Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 512.27

О ПОДПОЛУРЕШЕТКАХ ФОРМУЛЬНЫХ И ОТКРЫТО ФОРМУЛЬНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ РЕШЕТКИ ВСЕХ КОНГРУЭНЦИЙ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ

А. Г. Пинус

Аннотация: Доказаны некоторые теоремы представления для решеток и их нижних подполурешеток в виде решеток конгруэнций и подполурешеток формульных конгруэнций универсальных алгебр.

Ключевые слова: решетки конгруэнций универсальных алгебр, формульные конгруэнции, открыто формульные конгруэнции.

Известна роль производных структур: групп автоморфизмов, решеток подалгебр, решеток конгруэнций и др., в вопросах строения универсальных алгебр. При изучении универсальных алгебр методами теории моделей принципиально важным является выяснение того, какие элементы из этих производных структур выразимы теми или иными формулами языка логики первого порядка. Подобные вопросы, связанные с формульными (в том или ином смысле) автоморфизмами и подалгебрами, рассматривались, например, в работах [1–3]. Ряд работ (см., например, [4–6]) связан с многообразиями универсальных алгебр, все главные конгруэнции на которых определимы элементарными формулами, $\exists$-формулами либо тождествами. Большую роль формульные конгруэнции играют в элементарной классификации булевых алгебр [7] и абелевых групп [8].

Конгруэнцию θ универсальной алгебры $\mathscr{A}$ назовем *формульной*, если существует формула $\phi(x,y)$ языка логики первого порядка сигнатуры алгебры $\mathscr{A}$ такая, что отношения $\langle x,y\rangle \in \theta$ и $\mathscr{A} \models \phi(x,y)$ эквивалентны. Очевидно, что формульными для любой алгебры $\mathscr{A}$ являются тривиальные на $\mathscr{A}$ конгруэнции $\triangle_{\mathscr{A}}$ и $\bigtriangledown_{\mathscr{A}}$ (отношение равенства и универсальное отношение соответственно). С другой стороны, очевидно, что для любых формульных конгруэнций θ_1, θ_2 алгебры $\mathscr{A}$ конгруэнция $\theta_1 \wedge \theta_2$ также будет формульной на $\mathscr{A}$. Таким образом, совокупность формульных конгруэнций любой алгебры $\mathscr{A}$ образует нижнюю $\{0,1\}$-подполурешетку решетки $\operatorname{Con}\mathscr{A}$ всех конгруэнций алгебры $\mathscr{A}$. Обозначим эту *нижнюю* $\{0,1\}$*-подполурешетку формульных конгруэнции алгебры* $\mathscr{A}$ через $\operatorname{F}\operatorname{Con}\mathscr{A}$.

Конгруэнцию θ универсальной алгебры $\mathscr{A}$ назовем *открыто-формульной*, если существует бескванторная формула $\phi(x,y)$ узкого исчисления предикатов

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00258).

сигнатуры алгебры $\mathscr{A}$ такая, что отношения $\langle x, y\rangle \in \theta$ и $\mathscr{A} \models \phi(x, y)$ эквивалентны. *Нижнюю* $\{0,1\}$*-подполурешетку решетки* $\operatorname{Con}\mathscr{A}$ *открыто-формульных конгруэнций алгебры* $\mathscr{A}$ обозначим через $\operatorname{OF}\operatorname{Con}\mathscr{A}$.

Таким образом, имеют место включения

$$\operatorname{OF}\operatorname{Con}\mathscr{A} \subseteq \operatorname{F}\operatorname{Con}\mathscr{A} \subseteq \operatorname{Con}\mathscr{A}.$$

Пусть L^0 — решетка, получаемая из решетки L добавлением внешнего нуля, т. е. одного нового элемента, меньшего любого элемента из L. Заметим, что если $\operatorname{Con}\mathscr{A} \cong L^0$ и сама решетка L обладает наименьшим элементом, то алгебра $\mathscr{A}$ является подпрямо неразложимой.

