m},$$

и если $N = N_a \cap N_{b_1} \cap \dots \cap N_{b_m}$, то $N \sim N_a$ и множество $N_a \setminus N$ конечно.

По лемме 9 почти все элементы из N содержатся в ядрах подгрупп веера Y_a. Пусть c — произвольный элемент из N и H_c — подгруппа из Y_a, содержащая элемент c. По свойствам конечных групп Фробениуса элемент c содержится в подгруппе $L_c = \langle a, b_i c \rangle$, при этом $c \in N_{ab_i}$, L_c — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle ab_i \rangle$ и ядром F_c, содержащим элемент c, $i = 1, \dots, m$. Ввиду леммы 9 $b_i \in N_G(H_c)$, $i = 1, \dots, m$, и, следовательно, $N_G(H_c)$ содержит подгруппу $B = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$. В силу предположений каждая из подгрупп $N_G(H_c)$ обладает конечной периодической частью M_c. Поскольку множество $N \cap \Sigma(Y_a)$ бесконечно, веер V всех указанных подгрупп M_c бесконечен, а его основание содержит подгруппу $C = \langle a, B \rangle \leq C_G(a)$.

По лемме 1 почти для всех $M_c \in V$ их подгруппы Фиттинга F_c порождают с подгруппой C разрешимую группу Фробениуса с неинвариантным множителем C. Так как по сделанному ранее предположению $p < q$, по лемме 2 либо C — циклическая группа порядка pq, либо $p = 2$, $q = 3$, $C \simeq SL_2(3)$ и $B = C$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 13. *Почти для всех элементов $b^g \in b^G$ контрпримера G подгруппы $\langle b, b^g \rangle$ конечны.*

Доказательство. На основании леммы 1 заключаем, что почти все элементы класса b^G содержатся в амальгаме веера $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$. Пусть амальгама веера X_i содержит бесконечно много элементов из b^G. Поскольку элементы подгрупп Фиттинга $F(H)$ групп $H \in X_i$ содержатся в N_a, в силу леммы 11 элементы из $b^G \cap \Sigma(X_i)$ не принадлежат подгруппам Фиттинга $F(H)$. Если веер X_i состоит из групп Фробениуса, порядок дополнения которых делится на q, то по лемме 12 либо подгруппа C, порожденная элементом a и множеством $b^G \cap C_G(a)$, циклическая порядка pq, либо $p = 2$, $q = 3$ и C изоморфна $SL_2(3)$. Допустим, $C = \langle ab \rangle$ — циклическая группа. Тогда в силу леммы 2 основание веера X_i содержит подгруппу C. Отсюда следует, что для любого элемента b^g из $b^G \cap \Sigma(X_i)$ подгруппа $\langle b, b^g \rangle$ конечна. Пусть веер X_i состоит не из групп Фробениуса. По утверждению 2 леммы 6 каждая из конечных подгрупп $L_g = \langle a, b^g \rangle$, составляющих правильный веер X_i, содержит в основании элемент из $b^G \cap C_G(a)$, которым может быть только элемент из C. Следовательно, $b \in L_g$, и подгруппа $\langle b, b^g \rangle$ конечна. Таким образом, при $C = \langle ab \rangle$ лемма верна.

Пусть подгруппа C изоморфна $SL_2(3)$. Тогда $p = 2$, $q = 3$ и ввиду лемм 1, 2 почти все группы $L_g = \langle a, b^g \rangle$ суть группы Фробениуса с неинвариантными множителями либо C, либо $\langle at \rangle$, где $t \in b^G \cap C$. Выше доказано, что почти все элементы класса b^G содержатся в подгруппах веера $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = W$ и в рассматриваемом случае этот веер состоит из групп Фробениуса (лемма 1). По лемме 8 почти для всех элементов $b^g \in b^G$ подгруппы $L_g = \langle a, b^g \rangle$ — группы Фробениуса с циклическим дополнением порядка 6, содержащим элемент a. Эти дополнения исчерпываются четырьмя подгруппами порядка 6 $\langle ab_1 \rangle$, $\langle ab_2 \rangle$, $\langle ab_3 \rangle$, $\langle ab_4 \rangle$ из C. Ввиду лемм 1, 6 веер W конечных групп Фробениуса L_g распадается на конечный веер W_0 и четыре правильных веера W_i, $i = 1, 2, 3, 4$, при этом амальгама веера $W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4$ почти полностью содержит класс b^G. По лемме 12 $N_a \sim N_b$ и согласно лемме 9 почти все элементы из N_a содержатся в ядрах групп веера Y_a. С учетом второй части утверждения леммы 9 приходим к выводу, что подгруппа C содержится в нормализаторе ядра $F(H)$ почти каждой подгруппы $H \in Y_a$. Составим веер V всех конечных групп Фробениуса вида $F(H) \leftthreetimes C$, $H \in Y_a$. Из вышедоказанного следует, что амальгама $\Sigma(V)$ веера V почти полностью содержит амальгамы вееров W_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Отсюда заключаем, что класс b^G почти полностью содержится в $\Sigma(V)$. Поскольку каждая из подгрупп $M \in V$ конечна и содержит элемент b, почти для всех элементов $b^g \in b^G$ подгруппы $\langle b, b^g \rangle$ конечны. Лемма доказана. $\square$

Мы пришли к противоречию, поскольку по лемме 13 и теореме 1 элемент b содержится в бесконечной f-локальной подгруппе, содержащей элемент b. Полученное противоречие означает, что контрпримера к теореме 2 нет, тем самым теорема 2 верна.

