Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 514.113.4+514.114+514.132

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА

А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич

Аннотация: Получены элементарные формулы, выражающие соотношение между двугранными углами и длинами сторон тетраэдра в гиперболическом пространстве.

Ключевые слова: гиперболический тетраэдр, n-мерный гиперболический симплекс, теорема синусов, теорема косинусов.

1. Введение

Элементарные формулы, выражающие соотношение между двугранными углами и длинами сторон тетраэдра в гиперболическом пространстве, имеют важное значение при решении классической задачи о вычислении объема гиперболического тетраэдра, недавно решенной в [1–4]. Среди результатов настоящей работы можно выделить, например, теорему 2 (синусов), которая является классической и в несколько ином виде может быть найдена в монографии Кулиджа [5], написанной в начале прошлого века. Теорема 4 (косинусов) представляется нам новым или по крайней мере хорошо забытым результатом. Обе теоремы использовались в работах [4, 6] для вычисления объема симметричного гиперболического тетраэдра. На основе указанных теорем получен положительный ответ на вопрос Бузера о соотношении между площадями граней и длинами высот в гиперболическом тетраэдре. Кроме того, в работе предложен гиперболический аналог обобщенной теоремы синусов (теорема 7), полученной И. Ривиным [7] в случае евклидова пространства. Доказательство указанного результата основано на применении формул для вычисления длин ребер и высот гиперболического n-мерного симплекса, которые также установлены в работе.

2. Предварительные результаты

Следуя Ратклиффу [8], приведем несколько хорошо известных фактов из гиперболической геометрии, которые будут необходимы в дальнейшем.

Вещественное векторное пространство $\mathbb{R}^{n,1}$ размерности $n+1$ с лоренцевым скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, где $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, называется *лоренцевым* $(n+1)$-*мерным пространством* $\mathbb{E}^{1,n}$.

Пусть $\mathscr{H}_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$ — двуполостный гиперболоид, а $\mathscr{H}_t^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1,\ x_0 > 0\}$ — его верхняя полость. Сужение квадратичной формы, индуцированной лоренцевым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00153), ИНТАС (грант 03–51–3663), Project Fondecyt 7050189 and 1060378, Grant-in-Aid 17–05045 of the Japan Society for the Promotion of Science.

на касательное пространство к $\mathscr{H}_t^+$, положительно определено и дает риманову метрику на $\mathscr{H}_t^+$.

Пространство $\mathscr{H}_t^+$ с указанной метрикой называется *гиперболической моделью* n-мерного гиперболического пространства и обозначается через $\mathbb{H}^n$. Гиперболическое расстояние d между двумя точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в этой метрике задается формулой $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = -\operatorname{ch} d$.

Пусть $\mathscr{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0\}$ — конус, а $\mathscr{K}^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0, x_0 > 0\}$ — его верхняя часть. Тогда луч в $\mathscr{K}^+$, исходящий из начала координат, соответствует точке на идеальной границе $\mathbb{H}^n$. Множество таких лучей образует сферу на бесконечности $\mathbf{S}^{n-1}_\infty$. Тогда каждый луч в $\mathscr{K}^+$ становится бесконечно удаленной точкой пространства $\mathbb{H}^n$.

Пусть $\mathscr{P}$ обозначает радиальную проекцию из $\mathbb{E}^{1,n}\backslash\{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid x_0 = 0\}$ на аффинную гиперплоскость $\mathbb{P}^n_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid x_0 = 1\}$ вдоль луча, выходящего из начала координат o. Проекция $\mathscr{P}$ — это гомеоморфизм $\mathbb{H}^n$ на n-мерный открытый единичный шар $\mathbf{B}^n$ в $\mathbb{P}^n_1$ с центром в точке $(1, 0, 0, \dots, 0)$, который задает *проективную модель* $\mathbb{H}^n$. Аффинная гиперплоскость $\mathbb{P}^n_1$ содержит не только $\mathbf{B}^n$ и его теоретико-множественную границу $\partial\mathbf{B}^n$ в $\mathbb{P}^n_1$, которая канонически отождествляется с $\mathbf{S}^{n-1}_\infty$, но также внешность компактифицированной проективной модели $\overline{\mathbf{B}^n} = \mathbf{B}^n \cup \partial\mathbf{B}^n \approx \mathbb{H}^n \cup \mathbf{S}^{n-1}_\infty$. Таким образом, $\mathscr{P}$ может быть естественным образом продолженно до отображения из $\mathbb{E}^{1,n}\backslash\{0\}$ на n-мерное вещественное проективное пространство $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_1 \cup \mathbb{P}^n_\infty$, где $\mathbb{P}^n_\infty$ — множество прямых в аффинной гиперплоскости $\{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid x_0 = 0\}$, проходящих через начало координат. Обозначим через $\operatorname{Ext}\overline{\mathbf{B}^n}$ внешность $\overline{\mathbf{B}^n}$ в $\mathbb{P}^n$.