Представляют интерес следующие вопросы:

1) для каких алгебраических решеток L и их нижних $\{0,1\}$-подполурешеток L_0 существуют универсальная алгебра $\mathscr{A}$ и изоморфизм φ решетки L на решетку $\operatorname{Con}\mathscr{A}$ такие, что $\varphi(L_0) = \operatorname{F}\operatorname{Con}\mathscr{A}$;

2) для каких алгебраических решеток L и их нижних $\{0,1\}$-подполурешеток L_1 существуют универсальная алгебра $\mathscr{A}$ и изоморфизм φ решетки L на решетку $\operatorname{Con}\mathscr{A}$ такие, что $\varphi(L_1) = \operatorname{OF}\operatorname{Con}\mathscr{A}$.

Результаты настоящей работы касаются подпрямо неразложимых алгебр $\mathscr{A}$. На вопрос 1 ответ дан в вырожденном случае, когда $L_0 = \{0,1\}$, на вопрос 2 — в полном объеме.

Теорема 1. *Для любой алгебраической решетки L существует универсальная подпрямо неразложимая алгебра $\mathscr{A}$ такая, что* $\operatorname{Con}\mathscr{A} \cong L^0$ *и* $\operatorname{F}\operatorname{Con}\mathscr{A} = \{\triangle_{\mathscr{A}}, \triangledown_{\mathscr{A}}\}$.

Доказательство. Как хорошо известно (теорема Гретцера — Шмидта, см., например, [9, 10]), для любой алгебраической решетки L существует алгебра $\mathscr{A}_0 = \langle A_0; \sigma\rangle$, сигнатура σ которой содержит лишь одноместные операции, такая, что $\operatorname{Con}\mathscr{A}_0 \cong L$. Итак, достаточно построить алгебру $\mathscr{A}$ такую, что $\operatorname{Con}\mathscr{A} \cong (\operatorname{Con}\mathscr{A}_0)^0$ и $\operatorname{F}\operatorname{Con}\mathscr{A} = \{\triangle_{\mathscr{A}}, \triangledown_{\mathscr{A}}\}$.

Пусть $\{A_n \mid n \in Z\}$ — семейство попарно не пересекающихся и равномощных множеству A_0 множеств и $\mathscr{A}_n$ — изоморфные алгебре $\mathscr{A}_0$ алгебры с носителями A_n соответственно. Пусть φ_n — некоторый фиксированный изоморфизм алгебры $\mathscr{A}_n$ на алгебру $\mathscr{A}_{n+1}$. Пусть $A = \dot{\bigcup\limits_{n\in Z}} A_n$. На множестве A_n определим операции f_n, g_n $(n \in Z)$ следующим образом:

$$f_n(a) = \begin{cases} \varphi_n(a), & \text{если } a \in A_n, \\ a & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g_n(a) = \begin{cases} \varphi_n^{-1}(a), & \text{если } a \in A_{n+1}, \\ a & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для любого символа $h \in \sigma$ и любого $n \in Z$ определим на A операцию $p_{h,n}$:

$$p_{h,n}(a) = \begin{cases} h(a), & \text{если } a \in A_0 \text{ и } n = 0, \\ \varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\cdots\varphi_0 h \varphi_0^{-1}\varphi_1^{-1}\cdots\varphi_{n-1}^{-1}(a), & \text{если } a \in A_n \text{ и } n > 0, \\ \varphi_n^{-1}\varphi_{n-1}^{-1}\cdots\varphi_1^{-1} h \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n(a), & \text{если } a \in A_n \text{ и } n < 0, \\ a & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В силу определения операций $p_{h,n}$ отображение φ_n является изоморфизмом алгебры $\mathscr{A}'_n = \langle A_n; p_{h,n} \mid h \in \sigma\rangle$ на алгебру $\mathscr{A}'_{n+1} = \langle A_{n+1}; p_{h,n+1} \mid h \in \sigma\rangle$ при отождествлении символов $p_{h,n}$ и $p_{h,n+1}$.

Наконец, определим на A операцию $r(a,b)$:

$$r(a,b) = \begin{cases} \varphi_0(a), & \text{если } a \in A_0 \text{ и } a \neq b, \\ a & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим алгебру $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A} = \langle A; f_n, g_n, p_{h,n}, r \mid n \in Z, h \in \sigma \rangle.$$

Отображение $\pi : A \to A_0$ определим следующим образом:

$$\pi(a) = \begin{cases} \varphi_0^{-1}\varphi_1^{-1}\cdots\varphi_{n-1}^{-1}(a), & \text{если } a \in A_n \text{ и } n > 0, \\ \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n(a), & \text{если } a \in A_n \text{ и } n < 0, \\ a & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим отношение μ на A так, что для любых $a, b \in A$

$$\mu(a,b) \Leftrightarrow \pi(a) = \pi(b).$$

Непосредственно проверяется, что $\mu \in \operatorname{Con}\mathscr{A}$.