6. Доказательство теоремы 3

Первая часть альтернативы теоремы вытекает непосредственно из леммы Дицмана. Пусть теперь множество элементов конечного порядка в группе G бесконечно. Ввиду условий теоремы в G найдется пара элементов простых порядков a, b с $|a| \cdot |b| > 4$, для которых выполняется (a, b)-условие конечности, и по теореме 2 в G есть f-локальная подгруппа G_1, содержащая бесконечно много элементов конечного порядка. Если локально конечный радикал F_1 группы G_1

бесконечен, то следствие доказано. В противном случае по условиям теоремы сечение $\overline{G}_1 = G_1/F_1$ содержит обобщенно конечные элементы и все ее конечные подгруппы разрешимы. Снова ввиду теоремы в $\overline{G}_1$ найдется f-локальная подгруппа $\overline{G}_2$, содержащая бесконечно много элементов конечного порядка. Если ее локально конечный радикал $\overline{F}_2$ бесконечен, то по теореме Шмидта его полный прообраз F_2 в G является бесконечной локально конечной подгруппой, что доказывает следствие. Если же $\overline{F}_2$ конечен, то конечна и подгруппа F_2 полного прообраза G_2 сечения $\overline{G}_2$, причем сечение G_2/F_2 содержит бесконечно много элементов конечного порядка и, значит, обобщенно конечный элемент простого порядка > 2, а ввиду теоремы 2 и f-локальную подгруппу $\overline{G}_3$, в которой множество элементов конечного порядка бесконечно. Продолжая этот процесс, мы либо на некотором конечном шаге n получим искомую бесконечную локально конечную подгруппу F_n, либо построим бесконечный возрастающий ряд $F_1 < F_2 < F_3 < \dots$ конечных подгрупп, объединение F которого локально конечно. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Струнков Н. П.* Подгруппы периодических групп // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170, № 2. С. 279–281.
2. *Струнков Н. П.* Нормализаторы и абелевы подгруппы некоторых классов групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 3. С. 657–670.
3. *Шунков В. П.* Об абелевых подгруппах в бипримитивно конечных группах // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 5. С. 603–614.
4. *Шунков В. П.* О бесконечных централизаторах в группах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 2. С. 224–226.
5. *Шунков В. П.* О достаточных признаках существования в группе бесконечных локально конечных подгрупп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 716–737.
6. *Созутов А. И., Шунков В. П.* О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 6. С. 711–735.
7. *Созутов А. И.* О существовании в группе бесконечных подгрупп с нетривиальным локально конечным радикалом. Красноярск, 1980. 9 с. (Препринт ВЦ СО АН).
8. *Шунков В. П.* Теоремы вложения для групп с инволюциями и характеризация черниковских групп // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 1. С. 100–121.
9. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: ВО Наука, 1992.
10. *Созутов А. И.* О существовании в группе f-локальных подгрупп // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 573–598.
11. *Созутов А. И., Янченко М. В.* Об одном признаке существования в группе f-локальных подгрупп // Тез. докл. V Международ. конф. «Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения». Тула, 19–20 мая 2003 г. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2003. С. 208–210.
12. *Созутов А. И., Янченко М. В.* О признаках существования в группе f-локальных подгрупп // Тез. докл. Международ. конф. по математике и механике. Томск, 16–18 сентября 2003 г. Томск: Изд-во ТГУ, 2003. С. 55–56.
13. *Коуровская тетрадь*: Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 15-е. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2002.
14. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
15. *Сенашов В. И., Шунков В. П., Яковлева Е. Н.* Группы с конечной периодической частью // Тез. докл. Международ. конф. «Алгебра и ее приложения». Красноярск, 2002. С. 105–106.
16. *Шунков В. П.* T_0-группы. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000.
17. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.
18. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
19. *Созутов А. И., Шлепкин А. К.* О группах с нормальной компонентой расщепления // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 897–914.

20. *Череп А. А.* О бесконечных группах Фробениуса. Деп. в ВИНИТИ 11.03.91, № 1014-В-91. 16 с.

21. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978.

22. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.

Статья поступила 1 декабря 2004 г.

Созутов Анатолий Ильич, Янченко Михаил Васильевич
Красноярская гос. архитектурно-строительная академия,
пр. Свободный, 82, Красноярск 660041
sozutov_ai@mail.ru, chm@gasa.krs.ru