Пусть $\mathscr{H}_s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 1\}$ — однополостный гиперболоид. Для произвольной точки $\mathbf{u}$ в $\mathscr{H}_s$ определим в $\mathbb{E}^{1,n}$ полупространство $\mathrm{R}_\mathbf{u} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle \le 0\}$ и гиперплоскость $\mathrm{P}_\mathbf{u} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^{1,n} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle = 0\} = \partial\mathrm{R}_\mathbf{u}$. Обозначим через $\Gamma_\mathbf{u}$ (соответственно через $\Pi_\mathbf{u}$) пересечение $\mathrm{R}_\mathbf{u}$ (соответственно $\mathrm{P}_\mathbf{u}$) с $\mathbf{B}^n$. Тогда $\Pi_\mathbf{u}$ является геодезической гиперплоскостью в $\mathbb{H}^n$, а соответствие между точками в $\mathscr{H}_s$ и полупространством $\Gamma_\mathbf{u}$ в $\mathbb{H}^n$ — биекцией. Назовем $\mathbf{u}$ *нормальным вектором к* $\mathrm{P}_\mathbf{u}$ (или $\Pi_\mathbf{u}$).

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *— две произвольные неколлинеарные точки в* $\mathscr{H}_s$. *Тогда имеет место один из следующих фактов.*

(i) *Две геодезические гиперплоскости* $\Pi_\mathbf{x}$ *и* $\Pi_\mathbf{y}$ *пересекаются, если* $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| < 1$. *В этом случае (гиперболический) угол* θ *между ними вычисляется по формуле*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = -\cos\theta.$$

(ii) *Две геодезические гиперплоскости* $\Pi_\mathbf{x}$ *и* $\Pi_\mathbf{y}$ *не пересекаются в* $\overline{\mathbf{B}^n}$, *т. е. они пересекаются в* $\operatorname{Ext}\overline{\mathbf{B}^n}$, *если* $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| > 1$. *В этом случае (гиперболическое) расстояние* d *между ними вычисляется по формуле*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = -\operatorname{ch} d,$$

а Π_x *и* Π_y *называют ультрапараллельными.*

(iii) *Две геодезические гиперплоскости* $\Pi_\mathbf{x}$ *и* $\Pi_\mathbf{y}$ *не пересекаются в* $\mathbf{B}^n$, *но пересекаются на* $\partial\mathbf{B}^n$, *если* $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = 1$. *В этом случае угол и расстояние между ними равны нулю, а* $\Pi_\mathbf{x}$ *и* $\Pi_\mathbf{y}$ *называют параллельными.*

Предложение 2. *Пусть* $\mathbf{x}$ *— точка в* $\mathbf{B}^n$ *и* $\Pi_\mathbf{y}$ *— геодезическая гиперплоскость, нормальный вектор к которой* $\mathbf{y} \in \mathscr{H}_s$, *а* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle < 0$. *Тогда расстояние* d *между* $\mathbf{x}$ *и* $\Pi_\mathbf{y}$ *вычисляется по формуле*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = -\operatorname{sh} d.$$

Пусть $\mathbf{v} \in \operatorname{Ext} \overline{\mathbf{B}^n}$. Тогда $\mathscr{P}^{-1}(\mathbf{v}) \cap \mathscr{H}_s$ содержит две точки, определяющие одну и ту же гиперплоскость $\Pi_{\tilde{\mathbf{v}}}$, $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathscr{P}^{-1}(\mathbf{v}) \cap \mathscr{H}_s$. Назовем $\Pi_{\tilde{\mathbf{v}}}$ *полярной геодезической гиперплоскостью к* $\mathbf{v}$, а $\mathbf{v}$ — *полюсом* гиперплоскости $\Pi_{\tilde{\mathbf{v}}}$.

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{v} \in \operatorname{Ext} \overline{\mathbf{B}^n}$.

(i) *Всякая гиперплоскость, проходящая через* $\mathbf{v}$ *и пересекающая* $\mathbf{B}^n$, *ортогональна к* $\Pi_{\tilde{\mathbf{v}}}$ *в* $\mathbb{H}^n$.

(ii) *Если* $\mathbf{u} \in \mathscr{P}_{\tilde{\mathbf{v}}} \cap \partial \mathbf{B}^n$, *то линия, проходящая через* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$, *является касательной к* $\partial \mathbf{B}^n$.