Покажем, что $\operatorname{Con}\mathscr{A} \cong (\operatorname{Con}\mathscr{A}_0)^0$. Для любой конгруэнции θ алгебры $\mathscr{A}_0$ через θ' обозначим конгруэнцию алгебры $\mathscr{A}$, порожденную отношением θ. Для любого отношения Q на множестве A через $Q \restriction A_n$ обозначим ограничение Q на множестве A_n. Для доказательства изоморфизма решеток $\operatorname{Con}\mathscr{A}$ и $(\operatorname{Con}\mathscr{A}_0)^0$ достаточно доказать, что

(1) для любой $\theta \in \operatorname{Con}\mathscr{A}_0 \setminus \{\triangle_{\mathscr{A}_0}\}$ и любых $a, b \in A$

$$\langle a, b \rangle \in \theta' \Leftrightarrow \langle \pi(a), \pi(b) \rangle \in \theta,$$

(2) для любой $\theta \in \operatorname{Con}\mathscr{A}$ равенство $\theta \restriction A_0 = \triangle_{\mathscr{A}_0}$ влечет одно из равенств $\theta = \triangle_{\mathscr{A}}$, $\theta = \mu$.

Пусть $a, b \in A_0$, $a \neq b$ и $\langle a, b \rangle \in \theta$, где $\theta \in \operatorname{Con}\mathscr{A}_0$. Так как $r(a,a) = a$ и $r(a,b) = \varphi_0(a)$, имеет место $\langle a, \varphi_0(a) \rangle \in \theta'$. Но тогда имеет место и включение $\langle a, \varphi_1\varphi_0(a) \rangle \in \theta'$, ибо $f_1(a) = a$ и $f_1(\varphi_0(a)) = \varphi_1\varphi_0(a)$. Аналогичные рассуждения доказывают, что для любых $c, d \in A$ таких, что $\pi(c) = a$, $\pi(d) = b$, будет иметь место включение $\langle c, d \rangle \in \theta'$. Таким образом, для доказательства утверждения (1) достаточно доказать, что для любых $a, b \in A$ из включения $\langle a, b \rangle \in \theta'$ следует включение $\langle \pi(a), \pi(b) \rangle \in \theta'$. Так как θ' есть расширение конгруэнции θ на алгебру $\mathscr{A}$, по известной лемме Мальцева о строении конгруэнции, порожденной некоторой совокупностью пар элементов алгебры, для некоторого натурального m найдутся термы $p_1(x, \bar{y}_1), \dots, p_m(x, \bar{y}_m)$, элементы $\bar{c}_i \in A$ и пары $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ из θ такие, что

(3) $a = p_1(a_1, \bar{c}_1)$, $p_1(b_1, \bar{c}_1) = p_2(a_2, \bar{c}_2), \dots, p_m(b_m, \bar{c}_m) = b$.

Для любого терма $t(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры алгебры $\mathscr{A}$ через $t'(x_i)$ обозначим терм сигнатуры σ, полученный из t следующим образом: элиминируем из t все символы f_n, g_m, символы $p_{h,n}$, где $n \in Z$, $h \in \sigma$, заменим на символ h и, наконец, вхождения в t термов вида $r(t_1, t_2)$ заменим на термы t_1. Для любых термов $t_1(x_1, \dots, x_n)$, $t_2(x_1, \dots, x_m)$ сигнатуры алгебры $\mathscr{A}$ и любых элементов $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ из A непосредственно, индукцией по максимуму длин термов t_1 и t_2, проверяется, что равенство

$$t_1(a_1, \dots, a_n) = t_2(b_1, \dots, b_m)$$

влечет равенство $t_1'(\pi(a_i)) = t_2'(\pi(b_i))$.

