Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 514.172.45+514.752.435+519.173

КОРОТКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЖЕСТКОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

И. М. Пак

Аннотация: Дано существенно упрощенное доказательство теоремы Дена о жесткости выпуклых многогранников. Подход основан на идеях В. И. Трушкиной [1] и Шрамма [2].

Ключевые слова: выпуклый многогранник, инфинитезимальная жесткость, теорема Дена.

Введение. Пусть $P \subset \mathbb{R}^3$ — симплициальный выпуклый многогранник. Определим *непрерывную деформацию* $\{P_t : t \in [0,1]\}$ многогранника $P = P_0$ как семейство выпуклых многогранников, имеющих одинаковое комбинаторное строение и одинаковые длины соответствующих ребер, такое, что вершины многогранников этого семейства задаются непрерывными вектор-функциями параметра t. Многогранник называем *неизгибаемым*, если всякая его непрерывная деформация порождается семейством движений в $\mathbb{R}^3$. Классическое следствие из теоремы Коши утверждает, что всякий симплициальный многогранник P является неизгибаемым (см. ниже). В этой статье мы даем простое доказательство теоремы Дена, которая также влечет неизгибаемость выпуклых многогранников.

Пусть O — фиксированная точка (начало) и $\boldsymbol{v}_i(t) = \overrightarrow{Ov_i}$ — радиус-вектор вершины v_i многогранника P_t. Будем представлять себе векторы $\boldsymbol{v}_i'(t)$ как *скорости* вершин v_i. Для того чтобы длина ребра $|v_iv_j|$ была постоянна при деформации, должно выполняться равенство $\|\boldsymbol{v}_i(t) - \boldsymbol{v}_j(t)\|' = 0$, где $\|\boldsymbol{w}\| = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = |\boldsymbol{w}|^2$. Поэтому, в частности, при $t = 0$ имеем

$$0 = \frac{d}{dt}\|\boldsymbol{v}_i(t) - \boldsymbol{v}_j(t)\|_{t=0} = \frac{d}{dt}\|(\boldsymbol{v}_i(0) - \boldsymbol{v}_j(0)) + t(\boldsymbol{v}_i'(0) - \boldsymbol{v}_j'(0))\|_{t=0}$$
$$= (\boldsymbol{v}_i(0) - \boldsymbol{v}_j(0), \boldsymbol{v}_i'(0) - \boldsymbol{v}_j'(0)).$$

Это приводит к следующему определению жесткости (или инфинитезимальной жесткости) многогранника.

Пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и E — множества вершин и ребер многогранника P. Будем предполагать, что вершины v_1, v_2 и v_3 образуют треугольную грань многогранника P, и называть их *базовыми вершинами*, а грань $(v_1v_2v_3)$ — *базовым треугольником*. Предположим, что для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ задан вектор $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^3$. Говорят, что набор векторов $\{\boldsymbol{a}_i, 1 \le i \le n\}$ задает *бесконечно малое изгибание* многогранника P, если для всех $(v_i, v_j) \in E$

$$(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_j) = 0. \qquad (*)$$

Мы называем бесконечно малое изгибание *закрепленным*, если векторы скорости всех базовых вершин равны нулю: $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$. Наконец, мы называем симплициальный многогранник P *жестким* (или *инфинитезимально жестким*), если каждое его закрепленное бесконечно малое изгибание является тривиальным: $\boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема (М. Ден). *Каждый симплициальный выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$ является жестким.*

Безусловно, ограничение только закрепленными бесконечно малыми изгибаниями является необходимым, поскольку обычные движения многогранника P в $\mathbb{R}^3$ могут порождать нетривиальные бесконечно малые изгибания. Приведенные выше рассуждения показывают, что из жесткости вытекает неизгибаемость, а именно справедливо

Следствие (О. Коши). *Каждый симплициальный выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$ является неизгибаемым.*

В этой статье мы даем новое доказательство теоремы Дена, основанное на идеях В. И. Трушкиной [1] (см. также ее последующую статью [3]). К сожалению, технические детали в статье [1] несколько трудны для понимания. Мы заменяем используемое В. И. Трушкиной понятие *инверсии* аналогичным понятием, введенным (для других целей) Шраммом [2]. Следует отметить, что перенести идеи работы [2] на исследования жесткости многогранников нам помог обзор [4] (см. § 4.6).