3. Обобщенный гиперболический n-мерный симплекс

Пусть теперь $n \geq 3$. Обозначим через Δ выпуклый многогранник в $\mathbb{P}^n_1$. Будем считать, что каждое из ребер ($(n-2)$-мерная грань) многогранника Δ пересекает $\overline{\mathbf{B}^n}$.

Определение 1. Пусть $\mathbf{v}$ — вершина $\Delta, \mathbf{v} \in \operatorname{Ext} \overline{\mathbf{B}^n}$. *Усечением многогранника* Δ будем называть операцию отрезания пирамиды с вершиной $\mathbf{v}$ и основанием $\Pi_{\tilde{\mathbf{v}}} \cap \Delta$, а *усеченным многогранником* Δ' — многогранник, полученный усечением всех вершин, лежащих в $\operatorname{Ext} \overline{\mathbf{B}^n}$. При этом $\mathbf{v}$ называется *конечной* (*идеальной, ультраидеальной*) вершиной Δ', если $v \in \mathbf{B}^n$ ($\partial \mathbf{B}^n, \operatorname{Ext} \overline{\mathbf{B}^n}$ соответственно). *Обобщенным гиперболическим многогранником* будем называть многогранник в обычном смысле или усеченный многогранник.

Рассмотрим n-мерный обобщенный гиперболический симплекс σ^n с вершинами v_i, длинами высот h_i и ребер l_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n+1$, в проективной модели $\mathbf{B}^n$ гиперболического пространства. Обозначим через $G = \langle -\cos \alpha_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n+1}$ матрицу Грама симплекса σ^n, где α_{ij} — двугранный угол ij-грани симплекса, противолежащей вершинам v_i и v_j, а через $C = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n+1}$ — присоединенную матрицу, состоящую из элементов $c_{ij} = (-1)^{i+j} G_{ij}$, где G_{ij} — ij-й минор матрицы G. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия существования обобщенного гиперболического симплекса в терминах матрицы Грама.

Теорема 1 [3]. *Пусть дано множество положительных чисел*

$$\{\theta_{ij} \in [0, \pi] \mid i, j = 1, \dots, n+1,\ \theta_{ij} = \theta_{ji},\ \theta_{ii} = \pi,\ i = j\}.$$

Тогда следующие два условия эквивалентны:

(1) *существует обобщенный гиперболический симплекс в* $\mathbb{H}^n$ *с двугранным углом между* i*-гранью и* j*-гранью, равным* θ_{ij}*;*

(2) *вещественная симметричная матрица* $G = \langle -\cos \theta_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n+1}$ *порядка* $n+1$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $\operatorname{sgn} G = (n, 1)$, *т. е.* G *имеет одно отрицательное и* n *положительных собственных значений;*

(ii) $c_{ij} > 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n+1$.

При этом i*-я вершина симплекса является конечной (идеальной, ультраидеальной), если* $c_{ii} > 0$ ($c_{ii} = 0, c_{ii} < 0$ *соответственно*).

Предложение 4. *Пусть* σ^n — *гиперболический* n*-мерный обобщенный симплекс с конечными вершинами* v_i, *длинами высот* h_i *и ребер* $l_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n+1$. *Тогда*

$$\operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}, \tag{i}$$

$$\operatorname{sh} h_j = \frac{\sqrt{-\det G}}{\sqrt{c_{jj}}}. \tag{ii}$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\det G < 0$, где

$$G = \langle g_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n+1} = \langle -\cos\theta_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n+1}$$

— матрица Грама гиперболического симплекса σ^n. Тогда существует базис из $n+1$ единичных векторов $\{u_1,\dots,u_{n+1}\}$ в $\mathbb{E}^{1,n}$ таких, что $\langle u_i, u_j \rangle = -\cos\theta_{ij}$. Рассмотрим систему векторов $\{w_1,\dots,w_{n+1}\}$, где $w_i = \sum\limits_{k=1}^{n+1} c_{ik} u_k$, а c_{ik} — элементы присоединенной матрицы C. Имеем

$$\langle w_i, u_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n+1} c_{ik} u_k, u_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} c_{ik} \langle u_k, u_j \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} c_{ik} g_{kj} = \delta_{ij} \det G,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Тем самым система векторов $\{w_1,\dots,w_{n+1}\}$ задает двойственный к $\{u_1,\dots,u_{n+1}\}$ базис в $\mathbb{E}^{1,n}$. Ортонормируем указанный базис, для чего вычислим

$$\langle w_i, w_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n+1} c_{ik} u_k, w_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} c_{ik} \langle u_k, w_j \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} c_{ik} \delta_{kj} \det G = c_{ij} \det G$$

и обозначим через $v_i = \frac{w_i}{\sqrt{-c_{ii}\det G}}$, $c_{ii} > 0$, векторы ортонормированного базиса. Полученный базис определяет систему векторов в вершинах симплекса. Имеем

$$\langle v_i, v_j \rangle = \frac{-c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}, \quad c_{ii} c_{jj} > 0.$$

С другой стороны, $\langle v_i, v_j \rangle = -\operatorname{ch} l_{ij}$ (см. предложение 1(ii)). Следовательно, $\operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}$.