Тем самым в силу (3) найдутся пары $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ из θ такие, что

$$\pi(a) = t_1'(\pi(a_1)) = t_1'(a_1), t_1'(a_1) = t_1'(\pi(a_1)) = t_2'(\pi(b_2)) \\ = t_2'(b_2), \dots, t_m'(b_m) = t_m'(\pi(b_m)) = \pi(b),$$

т. е. действительно для любых $a, b \in A$ из включения $\langle a, b\rangle \in \theta'$ вытекает включение $\langle \pi(a), \pi(b)\rangle \in \theta$, и утверждение (1) доказано.

Из утверждения (1) следует равенство $(\triangle_{\mathscr{A}_0})' = \mu$, что и доказывает утверждение (2). Тем самым отображение $\theta \to \theta'$ является изоморфизмом решетки $\mathrm{Con}\,\mathscr{A}_0$ на интервал $[\mu, \bigtriangledown_{\mathscr{A}}]$ решетки $\mathrm{Con}\,\mathscr{A}$, где μ — наименьшая отличная от $\triangle_{\mathscr{A}}$ конгруэнция алгебры $\mathscr{A}$. Таким образом, решетки $\mathrm{Con}\,\mathscr{A}$ и $(\mathrm{Con}\,\mathscr{A}_0)^0$ действительно изоморфны, и алгебра $\mathscr{A}$ подпрямо неразрешима.

Докажем теперь, что $\mathrm{F\,Con}\,\mathscr{A} = \{\triangle_{\mathscr{A}}, \bigtriangledown_{\mathscr{A}}\}$. Пусть формула $\phi(x, y)$ логики первого порядка сигнатуры алгебры $\mathscr{A}$ определяет на $\mathscr{A}$ некоторую конгруэнцию θ. Покажем, что в этом случае либо $\theta = \triangle_{\mathscr{A}}$, либо $\theta = \bigtriangledown_{\mathscr{A}}$. В силу конечности сигнатуры формулы ϕ найдется интервал $[-n, n]$ такой, что натуральные индексы всех символов f_m, g_m, $p_{h,m}$, входящих в формулу ϕ, лежат в этом интервале. По определению сигнатурных функций алгебры $\mathscr{A}$ все термальные функции, символы которых входят в формулу ϕ, являются тривиальными на множестве A_{n+2}. Тем самым любая биекция множества A_{n+2} самого на себя, тождественным образом продолженная до биекции множества A на A, будет автоморфизмом обеднения алгебры $\mathscr{A}$ до сигнатуры формулы ϕ. Таким образом, либо $\theta \restriction A_{n+2} = \bigtriangledown_{A_{n+2}}$, либо $\theta \restriction A_{n+2} = \triangle_{A_{n+2}}$. Отсюда в силу утверждений (1) и (2) либо $\theta = \triangle_{\mathscr{A}}$, либо $\theta = \bigtriangledown_{\mathscr{A}}$, либо $\theta = \mu$.

Используя отмеченную выше ограниченность натуральных индексов сигнатурных операций, входящих в формулу ϕ, интервалом $[-n, n]$, также нетрудно заметить, что отношение μ не является формульным на алгебре $\mathscr{A}$. Тем самым $\mathrm{F\,Con}\,\mathscr{A} = \{\triangle_{\mathscr{A}}, \bigtriangledown_{\mathscr{A}}\}$, и утверждение теоремы доказано.

Результат остается верным, если рассматривать определимость конгруэнций формулами исчисления предикатов с параметрами из алгебры $\mathscr{A}$.

Теорема 2. *Для любой алгебраической решетки L и любой нижней $\{0, 1\}$-подполурешетки L_0 решетки L^0 существуют универсальная подпрямо неразложимая алгебра $\mathscr{A}$ и изоморфизм φ решетки L^0 на решетку $\mathrm{Con}\,\mathscr{A}$ такие, что $\varphi(L_0) = \mathrm{OF\,Con}\,\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра, построенная в ходе доказательства теоремы 1. При этом для построения исходной в этом доказательстве алгебры $\mathscr{A}_0$ такой, что $\mathrm{Con}\,\mathscr{A}_0 \cong L$, будем использовать конструкцию Пудлака [10]. Как явно следует из этой конструкции и описания строения конгруэнций алгебры $\mathscr{A}_0$, для $\mathrm{Con}\,\mathscr{A}_0$ выполнены следующие условия:

(4) для любой $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathscr{A}_0$ алгебра $\mathscr{A}_0/\theta$ бесконечна,

(5) для любых конгруэнций $\theta, \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathrm{Con}\,\mathscr{A}_0$, если для бесконечного числа θ-классов на алгебре $\mathscr{A}_0$ эти классы совпадают с некоторой фиксированной булевой комбинацией $\theta_1, \dots, \theta_n$-классов, то θ совпадает с пересечением некоторых конгруэнций из $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Непосредственно проверяется, что и $\mathrm{Con}\,\mathscr{A}$ в этом случае обладает свойствами (4), (5). Действительно, свойства (4), (5) для $\mathrm{Con}\,\mathscr{A}$ вытекают из утверждений (1), (2) в доказательстве теоремы 1, описывающих взаимосвязь конгруэнций алгебр $\mathscr{A}_0$ и $\mathscr{A}$. Кроме того, как замечено выше, алгебра $\mathscr{A}$ является подпрямо неразложимой, т. е. обладает монолитом — наименьшей отличной от $\triangle_{\mathscr{A}}$ конгруэнцией (конгруэнцией μ). Таким образом, в $\mathscr{A}$ существует пара неравных элементов a_0, b_0 (например, элементы $a_0 \in \mathscr{A}_0$ и $f_0(a_0)$ в обозначениях доказательства теоремы 1) таких, что для любой $\theta \in \operatorname{Con} \mathscr{A} \setminus \{\triangle_{\mathscr{A}}\}$ имеет место включение $\langle a_0, b_0 \rangle \in \theta$.

Переобозначим эту алгебру $\mathscr{A}$ через $\mathscr{B}_0$ и применим к алгебре $\mathscr{B}_0$ в качестве алгебры $\mathscr{A}_0$ конструкцию из доказательства теоремы 1. Полученную таким образом алгебру обозначим через $\mathscr{B} = \langle B; \sigma_1 \rangle$ (аналог алгебры $\mathscr{A}$ по отношению к алгебре $\mathscr{A}_0$ при сохранении для сигнатуры σ_1 алгебры $\mathscr{B}$ обозначений сигнатуры алгебры $\mathscr{A} = \mathscr{B}_0$). Из доказательства теоремы 1 следует равенство

$$\operatorname{Con} \mathscr{B} = (\operatorname{Con} \mathscr{B}_0)^0 = ((\operatorname{Con} \mathscr{A}_0)^0)^0 \cong ((L)^0)^0.$$

Будем далее считать, что $\operatorname{Con} \mathscr{B} = ((L)^0)^0$. Кроме того, существуют неравные элементы $a_0, b_0 \in \mathscr{B}_0$ такие, что для любой $\theta \in \operatorname{Con} \mathscr{B}_0 \setminus \{\triangle_{\mathscr{B}_0}\}$ имеет место включение $\langle a_0, b_0 \rangle \in \theta$ и, как замечено выше, для алгебры $\mathscr{B}$ имеют место условия (4), (5).

Для любой $\theta \in L_0$ будем считать, что основное множество B_θ фактор-алгебры $\mathscr{B}/\theta$ дизъюнктно с основным множеством B алгебры $\mathscr{B}$, а для различных $\theta_1, \theta_2 \in L$ и сами множества $B_{\theta_1}, B_{\theta_2}$ не пересекаются. Пусть φ_θ для $\theta \in L_0$ есть некоторый фиксированный гомоморфизм алгебры $\mathscr{B}$ на алгебру $\mathscr{B}/\theta$. На множестве $B' = B \mathbin{\dot{\bigcup}} \dot{\bigcup}_{\theta \in L_0} B_\theta$ определим алгебру $\mathscr{B}'$ сигнатуры

$$\sigma' = \langle \sigma_1, k_{\theta_0}, d, l \mid \theta_0 \in L_0 \rangle,$$

где σ_1 — сигнатура алгебры $\mathscr{B}$, следующим образом.

Одноместные операции сигнатуры σ_1 на B' совпадают с соответствующими операциями алгебр $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}/\theta$. Для $a, b \in B'$ точно так же определяется значение $r(a, b)$ в случае, когда $a, b \in B$, либо $a, b \in B_\theta$ для некоторого $\theta \in L_0$, и $r(a, b) = a$ в остальных случаях.