Еще раз повторим, что неизгибаемость выпуклых многогранников вытекает из классической теоремы Коши [4–6]. М. Ден установил свою теорему в [7] на языке *статики* (науки о равновесии механических систем). Теорема Дена играет фундаментальную роль в современных исследованиях жесткости каркасов и невыпуклых многогранников [4, 8]. Известно уже несколько ее доказательств. Мы отсылаем читателя к [9, 10] за изложением оригинального доказательства, данного М. Деном, к [11–14] за современным обсуждением вопроса и связанных с ним приложений и к [4, 9] за дальнейшими ссылками.

Доказательство жесткости. Прежде всего заметим, что выписанные выше уравнения $(*)$ означают, что разность скоростей концевых точек ребра многогранника ортогональна самому ребру. Будем трактовать векторы скорости как вектор-функцию, определенную на вершинах многогранника P, которая обращается в нуль в базовых вершинах v_1, v_2, v_3. Идея доказательства состоит в том, чтобы расширить множество таких функций и доказать более сильный результат.

Пусть, как и ранее, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ и E — множества вершин и ребер симплициального многогранника $P \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим множество всех последовательностей векторов $(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$, $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$, таких, что для каждого ребра $(v_i, v_j) \in E$ имеет место одна из следующих возможностей:

1) $(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{a}_i) = (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{a}_j) = 0$,
2) $(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{a}_i) < 0$ и $(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{a}_j) < 0$,
3) $(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{a}_i) > 0$ и $(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{a}_j) > 0$.

Другими словами, мы требуем, чтобы проекции векторов скорости $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$ на ребро (v_i, v_j) имели одинаковый знак. Мы называем вершину v_i *мертвой*, если $\boldsymbol{a}_i = 0$, и *живой* в противном случае. Для любой последовательности векторов

$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, обладающей свойствами 1–3, мы докажем, что если базовые вершины мертвые, то вообще все вершины $v_i \in V$ мертвые. В силу определения жесткости отсюда немедленно будет вытекать теорема Дена.

Одномерный остов многогранника P обозначим через $\Gamma = (V, E)$. Поскольку многогранник P симплициальный, граф Γ является триангуляцией плоскости. Ориентируем ребра Γ, выбрав на них направления, соответствующие проекциям векторов скорости. Более точно, в случае 2 ориентируем ребро (v_i, v_j) от v_i к v_j, т. е. положим $v_i \to v_j$; в случае 3 положим $v_i \leftarrow v_j$; в случае 1 оставим ребро (v_i, v_j) неориентированным. Очевидно, ребра, смежные мертвой вершине, остаются при этом неориентированными.

Рассмотрим два ребра $e = (v_i, v_j)$ и $e' = (v_i, v_r)$, $e, e' \in E$, имеющие общую вершину v_i и такие, что треугольник $(v_i v_j v_r)$ является гранью многогранника P. Мы говорим, что в ребрах e и e' имеется

∘ *одна инверсия*, если одно из них входит в вершину v_i, а второе выходит из v_i,

∘ *нуль инверсий*, если они либо оба входят в вершину v_i, либо оба выходят из нее,

∘ *полуинверсия*, если одно из ребер ориентировано, а второе нет,

∘ *одна инверсия*, если оба ребра не ориентированы и v_i — живая вершина,

∘ *нуль инверсий*, если оба ребра не ориентированы и v_i — мертвая вершина.

Говоря о числе инверсий в подграфе, треугольнике или вершине, мы имеем в виду общую сумму инверсий во всех возможных в данном контексте парах ребер. Например, мы говорим, что некоторый граф *имеет по крайней мере q инверсий*, если эта сумма $\geq q$.

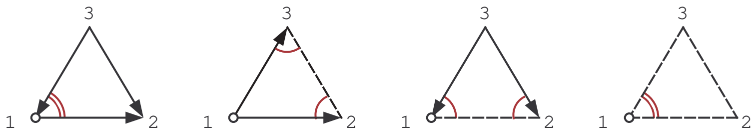

Рис. 1. Примеры различных ориентаций треугольника $(v_i v_j v_r)$, в котором v_i — живая вершина.

Треугольник называется *активным*, если в нем есть по крайней мере одна живая вершина, и *неактивным* в противном случае. Рассмотрим все ориентации, которые только возможны в активном треугольнике $(v_i v_j v_r)$ с живой вершиной v_i (некоторые из них см. на рис. 1). Простой перебор всех возможных случаев приводит к следующему результату.

Лемма 1. *В каждом активном треугольнике имеется по крайней мере одна инверсия.*

Эта лемма дает нижнюю границу для числа инверсий в Γ. Для получения верхней оценки мы будем подсчитывать число инверсий вокруг вершин. При этом нам понадобится следующая

Лемма 2. *Вокруг каждой живой вершины имеется не более двух инверсий.*

Мы отложим доказательство этой леммы до завершения доказательства теоремы Дена.