Далее, с одной стороны, учитывая биортогональность векторов u_k и v_j, имеем

$$\langle w_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} c_{ik} \langle u_k, v_j \rangle = c_{ij} \langle u_j, v_j \rangle.$$

С другой стороны,

$$\langle w_i, v_j \rangle = \langle \sqrt{-c_{ii}\det G}\, v_i, v_j \rangle = \sqrt{-c_{ii}\det G}\, \frac{-c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}} = -c_{ij} \frac{\sqrt{-\det G}}{\sqrt{c_{jj}}}.$$

В результате получим

$$-c_{ij} \frac{\sqrt{-\det G}}{\sqrt{c_{jj}}} = c_{ij} \langle u_j, v_j \rangle$$

или

$$\langle u_j, v_j \rangle = -\sqrt{\frac{-\det G}{c_{jj}}}.$$

По предложению 2 $\langle u_j, v_j \rangle = -\operatorname{sh} h_j$. Таким образом,

$$\operatorname{sh} h_j = \frac{\sqrt{-\det G}}{\sqrt{c_{jj}}}. \qquad \square$$

Замечание 1. (1) Если v_i — конечная вершина обобщенного симплекса, а v_j — ультраидеальная вершина, то $\operatorname{ch} l_{ij} = \frac{-c_{ij}}{\sqrt{-c_{ii} c_{jj}}}$.

(2) Если v_i, v_j — ультраидеальные вершины обобщенного симплекса, то $\operatorname{ch} l_{ij} = \frac{-c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}$.

4. Теоремы синусов и косинусов для гиперболического тетраэдра

Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{H}^3$ — тетраэдр с высотами h_1, h_2, h_3, h_4, опущенными из вершин v_1, v_2, v_3, v_4 соответственно, и двугранными углами A, B, C, D, E, F при ребрах с длинами l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F соответственно (рис. 1). Необходимые и достаточные условия существования тетраэдра в гиперболическом пространстве в терминах матрицы Грама приведены в теореме 1. При этом тетраэдр однозначно с точностью до изометрии определяется набором его двугранных углов. Обозначим матрицу Грама тетраэдра T через

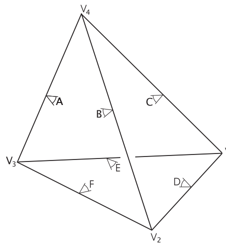

Рис. 1

$$G = \langle -\cos\theta_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix},$$

а присоединенную матрицу, состоящую из элементов $c_{ij} = (-1)^{i+j} G_{ij}$, где G_{ij} — ij-й минор матрицы G, — через $C = \langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}$.

Пусть

$$G^* = \langle v_i, v_j\rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} -1 & -\operatorname{ch} l_D & -\operatorname{ch} l_E & -\operatorname{ch} l_C \\ -\operatorname{ch} l_D & -1 & -\operatorname{ch} l_F & -\operatorname{ch} l_B \\ -\operatorname{ch} l_E & -\operatorname{ch} l_F & -1 & -\operatorname{ch} l_A \\ -\operatorname{ch} l_C & -\operatorname{ch} l_B & -\operatorname{ch} l_A & -1 \end{pmatrix}$$

— сопряженная матрица Грама, состоящая из элементов

$$\langle v_i, v_j\rangle = \frac{-c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

(см. предложение 4(i) и рис. 1). Положим $c^*_{ij} = (-1)^{i+j} G^*_{ij}$, где G^*_{ij} — ij-й минор матрицы G^*.

Предложение 5. *Пусть T — гиперболический тетраэдр. Тогда имеют место равенства*

$$\det G^* = \frac{(\det G)^3}{P}, \quad \det G = \frac{(\det G^*)^3}{P^*}, \tag{i}$$

$$P^* = \frac{(\det G)^8}{P^3}, \quad P = \frac{(\det G^*)^8}{(P^*)^3}, \tag{ii}$$

$$\frac{P^*}{P} = \left(\frac{\det G^*}{\det G}\right)^4, \tag{iii}$$

$$\frac{\det G^*}{\det G} = \operatorname{sh} h_1 \operatorname{sh} h_2 \operatorname{sh} h_3 \operatorname{sh} h_4, \tag{iv}$$

где $P = c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}$, $P^* = c^*_{11}c^*_{22}c^*_{33}c^*_{44}$, а h_1, h_2, h_3, h_4 — длины высот тетраэдра T.