Для любой $\theta_0 \in L_0$ и любого $a \in B'$

$$k_{\theta_0}(a) = \begin{cases} \varphi_{\theta_0}(a), & \text{если } a \in B, \\ a & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Трехместную операцию $d \in \sigma'$ определим как дискриминатор на множестве

$$C = \dot{\bigcup_{\theta \in L_0}} B_\theta \cup \{b \in B \mid \pi(b) = a_0 \text{ или } \pi(b) = b_0\}.$$

Если хотя бы один из элементов a, b, c не входит в C, то полагаем $d(a, b, c) = a_0$. Напомним, что операция $d(x, y, z)$ является дискриминатором на множестве C, если для любых $a, b, c \in C$

$$d(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } a = b, \\ a & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Напомним также, что конгруэнция, порожденная парой a_0, b_0 на алгебре $\mathscr{B}$, является монолитом алгебры $\mathscr{B}$.

Наконец, одноместную операцию e на множестве B определим следующим образом:

$$e(a) = \begin{cases} a_0, & \text{если } a = a_0, \\ b_0, & \text{если } a = f_0(a_0), \\ a & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Прежде всего докажем, что решетки $\operatorname{Con}\mathscr{B}'$ и $(L)^0$ изоморфны. Для любой конгруэнции θ алгебры $\mathscr{B}$, отличной от $\triangle_{\mathscr{B}}$ и μ, через $\bar{\theta}$ обозначим следующее отношение эквивалентности на множестве B': для a_0 класс $\bar{\theta}$-эквивалентности есть объединение множества D с θ-классом элемента a_0 в алгебре $\mathscr{B}$, для элементов $a \in B \setminus [a_0]_{\bar{\theta}}$ их $\bar{\theta}$-классы суть θ-классы этих элементов в алгебре $\mathscr{B}$. Без труда проверяется, что отношение $\bar{\theta}$ является конгруэнцией алгебры $\mathscr{B}'$. Очевидно также, что ограничение любой конгруэнции Q алгебры $\mathscr{B}'$ до множества B является конгруэнцией алгебры $\mathscr{B}$. С другой стороны, если это ограничение $Q \restriction B$ отлично от $\triangle_{\mathscr{B}}$, то $\mu \leq Q \restriction B$ и тогда имеют место включения $\langle a_0, f_0(a_0)\rangle, \langle a_0, b_0\rangle \in Q$, так как $a_0 = e(a_0)$ и $b_0 = e(f_0(a_0))$. В силу вхождения в сигнатуру σ' функции d, являющейся дискриминатором на множестве C, все элементы множества C Q-эквивалентны между собой. Тем самым отображение $\beta\colon \operatorname{Con}\mathscr{B} \to \operatorname{Con}\mathscr{B}'$, определенное как

$$\beta(\theta) = \begin{cases} \bar{\theta}, & \text{если } \theta \neq \triangle_{\mathscr{B}}, \mu, \\ \bar{\theta}^{\mathscr{B}}_{a_0,b_0}, & \text{если } \theta = \mu \text{ или } \theta = \theta^{\mathscr{B}}_{a_0,b_0}, \\ \triangle_{\mathscr{B}} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

является гомоморфизмом решетки $\operatorname{Con}\mathscr{B}$ на решетку $\operatorname{Con}\mathscr{B}'$, который взаимно однозначен на множестве $\operatorname{Con}\mathscr{B} \setminus \{\mu, \theta^{\mathscr{B}}_{a_0,b_0}\}$. Здесь $\theta^{\mathscr{B}}_{a_0,b_0}$ — главная конгруэнция алгебры $\mathscr{B}$, порожденная парой a_0, b_0.

Таким образом, действительно, $\operatorname{Con}\mathscr{B}' \cong (L)^0$.