Посмотрим, что дают нам леммы 1 и 2 в случае, когда все ребра графа Γ являются ориентированными, за исключением базовых ребер (v_1, v_2), (v_1, v_3) и (v_2, v_3). В этом случае имеется $n-3$ живых вершин. Как отмечено выше, вокруг мертвых ребер нет инверсий. Поэтому в силу леммы 2 в Γ имеется не более $2(n-3) = 2n-6$ инверсий. С другой стороны, известно, что триангуляция плоскости с n вершинами всегда содержит $2n-4$ треугольников (см., например, [6]) и согласно предположению только один из них является неактивным. Следовательно, по лемме 1 в Γ имеется по меньшей мере $2n-5$ инверсий. Пришли к противоречию.

В общем случае будем использовать ту же стратегию. Удалим из Γ все неактивные треугольники вместе со всеми ребрами и вершинами, принадлежащими только неактивным треугольникам. Через $H = (V', E')$ обозначим какую-нибудь компоненту связности получившегося графа. Поскольку Γ — планарный граф, у его подграфа H есть корректно определенная граница ∂H. Обозначим через k число вершин на ∂H (все они мертвые) и через ℓ — число компонент связности ∂H. Наконец, через m обозначим число вершин в $H \setminus \partial H$ (некоторые из которых живые, а некоторые — мертвые). Согласно лемме 2 имеется не более $2m$ инверсий в H.

Теперь оценим число инверсий через количество t треугольников в H. Для этого заметим, что число вершин и ребер в H задается формулами

$$|V'| = m + k \quad \text{и} \quad 2|E'| = k + 3t.$$

С другой стороны, в графе H, взятом со всеми своими граничными компонентами, имеется $f = t + \ell$ граней. Подставив эти значения в формулу Эйлера $|V'| - |E'| + f = 2$, получим, что граф H имеет в точности $t = 2m + k + 2\ell - 4$ треугольных граней. Поскольку заведомо имеется один неактивный треугольник $(v_1 v_2 v_3)$, то $k \geq 3$ и $\ell \geq 1$. Следовательно, по лемме 1 в графе H имеется по крайней мере

$$t = 2m + k + 2\ell - 4 \geq 2m + 3 + 2 - 4 = 2m + 1$$

инверсий. Пришли к противоречию, которое и завершает доказательство теоремы Дена.

Доказательство леммы 2. Переберем все возможные случаи и убедимся, что в каждом из них утверждение леммы 2 верно.

Предположим, что в вершине v_i сходятся три или более неориентированных ребер. Тогда вектор скорости $\boldsymbol{a}_i$ ортогонален по крайней мере трем векторам, линейная оболочка которых совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^3$. Следовательно, $\boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}$, вершина v_i мертвая, и число инверсий в ней равно нулю.

Предположим теперь, что в вершине v_i сходятся ровно два неориентированных ребра e и e' многогранника P. Тогда вектор скорости $\boldsymbol{a}_i \neq \mathbf{0}$ ортогонален плоскости, натянутой на эти векторы. Заметим, что ребра e и e' отделяют ребра, входящие в вершину v_i, от ребер, исходящих из нее. Следовательно, либо дважды встретятся полуинверсии и одна полная инверсия, если ребра e и e' соседние, либо четыре раза встретится полуинверсии, если ребра e и e' не являются соседними (см. рис. 2).

Далее, предположим, что к вершине v_i подходит ровно одно неориентированное ребро e. Поскольку в этом случае $\boldsymbol{a}_i \neq \mathbf{0}$, рассмотрим плоскость, содержащую v_i и ортогональную вектору $\boldsymbol{a}_i$. Эта плоскость содержит вектор e

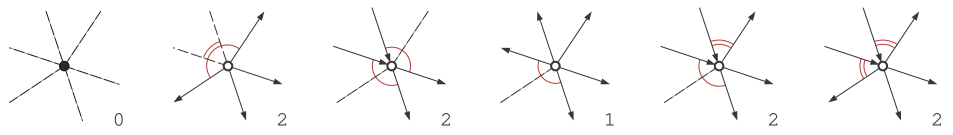

Рис. 2. Число инверсий вокруг вершины в разных случаях.

и отделяет ребра, входящие в вершину v_i, от ребер, выходящих из нее. Следовательно, в вершине v_i имеется либо две полуинверсии, если остальные ребра либо все входят в вершину v_i, либо все выходят из нее, либо две полуинверсии и одна инверсия в противном случае.