Замечание 2. Соотношения (i) предложения 5 позволяют выразить $\det G^*$ через двугранные углы тетраэдра T, а $\det G$ — через длины его сторон.

Доказательство. (i) Известно, что $C = G^{-1}\det G$. Отсюда

$$\det C = \det G^{-1}(\det G)^4 = (\det G)^{-1}(\det G)^4 = (\det G)^3.$$

По определению матрицы G^*

$$\det G^* = \frac{1}{c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}}\det C = \frac{(\det G)^3}{c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}} = \frac{(\det G)^3}{P}.$$

Аналогично устанавливается равенство $\det G = \frac{(\det G^*)^3}{P^*}$.

(ii) Используя полученные равенства, имеем

$$P\det G^* = (\det G)^3 = \left(\frac{(\det G^*)^3}{P^*}\right)^3 = \frac{(\det G^*)^9}{(P^*)^3}.$$

Отсюда

$$P = \frac{(\det G^*)^8}{(P^*)^3}.$$

Так же устанавливается равенство $P^* = \frac{(\det G)^8}{P^3}$.

(iii) Поделим друг на друга равенства $\det G^* = \frac{(\det G)^3}{P}$ и $\det G = \frac{(\det G^*)^3}{P^*}$. Получим

$$\frac{\det G^*}{\det G} = \frac{(\det G)^3}{P}\frac{P^*}{(\det G^*)^3},$$

откуда

$$\frac{P^*}{P} = \frac{(\det G^*)^4}{(\det G)^4}.$$

(iv) В силу (i) справедливо равенство

$$\frac{\det G^*}{\det G} = \frac{(\det G)^2}{P}.$$

С другой стороны, из предложения 4(ii)

$$\operatorname{sh} h_1 \operatorname{sh} h_2 \operatorname{sh} h_3 \operatorname{sh} h_4 = \frac{(\det G)^2}{c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}} = \frac{(\det G)^2}{P}.$$

Сравнивая полученные выражения, имеем

$$\frac{\det G^*}{\det G} = \operatorname{sh} h_1 \operatorname{sh} h_2 \operatorname{sh} h_3 \operatorname{sh} h_4. \qquad \square$$

Следующий результат, в несколько иной формулировке, впервые получен Кулиджем [5], а позже передоказан Фенхелем [9]. История вопроса восходит к работе Энрико Д'Овидио (1877 г.) и изложена в [10].

Теорема 2. *Для гиперболического тетраэдра T имеет место равенство*

$$\frac{\sin A\sin D}{\operatorname{sh} l_A \operatorname{sh} l_D} = \frac{\sin B\sin E}{\operatorname{sh} l_B \operatorname{sh} l_E} = \frac{\sin C\sin F}{\operatorname{sh} l_C \operatorname{sh} l_F} = \sqrt{\frac{\det G}{\det G^*}}.$$

Доказательство. Воспользуемся следующей теоремой Якоби (см. [11, теорема 2.5.3]).

Теорема 3 (Якоби). *Пусть* $A = \langle a_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n}$ — *матрица порядка* $n \times n$ *с определителем* $\det A = \Delta$. *Обозначим через* $C = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n}$ *матрицу, состоящую из элементов* $c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$, *где* A_{ij} — ij*-й минор матрицы* A. *Тогда для всякого* k, $1 \le k \le n$, *справедливо равенство*

$$\det\langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,k} = \Delta^{k-1} \det\langle a_{ij} \rangle_{i,j=k+1,\dots,n}.$$

Кроме того, если $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ — *произвольная перестановка на символах* $\{1, 2, \dots, n\}$, *то для всякого* k, $1 \le k \le n$, *справедливо равенство*

$$\det\langle c_{i_p j_q} \rangle_{p,q=1,\dots,k} = (-1)^\sigma \Delta^{k-1} \det\langle a_{i_p j_q} \rangle_{p,q=k+1,\dots,n}.$$

Применяя эту теорему к матрице Грама G и присоединенной к ней матрице C для $k = 2$, получим

$$c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = (1 - \cos^2 D) \det G.$$

Аналогично

$$c_{33}c_{44} - c_{34}^2 = (1 - \cos^2 A) \det G.$$

По предложению 4 имеем $\operatorname{ch} l_D = \frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}$, поэтому

$$\operatorname{sh} l_D = \sqrt{\frac{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}{c_{11}c_{22}}}.$$

Аналогично установим, что

$$\operatorname{sh} l_A = \sqrt{\frac{c_{34}^2 - c_{33}c_{44}}{c_{33}c_{44}}}.$$

Отсюда

$$\frac{\sin A \sin D}{\operatorname{sh} l_A \operatorname{sh} l_D} = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}}}{-\det G}.$$

По предложению 5(i) имеем

$$\frac{\sqrt{c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}}}{-\det G} = \sqrt{\frac{(\det G)^3}{\det G^*}} \frac{1}{(-\det G)} = \sqrt{\frac{\det G}{\det G^*}}. \qquad \square$$

Теорема 4. *Пусть* C, F *и* B, E — *пары двугранных углов при противоположных ребрах гиперболического тетраэдра* T *с длинами* l_C, l_F *и* l_B, l_E *соответственно. Тогда имеет место равенство*

$$\frac{\cos C \cos F - \cos B \cos E}{\operatorname{ch} l_B \operatorname{ch} l_E - \operatorname{ch} l_C \operatorname{ch} l_F} = \sqrt{\frac{\det G}{\det G^*}}.$$

Доказательство. Применяя теорему 3 к матрице G для $k = 2$, получаем равенство

$$c_{13}c_{24} - c_{14}c_{23} = (\cos B \cos E - \cos C \cos F) \det G.$$

По предложению 4 имеем

$$\operatorname{ch} l_E = \frac{c_{13}}{\sqrt{c_{11}c_{33}}},$$

откуда

$$c_{13} = \operatorname{ch} l_E \sqrt{c_{11}c_{33}}.$$

Аналогично выражаем c_{23}, c_{14} и c_{24}. Подставив эти выражения в предыдущее равенство, получим

$$(\cos B\cos E-\cos C\cos F)\det G=\sqrt{c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}}(\operatorname{ch}l_E\operatorname{ch}l_B-\operatorname{ch}l_C\operatorname{ch}l_F).$$

Для удобства перепишем последнее равенство в виде

$$(\cos C\cos F-\cos B\cos E)(-\det G)=\sqrt{c_{11}c_{22}c_{33}c_{44}}(-\operatorname{ch}l_C\operatorname{ch}l_F+\operatorname{ch}l_E\operatorname{ch}l_B).$$

Отсюда

$$\frac{\cos C\cos F-\cos B\cos E}{\operatorname{ch}l_B\operatorname{ch}l_E-\operatorname{ch}l_C\operatorname{ch}l_F}=\frac{\sqrt{P}}{-\det G}.$$

По предложению 5(i) имеем

$$\frac{\sqrt{P}}{-\det G}=\sqrt{\frac{\det G}{\det G^*}}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Для гиперболического тетраэдра T справедливы равенства*

$$\frac{\cos(C+\varepsilon F)-\cos(B+\delta E)}{\operatorname{ch}(l_B+\delta l_E)-\operatorname{ch}(l_C+\varepsilon l_F)}=\sqrt{\frac{\det G}{\det G^*}},$$

где $\varepsilon,\delta\in\{-1,1\}$.

Доказательство. Согласно теореме 2

$$\frac{\sin B\sin E}{\operatorname{sh}l_B\operatorname{sh}l_E}=\frac{\sin C\sin F}{\operatorname{sh}l_C\operatorname{sh}l_F}=\sqrt{\frac{\det G}{\det G^*}},$$

а по теореме 4

$$\frac{\cos C\cos F-\cos B\cos E}{\operatorname{ch}l_B\ \operatorname{ch}l_E-\operatorname{ch}l_C\ \operatorname{ch}l_F}=\sqrt{\frac{\det G}{\det G^*}}.$$

Используя свойства пропорции и тригонометрические формулы сложения (вычитания), получаем

$$\frac{\cos C\cos F-\cos B\cos E+\delta\sin B\sin E-\varepsilon\sin C\sin F}{\operatorname{ch}l_B\operatorname{ch}l_E-\operatorname{ch}l_C\operatorname{ch}l_F+\delta\operatorname{sh}l_B\operatorname{sh}l_E-\varepsilon\operatorname{sh}l_C\operatorname{sh}l_F}$$
$$=\frac{\cos(C+\varepsilon F)-\cos(B+\delta E)}{\operatorname{ch}(l_B+\delta l_E)-\operatorname{ch}(l_C+\varepsilon l_F)}=\sqrt{\frac{\det G}{\det G^*}}.\qquad\square$$

5. Многомерная теорема синусов в гиперболическом пространстве

Хорошо известна следующая теорема (см. [12, с. 258]).

Теорема 5 (гиперболический аналог формулы Герона). *Площадь S гиперболического треугольника со сторонами a,b,c удовлетворяет соотношению*

$$4\sin^2\frac{S}{2}=\frac{\operatorname{sh}p\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{ch}^2\frac{a}{2}\operatorname{ch}^2\frac{b}{2}\operatorname{ch}^2\frac{c}{2}},\tag{1}$$

где $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Из предложения 4(ii) для гиперболического тетраэдра T, изображенного на рис. 1, имеем

$$\operatorname{sh}h_1\sqrt{c_{11}}=\operatorname{sh}h_2\sqrt{c_{22}}=\operatorname{sh}h_3\sqrt{c_{33}}=\operatorname{sh}h_4\sqrt{c_{44}}=\sqrt{-\det G}.$$

Аналогично

$$\operatorname{sh} h_1 \sqrt{c_{11}^*} = \operatorname{sh} h_2 \sqrt{c_{22}^*} = \operatorname{sh} h_3 \sqrt{c_{33}^*} = \operatorname{sh} h_4 \sqrt{c_{44}^*} = \sqrt{-\det G^*}.$$

Отсюда несложно заметить равенства

$$\frac{c_{11}}{c_{11}^*} = \frac{c_{22}}{c_{22}^*} = \frac{c_{33}}{c_{33}^*} = \frac{c_{44}}{c_{44}^*} = \frac{\det G}{\det G^*}. \tag{2}$$

Непосредственное вычисление элементов c_{ii}, c_{ii}^*, $i = 1,2,3,4$, присоединенных матриц тетраэдра T и использование элементарных тригонометрических преобразований к полученным выражениям дает следующее утверждение.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\frac{\operatorname{sh} p_{123} \operatorname{sh}(p_{123} - l_D) \operatorname{sh}(p_{123} - l_E) \operatorname{sh}(p_{123} - l_F)}{\operatorname{sh} p_{124} \operatorname{sh}(p_{124} - l_D) \operatorname{sh}(p_{124} - l_C) \operatorname{sh}(p_{124} - l_B)} = \frac{\sin \rho_{123} \sin(\rho_{123} - A) \sin(\rho_{123} - B) \sin(\rho_{123} - C)}{\sin \rho_{124} \sin(\rho_{124} - A) \sin(\rho_{124} - F) \sin(\rho_{124} - E)},$$

где $p_{123} = \frac{l_D + l_E + l_F}{2}$, $p_{124} = \frac{l_D + l_C + l_B}{2}$, $\rho_{123} = \frac{A+B+C}{2}$ *и* $\rho_{124} = \frac{A+F+E}{2}$.

Явное выражение высоты тетраэдра T из предложения 4(ii) имеет вид

$$\operatorname{sh} h_4 = \frac{\sqrt{-\det G}}{\sqrt{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C}} = \frac{\sqrt{-\det G}}{2\sqrt{\sin \rho_{123} \sin(\rho_{123} - A) \sin(\rho_{123} - B) \sin(\rho_{123} - C)}}, \tag{3}$$

где $\rho_{123} = \frac{A+B+C}{2}$.

На международной конференции по анализу и геометрии, посвященной 70-летию академика Ю. Г. Решетняка (30 августа–3 сентября 1999 г., Новосибирск, Россия), Бузер поставил вопрос о существовании трехмерного аналога правила

$$\operatorname{sh} a_1 \operatorname{sh} h_1 = \operatorname{sh} a_2 \operatorname{sh} h_2 = \operatorname{sh} a_3 \operatorname{sh} h_3,$$

связывающего длины сторон и высот гиперболического треугольника, используемого им в [13] при вычислении спектра оператора Лапласа — Бельтрами на компактных римановых поверхностях. Следующее предложение дает положительный ответ на поставленный вопрос.

Предложение 6. *Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — площади граней гиперболического тетраэдра T, противолежащие вершинам v_1, v_2, v_3, v_4 соответственно. Тогда*

$$\sin\frac{A_1}{2} \operatorname{sh} h_1 \operatorname{ch}\frac{l_A}{2} \operatorname{ch}\frac{l_B}{2} \operatorname{ch}\frac{l_F}{2} = \sin\frac{A_2}{2} \operatorname{sh} h_2 \operatorname{ch}\frac{l_A}{2} \operatorname{ch}\frac{l_C}{2} \operatorname{ch}\frac{l_E}{2} = \sin\frac{A_3}{2} \operatorname{sh} h_3 \operatorname{ch}\frac{l_B}{2} \operatorname{ch}\frac{l_C}{2} \operatorname{ch}\frac{l_D}{2} = \sin\frac{A_4}{2} \operatorname{sh} h_4 \operatorname{ch}\frac{l_D}{2} \operatorname{ch}\frac{l_E}{2} \operatorname{ch}\frac{l_F}{2}.$$

Доказательство. Найдем площади граней с вершинами v_1, v_2, v_3 и v_1, v_2, v_4 тетраэдра T по теореме 5, а высоты h_3, h_4 — по формуле (3). Подставляя найденные выражения в условие леммы 1 и выполняя элементарные преобразования, получим

$$\frac{\sin\frac{A_4}{2} \operatorname{ch}\frac{l_D}{2} \operatorname{ch}\frac{l_E}{2} \operatorname{ch}\frac{l_F}{2}}{\sin\frac{A_3}{2} \operatorname{ch}\frac{l_B}{2} \operatorname{ch}\frac{l_C}{2} \operatorname{ch}\frac{l_D}{2}} = \frac{\operatorname{sh} h_3}{\operatorname{sh} h_4}. \qquad \square$$

И. Ривин [7] предложил следующий вариант многомерной теоремы синусов для n-мерного евклидова симплекса σ^n. В случае $n = 2$ она эквивалентна теореме синусов для евклидова треугольника.

Теорема 6 (многомерная теорема синусов). *Пусть σ^n — n-мерный евклидов симплекс. Тогда для любых $1 \leq i, j, k, l \leq n+1$ имеет место равенство*

$$\frac{A_i A_j}{A_k A_l} = \frac{c_{ij}}{c_{kl}}, \tag{4}$$

где A_i, A_j, A_k, A_l — площади соответствующих $(n-1)$-мерных граней симплекса σ^n, а $c_{ij} = (-1)^{i+j} G_{ij}$, $c_{kl} = (-1)^{k+l} G_{kl}$, где G_{ij} и G_{kl} — ij-й и kl-й миноры матрицы Грама.

Заметим, что равенство (4) имеет эквивалентную запись в виде

$$\frac{h_k h_l}{h_i h_j} = \frac{c_{ij}}{c_{kl}}, \tag{5}$$

где $h_i, i = 1, 2, \dots, n+1$, — длина высоты симплекса σ^n, опущенной из i-й вершины.

Гиперболический аналог последнего выражения дает

Теорема 7. *Пусть σ^n — n-мерный гиперболический симплекс с длинами высот h_i и ребер l_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Тогда имеет место равенство*

$$\frac{\operatorname{sh} h_k \operatorname{sh} h_l \operatorname{ch} l_{ij}}{\operatorname{sh} h_i \operatorname{sh} h_j \operatorname{ch} l_{kl}} = \frac{c_{ij}}{c_{kl}}, \tag{6}$$

где $c_{ij} = (-1)^{i+j} G_{ij}$, а G_{ij} — ij-й минор матрицы Грама.

Доказательство. Подставляя выражения

$$\operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}, \quad \operatorname{sh} h_j = \frac{\sqrt{-\det G}}{\sqrt{c_{jj}}}$$

для длин и высот симплекса из предложения 4 в левую часть равенства (6), получим верное тождество. □

В случае тетраэдра ($n = 3$) гиперболический аналог теоремы 6 следует из теоремы 7 и предложения 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 22, N 3. P. 347–366.
2. *Murakami J., Yano M.* On the volume of hyperbolic tetrahedron. Preprint. 2001. Available at http://faculty.web.waseda.ac.jp/murakami/papers/tetrahedronrev3.pdf
3. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra. Preprint. 2002. Available at http://www.math.titech.ac.jp/Users/ushijima/welcome-e.html
4. *Деревнин Д. А., Медных А. Д.* О формуле объема гиперболического тетраэдра // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 2. С. 346–348.
5. *Coolidge J. L.* The elements of non-Euclidean geometry. Oxford: Clarendon press, 1909.
6. *Деревнин Д. А., Медных А. Д., Пашкевич М. Г.* Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1022–1031.
7. *Rivin I.* A multidimensional theorem of sines. Available at http://www.arxiv.org/abs/math.GM/0211261
8. *Ratcliffe J. G.* Foundations of hyperbolic manifolds. New York: Springer-Verl., 1994.
9. *Fenchel W.* Elementary Geometry in Hyperbolic Space. Berlin; New York: de Gruyter, 1989.
10. *Eriksson F.* The law of sines for tetrahedra and n-simplices // Geom. Dedicata. 1978. V. 7, N 1. P. 71–80.
11. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.

12. *Прасолов В. В., Сосинский А. Б.* Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.

13. *Buser P.* Geometry and spectra of compact Riemann surfaces. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1992. (Progr. Math.; 106).

Статья поступила 30 мая 2005 г.

Медных Александр Дмитриевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`mednykh@math.nsc.ru`

Пашкевич Марина Геннадьевна
Сибирский гос. университет путей сообщения,
Новосибирск 630049
`Pashkevich_M@mail.ru`