Итак, для доказательства утверждения теоремы 2 достаточно доказать, что открыто-формульные конгруэнции алгебры $\mathscr{B}'$ суть конгруэнции вида $\beta(\theta)$, где $\theta \in L_0$. Очевидно, что конгруэнции $\beta(\triangle_{\mathscr{B}}) = \triangle_{\mathscr{B}'}$ и $\beta(\bigtriangledown_{\mathscr{B}}) = \overline{\bigtriangledown}_{\mathscr{B}} = \bigtriangledown_{\mathscr{B}'}$ открыто-формульны. Конгруэнция $\beta(\theta)$, где $\theta \in L_0 \setminus \{\triangle_{\mathscr{A}}, \bigtriangledown_{\mathscr{A}}\}$, очевидным образом определяется бескванторной формулой

$$\begin{aligned} \phi_\theta(x,y) = [&\neg d(x,x,x) = x \mathbin{\&} \neg\, d(y,y,y) = y \mathbin{\&} k_\theta(x) = k_\theta(y) \\ &\vee d(x,x,x) = x \mathbin{\&} d(y,y,y) = y \ \vee\ \neg\, d(x,x,x) = x \mathbin{\&} d(y,y,y) = y \\ &\mathbin{\&} k_\theta(x) = k_\theta(d(x,x,x)) \vee \neg\, d(y,y,y) = y \mathbin{\&} d(x,x,x) = x \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbin{\&} k_\theta(y) = k_\theta(d(y,y,y)). \end{aligned}$$

Покажем, что других открыто-формульных конгруэнций, кроме конгруэнций вида $\beta(\theta)$, где $\theta \in L_0$, на алгебре $\mathscr{B}'$ нет. Итак, пусть бескванторная формула $\phi(x,y)$ языка логики первого порядка сигнатуры σ' определяет некоторую конгруэнцию алгебры $\mathscr{B}'$. Через σ_2 обозначим сигнатуру

$$\langle \sigma_1 \setminus \{r\}, k_{\theta_0}, P, c_1, c_2 \mid \theta_0 \in L_0\rangle,$$

где P — одноместный предикат, а c_1, c_2 — константы. Через $\mathscr{B}^2$ обозначим алгебраическую систему сигнатуры σ_2, определенную на множестве B' следующим образом: все операции, входящие в $\sigma_1 \setminus \{r\}$, и операции k_{θ_0} $(\theta_0 \in L_0)$ определены на $\mathscr{B}'$ и $\mathscr{B}^2$ идентичным образом, одноместный предикат P выделяет в $\mathscr{B}^2$ множество C, а константы c_1 и c_2 интерпретируются в $\mathscr{B}^2$ элементами a_0 и b_0 соответственно. Без труда, исходя из определения предиката P, констант c_1, c_2 и операций r, d на множестве B', проверяется, что открыто-формульные отношения на множестве B' для алгебры $\mathscr{B}'$ и алгебраической системы $\mathscr{B}^2$ суть одни и те же. Таким образом, можно считать, что формула $\phi(x,y)$ — это формула сигнатуры σ_2. В силу этого все термы, входящие в формулу ϕ, — это термы унарной сигнатуры $\langle f_n, g_n, p_{h,n}, k_{\theta_0}, e, c_1, c_2 \mid n \in Z,\ h \in \sigma,\ \theta_0 \in L_0\rangle$. Пусть m —

натуральное число такое, что индексы всех операций вида f_n, g_n, $p_{h,n}$, входящих в формулу ϕ, лежат в интервале $[-m, m]$. Тогда для элементов $a \in B_{m+2}$ справедливы равенства $f_n(a) = g_n(a) = p_{h,n}(a) = e(a) = a$ для всех операций f_n, g_n, $p_{h,n}$, входящих в формулу $\phi(x, y)$. Кроме того, на алгебраической системе $\mathscr{B}^2$ для элементов a из B_{m+2} истинны равенства

$$k_{\theta_1}(k_{\theta_0}(a)) = k_{\theta_0}(a)$$

для любых $\theta_0, \theta_1 \in L_0$.

Все атомные подформулы формулы $\phi(x, y)$ вида $z_1 = k_{\theta_1}(z_2)$, $k_{\theta_1}(z_1) = k_{\theta_2}(z_2)$, $z_1 = t(c_i)$, $k_{\theta_1}(z_1) = t_1(c_i)$, где $z_1, z_2 \in \{x, y\}$ и z_1, z_2 пробегают множество $B_{m+2}, \theta_1, \theta_2 \in L_0$ и $\theta_1 \neq \theta_2$, t — терм сигнатуры σ_2, t_1 — терм сигнатуры σ_2, не начинающийся с символа k_{θ_0}, тождественно ложны для $x, y \in B_{m+2}$.