Наконец, если v_i — живая вершина, в которую не входит ни одно неориентированное ребро, то плоскость, ортогональная вектору $\boldsymbol{a}_i$, разделяет инцидентные ей ребра на два множества: входящие в вершину v_i и исходящие из нее. Очевидно, в этом случае есть ровно две инверсии.

Лемма 2 доказана.

Заключительные замечания. Отметим, что теорема Дена и следствие Коши справедливы для всех выпуклых многогранников. Сведéние к симплициальному случаю прямолинейно: достаточно триангулировать поверхность многогранника P диагоналями его граней. Детали мы опускаем. Следует также упомянуть, что первоначальное доказательство, данное М. Деном, так же, как и наше, опирается на теорию графов, хотя и очень сильно отличается от нашего.

Доказательство, приведенное выше, очевидно, распадается на две части: глобальную и локальную, и в этом отношении оно напоминает исходное доказательство теоремы Коши (см., например, [4, 6]). Локальная часть (лемма 2) выполнена в том же духе, что и лемма о числе перемен знаков в доказательстве Коши; в еще большей мере она аналогична локальной части известных доказательств теоремы Дена (см. [4, 10, 14]). Глобальная часть представляет собой некоторую систему аргументов в духе теории графов, отчасти похожую по стилю и сложности на вычисление перемен знаков двумя способами, обычно используемое в доказательстве теоремы Коши: в обоих случаях ключевую роль играет формула Эйлера.

Наконец отметим, что на самом деле В. И. Трушкина получила несколько более сильный результат, чем наш, поскольку у нее базовые вершины не обязаны принадлежать одной грани [1]. Когда речь идет о применении к жесткости выпуклых многогранников, результат В. И. Трушкиной эквивалентен нашему, но соответствующее утверждение для произвольных графов доказать труднее. Аналогично Шрамм доказывает некоторый гораздо более сильный результат об одном тонком способе разметки графов [2]. Любопытно, что в определенный момент он использует некоторую аргументацию, в значительной мере повторяющую доказательство формулы Эйлера.

Благодарности. Я благодарен Роберту Коннелли и Одеду Шрамму за их комментарии к статье [10] и Национальному научному фонду (NSF) за финансовую поддержку. Я также признателен Виктору Александрову за его интерес к этой статье и высказанные замечания. Наконец, мне бы хотелось поблагодарить Сусанну Юсуфову за ее любовь и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трушкина В. И.* Теорема о раскраске и жесткость выпуклого многогранника // Укр. геометр. сб. 1981. № 24. С. 116–122.
2. *Schramm O.* How to cage an egg // Invent. Math. 1992. V. 107. N 3. P. 543–560. Электронная версия http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D183703.html.
3. *Трушкина В. И.* Метод трехцветного раскрашивания графов // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 38, № 2. С. 186–200.
4. *Connelly R.* Rigidity // Handbook of convex geometry. Amsterdam: North-Holland, 1993. V. A. P. 223–271.
5. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
6. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2.
7. *Ден М.* О жесткости выпуклых многогранников // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 72–79. Оригинальный текст: *Dehn M.* Über die Starreit konvexer Polyeder // Math. Ann. 1916. Bd 77. S. 466–473. Электронная версия оригинального текста http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/cache/toc/D37460.html.
8. *Whiteley W.* Rigidity and scene analysis // Handbook of discrete and computational geometry. Boca Raton, FL: CRC Press, 1997. P. 893–916.
9. *Alexandrov V.* Inverse function theorems and their applications to the theory of polyhedra // Rev. Mathematics Math. Physics. (To appear).
10. *Pak I.* Lectures on combinatorial geometry and convex polytopes. (Монография, готовится к печати).
11. *Fedorchuk M., Pak I.* Rigidity and polynomial invariants of convex polytopes // Duke Math. J. 2005. V. 129. P. 371–404.
12. *Глюк Г.* Почти все односвязные замкнутые поверхности неизгибаемы // Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980. С. 148–163.
13. *Roth B.* Rigid and flexible frameworks // Amer. Math. Monthly. 1981. V. 88, N 1. P. 6–21.
14. *Whiteley W.* Infinitesimally rigid polyhedra. I. Statics of frameworks // Trans. Amer. Math. Sos. 1984. V. 285, N 2. P. 431–465.

Статья поступила 12 августа 2005 г.

Igor Pak (Пак Игорь)
M.I.T. Department of Mathematics
Cambridge, MA 02139
U.S.A.
pak@math.mit.edu