Атомные подформулы вида $P(k_{\theta_1}(z_1))$, когда z_1 — переменная x или y, пробегающая множество $B_{m+2}, \theta_1 \in L_0$, тождественно истинны, а формулы вида $P(t(c_i))$ либо истинны, либо ложны. Элиминируя исходя из этого соответствующие подформулы формулы $\phi(x, y)$, можно считать, что, когда переменные x, y формулы $\phi(x, y)$ пробегают множество B_{m+2}, эта формула эквивалентна формуле, построенной из атомных подформул вида

(6) $k_\theta(x) = k_\theta(y)$, $P(x)$, $P(y)$, $k_\theta(x) = b$, $k_\theta(y) = b$,

где $\theta \in L_0$ и b — некоторые фиксированные элементы из множества B_θ (значения некоторых термов вида $k_\theta(t(c_i))$). Заметим также, что предикат P истинен лишь на двух элементах из множества B_{m+2}.

Пусть θ — конгруэнция алгебры $\mathscr{B}'$, определяемая формулой $\phi(x, y)$, и $\theta_1, \dots, \theta_n \in L_0$ — индексы функций k_θ, входящих в формулу $\phi(x, y)$. В силу того, что, как замечено выше, все атомные подформулы формулы ϕ при рассмотрении ее на множестве B_{m+2} имеют вид (6), а по свойству (4) алгебра $\mathscr{B}/\theta$ бесконечна, для бесконечного числа θ-классов (исключая θ-классы, связанные с истинностью для их элементов атомных подформул вида $P(x)$, $P(y)$, $k_{\theta_i}(x) = b$, $k_{\theta_i}(y) = b$) эти θ-классы являются фиксированной булевой комбинацией $\beta(\theta_1)$-, $\dots, \beta(\theta_n)$-классов (соответствующих подформулам вида $k_{\theta_i}(x) = k_{\theta_i}(y)$). По свойству (5) эти θ-классы являются пересечением некоторых из $\beta(\theta_1)$-$,\dots, \beta(\theta_n)$-классов. Но конъюнкции вида

$$k_{\theta_i}(x) = k_{\theta_i}(y) \ \& \ k_{\theta_j}(x) = k_{\theta_j}(y)$$

эквивалентны равенствам

$$k_{\theta_i \wedge \theta_j}(x) = k_{\theta_i \wedge \theta_j}(y).$$

Тем самым на множестве B_{m+2} бесконечное число θ-классов, определяемых формулой $\phi(x, y)$, совпадает с $\beta(\theta')$-классами для некоторой $\theta' \in L_0$, а значит, и сама конгруэнция θ совпадает с конгруэнцией $\beta(\theta')$, т. е. равенство $\mathrm{OF\,Con}\,\mathscr{L}' = \beta(L_0)$ доказано.

В заключение хочу выразить признательность рецензенту за многочисленные замечания, способствовавшие улучшению изложения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grant I.* Automorphisms definable by formulas // Pacific J. Math. 1973. V. 44, N 1. P. 107–115.
2. *Пинус А. Г.* О собственных автоморфизмах универсальных алгебр // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 6, № 45. С. 1329–1337.

3. *Пинус А. Г.* О полурешетках формульных подалгебр // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 4. С. 474–482.
4. *Blok W. J., Pigozzi D.* On the structure of varieties with equationally definable principal congruences // Algebra Univ. 1982. V. 15, N 2. P. 195–227.
5. *Frid E., Gratzer G., Quackenbush R.* Uniform congruence schemes // Algebra Univ. 1980. V. 10, N 2. P. 176–189.
6. *Kohler P., Pigozzi D.* Varieties with equational definable principal congruences // Algebra Univ. 1980. V. 11, N 2. P. 213–219.
7. *Ершов Ю. Л.* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.
8. *Szmielev W.* Elementary properties of Abelian groups // Fund. Math. 1955. V. 41, N 2. P. 203–271.
9. *Gratzer G.* Universal algebra. Berlin: Springer-Verl., 1979.
10. *Pudlak P.* A new proof of the congruence lattice representation theorem // Algebra Univ. 1976. V. 2, N 6. P. 269–275.

Статья поступила 23 декабря 2004 г., окончательный вариант — 1 марта 2006 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru