*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2006. Том 47, № 4*

*УДК 512.46*

# $n$–ЛИЕВО СВОЙСТВО ЯКОБИАНА КАК УСЛОВИЕ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

**А. Джумадильдаев**

**Аннотация:** Доказано, что ассоциативная коммутативная алгебра $U$ с дифференцированиями $D_1, \dots, D_n \in \operatorname{Der} U$ относительно $n$-умножения $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ превращается в $n$-лиеву алгебру, если система $\{D_1, \dots, D_n\}$ находится в инволюции. В случае, когда дифференцирования попарно коммутируют, этот факт установлен В. Т. Филипповым. Получена еще одна формулировка условия Фробениуса о вполне интегрируемости в терминах $n$-лиевых умножений. Дифференциальная система $\{D_1, \dots, D_n\}$ ранга $n$ на многообразии $M^m$ находится в инволюции тогда и только тогда, когда пространство гладких функции на $M$ относительно якобиана $\operatorname{Det}(D_i u_j)$ превращается в $n$-лиеву алгебру.

**Ключевые слова:** $n$-лиева алгебра, якобиан, вполне интегрируемость, дифференциальная система, теорема Фробениуса.

## 1. Введение

Пусть $U$ и $V$ — векторные пространства. Обозначим через $T^k(U,V)$ пространство полилинейных отображении с $k$ аргументами $\psi : U \times \dots \times U \to V$. Пусть $C^k(U,V)$ — подпространство пространства $T^k(U,V)$, состоящее из полилинейных отображении с кососимметрическими аргументами.

Говорят, что $U$ обладает *$n$-арным умножением* $\omega$, если $\omega \in T^n(U,U)$. Пространство $U$ с $n$-арным умножением $\omega$ называют *$n$-алгеброй*. Обозначим такую алгебру через $(U,\omega)$. Определим $n$-арный полином $\mathrm{nlie}_1 = \mathrm{nlie}_1(\omega, t_1, \dots, t_{2n-1})$ по правилу

$$\mathrm{nlie}_1(\omega, t_1, \dots, t_{2n-1}) = \omega(t_1, \dots, t_{n-1}, \omega(t_n, \dots, t_{2n-1})) - \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} \omega(\omega(t_1, \dots, t_{n-1}, t_i), t_n, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_{2n-1}).$$

Назовем $n$-алгебру $(U,\omega)$ *$n$-лиевой*, если $\omega \in C^n(U,U)$ и $\mathrm{nlie}_1 = 0$ — тождество в $U$, т. е.

$$\omega(u_1, \dots, u_{n-1}, \omega(u_n, \dots, u_{2n-1})) = \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} \omega(\omega(u_1, \dots, u_{n-1}, u_i), u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{2n-1})$$

для всех $u_1, \dots, u_{2n-1} \in U$.

Понятие $n$-лиевых алгебр является относительно новым. Намбу [1] заметил важность изучения свойств якобиана как $n$-умножения. Тождество $n$-лиевости впервые было выписано В. Т. Филипповым. В статьях [2, 3] он установил, что якобиан

$$\mathrm{Jac}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{Det}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

задает $n$-лиево умножение в пространстве многочленов. При этом он воспользовался условием коммутативности дифференцирований $\partial_1, \dots, \partial_n$.

Мы показываем, что для $n$-лиевости алгебры $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$, где $D_i \in \mathrm{Der}\, U$ — дифференцирования, условие коммутативности дифференцировании $D_1, \dots, D_n$ можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы система дифференцирований находилась в инволюции, другими словами — чтобы для любых $D_i, D_j$ было выполнено условие

$$[D_i, D_j] = \sum_{s=1}^{n} u_{i,j}^s D_s$$

для некоторых $u_{i,j}^s \in U$.

Иногда $n$-лиевы алгебры называются *алгебрами Намбу*, *Намбу — Тахтаджяна*. В настоящий момент они часто называются *алгебрами Филиппова*. Отметим также работу [4], близкую к нашей теме.

Пусть $(U, \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с умножением $\cdot$. Линейное отображение $D : U \to U$ называется *дифференцированием*, если

$$D(u \cdot v) = D(u) \cdot v + u \cdot D(v)$$

для всех $u, v \in U$. Пусть $\mathrm{Der}\, U$ — пространство дифференцирований алгебры $U$. Заметим, что

$$u \in U,\ D \in \mathrm{Der}\, U \Rightarrow u \cdot D \in \mathrm{Der}\, U,$$

где дифференцирование $u \cdot D$ определяется по правилу

$$(u \cdot D)(v) = u \cdot D(v).$$

Другими словами, $\mathrm{Der}\, U$ имеет структуру $U$-модуля. Говорят, что на $U$ задана *дифференциальная система* $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$, если $D_i \in \mathrm{Der}\, U$ для всех $i = 1, \dots, n$. Дифференциальная система $\mathscr{D}$ имеет *ранг* $n$, если $D_1 \wedge \dots \wedge D_n \neq 0$. Будем говорить, что дифференциальная система $\mathscr{D}$ *находится в инволюции*, если для любых $1 \leq i, j \leq n$, существуют $u_{i,j}^s \in U$ такие, что

$$[D_i, D_j] = \sum_{s=1}^{n} u_{i,j}^s \cdot D_s.$$

Предположим, что $U$ имеет два умножения: бинарное умножение $(u, v) \mapsto u \cdot v$, которое является ассоциативным и коммутативным, и $n$-арное умножение $\omega$. Определим $n$-арные полиномы

$$\mathrm{nlie}_2 = \mathrm{nlie}_2(\omega, t_1, \dots, t_{2n}), \quad \mathrm{nlie}_3 = \mathrm{nlie}_3(\omega, t_1, t_2, \dots, t_{n+1})$$

по правилам

$$\mathrm{nlie}_2(\omega, t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \\ = \omega(t_1 \cdot t_2, t_3, \dots, t_{n+1}) - t_1 \cdot \omega(t_2, \dots, t_{n+1}) - \omega(t_1, t_3, \dots, t_{n+1}) \cdot t_2,$$

$$\mathrm{nlie}_3(\omega, t_1, \dots, t_{2n}) = \sum_{i=n}^{2n} (-1)^{i+n} \omega(t_1, \dots, t_{n-1}, t_i) \cdot \omega(t_n, \dots, \hat{t_i}, \dots, t_{2n}).$$

Назовем $n$-лиеву алгебру $(U, \omega)$ *$n$-ли-пуассоновой*, если она обладает двумя умножениями $\cdot$, $\omega$ и кроме тождества $\mathrm{nlie}_1 = 0$ выполнено тождество $\mathrm{nlie}_2 = 0$. Назовем $n$-ли-луассонову алгебру $(U, \cdot, \omega)$ *строго $n$-ли-пуассоновой*, если она удовлетворяет также тождеству $\mathrm{nlie}_3 = 0$.

В [5] тождества $\mathrm{nlie}_1 = 0$ и $\mathrm{nlie}_3 = 0$ названы *фундаментальными тождествами типа* I и *типа* II и установлено, что алгебра $(U, \cdot, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ является $n$-ли-пуассоновой, а $(U, \mathrm{id} \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ — $(n+1)$-лиевой, если $\mathscr{D}$ образует коммутативную дифференциальную систему. Здесь $\mathrm{id} : U \to U$ — тождественное отображение.

Сформулируем основные результаты.

**Теорема 1.** *Пусть $U$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_1, \dots, D_n \in \mathrm{Der}\, U$. Если дифференциальная система $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ находится в инволюции, то алгебра $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ является строго $n$-ли-пуассоновой.*

**Следствие 2** [2, 3]. *Пусть $U$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_1, \dots, D_n \in \mathrm{Der}\, U$ и $[D_i, D_j] = 0$ для всех $1 \le i, j \le n$. Тогда алгебра $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ $n$-лиева.*

Пусть $M^m$ — $C^\infty$-многообразие и $\mathscr{F}(M)$ — алгебра $C^\infty$-функций на $M$. Дифференциальную систему на многообразии $M^m$ можно задать с помощью векторных полей или с помощью дифференциальных форм (см., например, [6]). Соответственно имеются две формулировки теоремы Фробениуса вполне интегрируемости дифференциальных систем. В одной форме теорема утверждает, что система вполне интегрируема, если и только если она находится в инволюции, т. е. векторные поля порождают лиеву структуру в пространстве функции. В другой форме она утверждает, что идеал дифференциальных форм должен быть замкнутым относительно операции внешнего дифференцирования. Мы даем третью версию вполне интегрируемости в терминах $n$-лиевых умножений.

Локально понятия векторного поля на $M$ и дифференцирования алгебры $\mathscr{F}(M)$ эквивалентны. Поэтому для таких $U$ обычные определения дифференциальных систем (распределений) на $M$ и условия их инволютивности (см., например, [7]) совместимы с нашими определениями.

В случае $U = \mathscr{F}(M)$ теорема 1 обратима.

**Теорема 3.** *Пусть $M^m$ — $C^\infty$-многообразие, $1 < n \le m$, и $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ — $C^\infty$-дифференциальная система на $M$ ранга $n$. Пусть $U = \mathscr{F}(M)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathscr{D}$ находится в инволюции,*

2) *алгебра $(\mathscr{F}(M), D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ $n$-лиева,*

3) *алгебра $(\mathscr{F}(M), \mathrm{id} \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ $(n+1)$-лиева.*

## 2. $n$-Лиевы свойства якобиана

Пусть $(U, \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра. Наделим пространство $T^*(U, U) = \bigoplus_k T^k(U, U)$ двумя видами умножения. Пусть $\psi \in T^k(U, U)$, $\phi \in T^s(U, U)$. Тогда умножения $\psi \cdot \phi \in T^{k+s}(U, U)$ и $\psi \wedge \phi \in T^{k+s}(U, U)$ определяются так:

$$(\psi \cdot \phi)(u_1, \dots, u_{k+s}) = \psi(u_1, \dots, u_k) \cdot \phi(u_{k+1}, \dots, u_{k+s}),$$

$$\psi \wedge \phi(u_1, \dots, u_{k+s}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_{k,s}} \operatorname{sign} \sigma\, \psi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) \cdot \phi(u_{\sigma(k+1)}, \dots, u_{\sigma(k+s)}),$$

где $\mathrm{Sym}_{k,s}$ — множество перестановок $\sigma \in \mathrm{Sym}_{k+s}$ таких, что $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$, $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+s)$. По линейности эти умножения продолжаются до умножений в $T^*(U,U) = \bigoplus_k T^k(U,U)$.

Пространство $T^*(U,U)$ имеет естественные структуры $U$-модулей:

$$(u \cdot \psi)(u_1, \dots, u_k) = u \cdot (\psi(u_1, \dots, u_k)).$$

Заметим, что $\operatorname{Der} U \subseteq T^1(U,U)$ является $U$-подмодулем. Алгебра $(T^*(U,U), \cdot)$ ассоциативна и коммутативна, и алгебра $(T^*(U,U), \wedge)$ ассоциативна и кососимметрична. Заметим, что

$$u \cdot (\psi \cdot \phi) = (u \cdot \psi) \cdot \phi = \psi \cdot (u \cdot \phi), \quad u \cdot (\psi \wedge \phi) = (u \cdot \psi) \wedge \phi = \psi \wedge (u \cdot \phi)$$

для всех $u \in U$, $\psi, \phi \in T^*(U,U)$.

Внешнее умножение $D_1, \dots, D_n \in \operatorname{Der} U$ можно определить так:

$$(D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_n} \operatorname{sign} \sigma (D_1(u_{\sigma(1)}) \dots D_n(u_{\sigma(n)}))$$

или

$$(D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_n} \operatorname{sign} \sigma (D_{\sigma(1)}(u_1) \dots D_{\sigma(n)}(u_n)).$$

Другими словами,

$$(D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{Det}(D_i(u_j))$$

является якобианом $u_1, \dots, u_n$ относительно дифференциальной системы $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$.

Наделим пространство $\wedge^n \operatorname{Der} U$ структурой присоединенного модуля над лиевой алгеброй $\operatorname{Der} U$:

$$[D, D_1 \wedge \dots \wedge D_n] = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} [D, D_s] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_s \dots \wedge D_n$$

(здесь обозначение $\widehat{D}_s$ означает, что $D_s$ опущен).

Определим линейный оператор $D_{u_1, \dots, u_{n-1}} : U \to U$ по правилу

$$D_{u_1, \dots, u_{n-1}}(v) = (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_{n-1}, v).$$

Легко видеть, что

$$D_{u_1, \dots, u_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1}) \cdot D_i. \tag{1}$$

Для $D_1, \dots, D_n \in \operatorname{Der} U$ определим линейный оператор

$$R_n : \wedge^{n-1} U \to \wedge^n \operatorname{Der} U$$

по правилу

$$\begin{aligned} &R_n(u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} ((D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot ([D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n]) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n)(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n) \end{aligned}$$

или кратко

$$R_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(D_1\wedge\dots\widehat{D}_i\dots\wedge D_n)\cdot[D_i,D_1\wedge\dots\wedge D_n]$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}([D_i,D_j]\wedge D_1\wedge\dots\widehat{D}_i\dots\widehat{D}_j\dots\wedge D_n)\cdot(D_1\wedge\dots\wedge D_n).$$

**Лемма 4.** *Умножение $D_1\wedge\dots\wedge D_n$ является $n$-лиевым, если и только если*

$$[D_{u_1,\dots,u_{n-1}},D_1\wedge\dots\wedge D_n]=0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathrm{nlie}_1(D_1\wedge\dots\wedge D_n,u_1,\dots,u_{2n-1})=D_{u_1,\dots,u_{n-1}}((D_1\wedge\dots\wedge D_n)(u_n,\dots,u_{2n-1}))$$
$$-\sum_{i=n}^{2n-1}(D_1\wedge\dots\wedge D_n)(u_n,\dots,u_{i-1},D_{u_1,\dots,u_{n-1}}(u_i),u_{i+1},\dots,u_{2n-1})$$
$$=[D_{u_1,\dots,u_{n-1}},D_1\wedge\dots\wedge D_n](u_n,\dots,u_{2n-1}).\quad\square$$

**Лемма 5.** *Пусть $(U,\cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_1,\dots,D_n\in\operatorname{Der}U$. Тогда $D_1\wedge\dots\wedge D_n$ является $n$-лиевым умножением на $U$, если и только если $R_n=0$.*

Доказательство. Согласно (1)

$$-[D_{u_1,\dots,u_{n-1}},D_1\wedge\dots\wedge D_n]=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i[D_{u_1,\dots,u_{n-1}},D_i]\wedge D_1\wedge\dots\widehat{D}_i\dots\wedge D_n$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j+n}[D_1\wedge\dots\widehat{D}_j\dots\wedge D_n(u_1,\dots,u_{n-1})\cdot D_j,D_i]\wedge D_1\wedge\dots\widehat{D}_i\dots\wedge D_n$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j+n}(D_1\wedge\dots\widehat{D}_j\dots\wedge D_n(u_1,\dots,u_{n-1}))\cdot([D_j,D_i]\wedge D_1\wedge\dots\widehat{D}_i\dots\wedge D_n)$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j+n}(D_i(D_1\wedge\dots\widehat{D}_j\dots\wedge D_n(u_1,\dots,u_{n-1}))\cdot(D_j\wedge D_1\wedge\dots\widehat{D}_i\dots\wedge D_n)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n}(D_1\wedge\dots\widehat{D}_j\dots\wedge D_n(u_1,\dots,u_{n-1}))$$
$$\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^i[D_j,D_i]\wedge D_1\wedge\dots\widehat{D}_i\dots\wedge D_n\right)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}(-1)^nD_i(D_1\wedge\dots\widehat{D}_i\dots\wedge D_n(u_1,\dots,u_{n-1}))\cdot(D_i\wedge D_1\wedge\dots\widehat{D}_i\dots\wedge D_n)=Z_1+Z_2,$$

где

$$Z_1=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n+1}(D_1\wedge\dots\widehat{D}_j\dots\wedge D_n(u_1,\dots,u_{n-1}))\cdot([D_j,D_1\wedge\dots\wedge D_n]),$$

$$Z_2=Y_2\cdot(D_1\wedge\dots\wedge D_n),$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} D_i(D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})).$$

Заметим, что

$$(-1)^n Y_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} (-1)^{i+j} [D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Итак,

$$[D_{u_1,\dots,u_{n-1}}, D_1 \wedge \dots \wedge D_n] = Z_1 + Z_2$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+n+1} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot ([D_j, D_1 \wedge \dots \wedge D_n])$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} (-1)^{i+j+n} ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n(u_1, \dots, u_{n-1})) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$= R_n(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Следовательно, по лемме 4 $n$-лиевость умножения $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ эквивалентна условию $R_n = 0$. $\square$

**Лемма 6.** *Пусть $(U, \cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_i \in \operatorname{Der} U$, $i = 1, \dots, n$. Тогда алгебра $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ удовлетворяет тождествам $\mathrm{nlie}_2 = 0$ и $\mathrm{nlie}_3 = 0$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathrm{nlie}_2 = 0$ — тождество для $(U, \cdot, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$, если $D_i \in \operatorname{Der} U$.

Заметим, что $X = \mathrm{nlie}_3(D_1 \wedge \dots \wedge D_n, u_1, \dots, u_{2n})$ кососимметричен относительно $n + 1$ аргументов $(u_n, \dots, u_{2n})$. Более того, $X$ — кососимметрическая сумма элементов вида $a \cdot D_{i_1}(u_n) \dots D_{i_{n+1}}(u_{2n})$, где $a = a(u_1, \dots, u_{n-1}) \in U$ и $i_1, \dots, i_{n+1}$ пробегает $n$-элементное множество $\{1, \dots, n\}$. Значит, $\mathrm{nlie}_3(D_1 \wedge \dots \wedge D_n, u_1, \dots, u_{2n}) = 0$ для всех $D_1, \dots, D_n \in \operatorname{Der} U$, $u_1, \dots, u_{2n} \in U$. $\square$

**Лемма 7.** *Пусть $(U, \cdot, \omega)$ — строго $n$-ли-пуассонова алгебра и $a \in U$. Определим новое умножение $a \cdot \omega : \wedge^n U \to U$ по правилу*

$$(a \cdot \omega)(u_1, \dots, u_n) = a \cdot (\omega(u_1, \dots, u_n)).$$

*Тогда $(U, \cdot, a \cdot \omega)$ строго $n$-ли-пуассонова.*

Доказательство. Поскольку

$$\mathrm{nlie}_2(a \cdot \omega, u_1, \dots, u_{n+1}) = a \cdot \mathrm{nlie}_2(\omega, u_1, \dots, u_{n+1}),$$

тождество $\mathrm{nlie}_2 = 0$ для умножения $a \cdot \omega$ очевидно.

Согласно тождеству $\mathrm{nlie}_2 = 0$ имеем

$$\mathrm{nlie}_1(a \cdot \omega, u_1, \dots, u_{2n-1}) = a \cdot \omega(u_1, \dots, u_{n-1}, a \cdot \omega(u_n, \dots, u_{2n-1}))$$
$$- \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} a \cdot \omega(a \cdot \omega(u_1, \dots, u_{n-1}, u_i), u_n, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{2n-1})$$
$$= (a \cdot a) \cdot \Big( \omega(u_1, \dots, u_{n-1}, \omega(u_n, \dots, u_{2n-1}))$$

$$- \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} (a\cdot a)\cdot \omega(\omega(u_1,\dots,u_{n-1},u_i),u_n,\dots,\hat{u}_i,\dots,u_{2n-1}))$$

$$+ a\cdot \omega(u_1,\dots,u_{n-1},a)\cdot \omega(u_n,\dots,u_{2n-1})\Big)$$

$$- \sum_{i=n}^{2n-1} (-1)^{i+n} a\cdot \omega(u_1,\dots,u_{n-1},u_i)\cdot \omega(a,u_n,\dots,\hat{u}_i,\dots,u_{2n-1})$$

$$= (a\cdot a)\cdot \mathrm{nlie}_1(\omega,u_1,\dots,u_{2n-1}) + a\cdot \mathrm{nlie}_3(\omega,u_1,\dots,u_{n-1},a,u_n,\dots,u_{2n-1}).$$

Значит,

$$\mathrm{nlie}_1(a\cdot\omega,u_1,\dots,u_{2n-1})=0$$

для всех $a,u_1,\dots,u_{2n-1}\in U$. Итак, $(U,a\cdot\omega)$ является $n$-лиевой для любого $a\in U$, если $(U,\cdot,\omega)$ строго $n$-ли-пуассонова.

Далее,

$$\mathrm{nlie}_3(a\cdot\omega,u_1,\dots,u_{2n}) = (a\cdot a)\cdot\sum_{i=n}^{2n}(-1)^{i+n}\omega(u_1,\dots,u_{n-1},u_i)$$

$$\cdot\,\omega(u_n,\dots,\hat{u}_i,\dots,u_{2n}) = (a\cdot a)\cdot \mathrm{nlie}_3(\omega,u_1,\dots,u_{2n}).$$

Итак,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{nlie}_3(a\cdot\omega,u_1,\dots,u_{n+1})\\
&= a\cdot\omega(u_1\cdot u_2,u_3,\dots,u_{n+1}) - u_1\cdot(a\cdot\omega(u_2,\dots,u_{n+1})) - a\cdot(\omega(u_1,u_3,\dots,u_{n+1})\cdot u_2)\\
&= (a\cdot\omega)(u_1\cdot u_2,u_3,\dots,u_{n+1}) - u_1\cdot(a\cdot\omega(u_2,\dots,u_{n+1})) - (a\cdot\omega)(u_1,u_3,\dots,u_{n+1})\cdot u_2\\
&= a\cdot \mathrm{nlie}_3(\omega,u_1,u_2,\dots,u_{n+1}).
\end{aligned}$$

Другими словами, $(U,\cdot,a\cdot\omega)$ строго $n$-ли-пуассонова, если $(U,\cdot,\omega)$ строго $n$-ли-пуассонова. □

**Лемма 8.** *Пусть $(U,\cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированиями $D_1,\dots,D_n$. Предположим, что $(U,\cdot,D_1\wedge\dots\wedge D_n)$ является $n$-лиевой. Для любого $u_{i,j}\in U$ построим новые дифференцирования $D'_i$ по правилу*

$$D'_i=\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}D_j.$$

*Тогда алгебра $(U,\cdot,D'_1\wedge\dots\wedge D'_n)$ является строго $n$-ли-пуассоновой.*

Доказательство. По лемме 6 достаточно проверить, что $\mathrm{nlie}_1=0$ — тождество для умножения $D'_1\wedge\dots\wedge D'_n$.

Заметим, что

$$D'_1\wedge\dots\wedge D'_n = a\cdot D_1\wedge\dots\wedge D_n$$

для $a=\mathrm{Det}(u_{i,j})\in U$. По лемме 6 $(U,\cdot,D_1\wedge\dots\wedge D_n)$ строго $n$-ли-пуассонова. Поэтому по лемме 7 алгебра $(U,\cdot,D'_1\wedge\dots\wedge D'_n)$ $n$-ли-пуассонова. □

Пусть $S_{k,m}$ — множество упорядоченных индексов $\tau=(i_1,\dots,i_k)$ таких, что $1\le i_1<\dots<i_k\le m$. Положим в таких случаях $\tau(1)=i_1,\dots,\tau(k)=i_k$. Для любого $\tau=(i_1,\dots,i_k)\in S_{k,m}$ пусть $\tau^*=(j_1,\dots,j_{m-k})\in S_{m-k,m}$, где $\{i_1,\dots,i_k\}\cup\{j_1,\dots,j_{m-k}\}=\{1,\dots,m\}$. Заметим, что $S_{m,m}$ состоит из одного элемента $(1,2,\dots,m)$.

**Лемма 9.** *Пусть $(U,\cdot)$ — ассоциативная коммутативная алгебра без делителей нуля. Предположим, что $D_i \in \operatorname{Der} U$, $1 \le i \le m$, и $D_1 \wedge \dots \wedge D_m \neq 0$. Тогда внешние формы $D_\tau = D_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge D_{\tau(k)}$ такие, что $\tau \in S_{k,m}$, являются $U$-линейно независимыми для любого $k \le m$.*

Доказательство. Ясно, что

$$D_\tau \wedge D_\sigma = 0, \text{ если } \tau^* \neq \sigma; \quad D_\tau \wedge D_\sigma = \pm D_1 \wedge \dots \wedge D_n, \text{ если } \tau^* = \sigma.$$

Допустим, что

$$\sum_{\tau \in S_{k,m}} u_\tau D_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge D_{\tau(k)} = 0.$$

Для любого $\tau_0 \in S_{k,m}$ умножим обе части этого соотношения на $D_{\tau_0^*}$. Получаем, что

$$u_\tau D_1 \wedge \dots \wedge D_n = 0.$$

Итак, $u_\tau = 0$ для любого $\tau \in S_{k,m}$.

**Лемма 10.** *Пусть $U$ — ассоциативная коммутативная алгебра без делителей нуля и $D_1, \dots, D_m$ — дифференцирования алгебры $U$ такие, что $D_1 \wedge \dots \wedge D_m \neq 0$. Пусть $n \le m$. Предположим, что для любого $1 \le i, j \le n$ существует $u_{i,j}^s \in U$, $1 \le s \le m$, такое, что*

$$[D_i, D_j] = \sum_{s=1}^m u_{i,j}^s D_s$$

*и $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ является $n$-лиевым умножением на $U$. Тогда система $\mathscr{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ находится в инволюции.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot ([D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n])$$
$$= \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^m (-1)^{i+j} u_{i,j}^s \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_s \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) Z_1 + Z_2,$$

где

$$Z_1 = \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+1} u_{i,j}^j \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n),$$

$$Z_2 = \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=n+1}^m (-1)^{i+1} u_{i,j}^s \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_{j-1} \wedge D_s \wedge D_{j+1} \wedge \dots \wedge D_n).$$

Аналогично

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j} ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i<j} \sum_{s=1}^m (-1)^{i+j} u_{i,j}^s \cdot (D_s \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n) T_1 + T_2,$$

где

$$T_1 = \sum_i (-1)^i \sum_j u^j_{i,j}(D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n),$$

$$T_2 = \sum_{i<j} \sum_{s=n+1}^{m} (-1)^{i+j} u^s_{i,j} \cdot (D_s \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n).$$

Тогда $Z_1+T_1 = 0$ и $R_n = Z_2+T_2$. По лемме 5 $R_n = 0$, если умножение $D_1\wedge\dots\wedge D_n$ $n$-лиево. В частности, для любых $v_1, \dots, v_{n-1} \in U$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=n+1}^{m} a_{j,s} \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_{j-1} \wedge D_s \wedge D_{j+1} \wedge \dots \wedge D_n) + b_1 \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n) = 0,$$

где

$$a_{j,s} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u^s_{i,j} \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n)(v_1, \dots, v_{n-1}) \in U, \quad n < s \le m,$$

$$b_1 = \sum_{i<j} \sum_{s=n+1}^{m} (-1)^{i+j} u^s_{i,j} \cdot (D_s \wedge D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \widehat{D}_j \dots \wedge D_n)(v_1, \dots, v_{n-1}) \in U.$$

Поэтому по лемме 9 для любых $(j,s)$ таких, что $j \le n < s \le m$, имеем $a_{j,s} = 0$, иначе говоря,

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u^s_{i,j} \cdot (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) = 0.$$

Воспользуемся снова леммой 9. Получаем, что $u^s_{i,j} = 0$ для любых $(i,j,s)$ таких, что $i \le n$, $j \le n$, $n < s \le m$. Другими словами,

$$[D_i, D_j] = \sum_{s=1}^{n} u^s_{i,j} D_s, \quad 1 \le i, j \le n. \quad \square$$

## 3. Доказательство теоремы 1

По лемме 6 достаточно проверить, что $n$-лиево условие для умножения $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ выполнено. Свойство инволютивности понадобится при проверке условия $\mathrm{nlie}_1 = 0$.

Имеем

$$[D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n] = \sum_{j=1}^{n} D_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{[D_i, D_j]}_{j} \wedge \dots \wedge D_n$$

$$= \sum_{j,s=1}^{n} u^s_{i,j} D_1 \wedge \dots \wedge D_{j-1} \wedge D_s \wedge D_{j+1} \wedge \dots \wedge D_n = \sum_{j=1}^{n} u^j_{i,j} D_1 \wedge \dots \wedge D_n.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot [D_i, D_1 \wedge \dots \wedge D_n]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+1} u^j_{i,j} (D_1 \wedge \dots \widehat{D}_i \dots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \dots \wedge D_n).$$

Далее, для $i < j$

$$[D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \ldots \widehat{D}_j \cdots \wedge D_n = \sum_{s=1}^{n} u_{i,j}^s D_s \wedge D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \ldots \widehat{D}_j \cdots \wedge D_n$$
$$= u_{i,j}^i D_i \wedge D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \ldots \widehat{D}_j \cdots \wedge D_n + u_{i,j}^j D_j \wedge D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \ldots \widehat{D}_j \cdots \wedge D_n$$
$$= (-1)^{i+1} u_{i,j}^i D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_j \cdots \wedge D_n + (-1)^j u_{i,j}^j D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \cdots \wedge D_n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j} ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \ldots \widehat{D}_j \cdots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i<j} (-1)^{j+1} u_{i,j}^i (D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_j \cdots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i} u_{i,j}^j (D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \cdots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i>j} (-1)^{i+1} u_{j,i}^j (D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \cdots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i} u_{i,j}^j (D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \cdots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)$$
$$(\text{поскольку } u_{i,j}^s = -u_{j,i}^s)$$
$$= \sum_{i>j} (-1)^{i} u_{i,j}^j (D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \cdots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i} u_{i,j}^j (D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \cdots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)$$
$$= \sum_{i} (-1)^{i} \sum_{j} u_{i,j}^j (D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \cdots \wedge D_n) \cdot (D_1 \wedge \cdots \wedge D_n).$$

Итак,

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \cdots \wedge D_n) \cdot [D_i, D_1 \wedge \cdots \wedge D_n]$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} ([D_i, D_j] \wedge D_1 \wedge \ldots \widehat{D}_i \ldots \widehat{D}_j \cdots \wedge D_n) \cdot D_1 \wedge \cdots \wedge D_n = 0.$$

Поэтому по лемме 5 $D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ является $n$-лиевой. $\square$

## 4. Доказательство теоремы 3

Наши рассмотрения являются локальными. Известно, что локально понятия векторного поля на $M$ и дифференцирования на $U = \mathscr{F}(M)$ эквивалентны.

Если $\mathscr{D}$ находится в инволюции, то согласно теореме 1 алгебра $(U, D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)$ является $n$-лиевой.

Обратно, предположим, что алгебра $(U, D_1 \wedge \cdots \wedge D_n)$ $n$-лиева. Докажем, что система $\mathscr{D}$ находится в инволюции.

Будем следовать рассуждениям, приведенным в доказательстве теоремы Фробениуса [6, гл. VII, теорема 2.1]. Пусть $x_0$ — любая точка в $M$. Возьмем локальные координаты $x^1, \ldots, x^m$, равные нулю в $x_0$, такие, что векторные поля $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$ порождают слой $V_{x_0}$ — $n$-мерное подпространство в $T_{x_0}M$. Мы можем взять открытую окрестность точки $x_0$ такую, что $C^\infty$-векторные поля $D_1, \dots, D_n$ имеют вид

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_j^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\alpha_j^k(x_0) = 0$ для всех $j, k$. Тогда $n \times n$-матрица $I_n + \left(\alpha_j^k(x)\right)_{1 \le j,k \le n}$ обратима при всех $x \in W$ для бесконечно малого $W$. Пусть $\left(\beta_j^k(x)\right)_{1 \le j,k \le n}$ — ее обратная матрица. Тогда векторные поля $D'_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_j^k D_k$ имеют вид

$$D'_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_{i,j}^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad 1 \le j \le n.$$

Положим

$$D'_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad n < j \le m.$$

Заметим, что $(D'_1 \wedge \dots \wedge D'_m)(x^1, \dots, x^m) = 1$. Следовательно, $D'_1 \wedge \dots \wedge D'_m \neq 0$. Далее, для всех $1 \le i, j \le n$ коммутатор $[D'_i, D'_j]$ является $U$-линейной комбинацией дифференцирований $D'_1, \dots, D'_m$. По лемме 10 $(U, D'_1 \wedge \dots \wedge D'_n)$ $n$-лиева, поскольку $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ $n$-лиева. По лемме 10 $[D'_i, D'_j]$ является $U$-линейной комбинацией дифференцирований $D'_1, \dots, D'_n$.

Отметим, что выражение для $D_i$ начинается с $\partial/\partial x^i$, но $[D'_i, D'_j]$ не имеет $\partial/\partial x^s$-компоненты, если $s \le n$. Следовательно, $[D'_i, D'_j] = 0$, $1 \le i, j \le n$. Итак, система $D_i, 1 \le i \le n$, как $U$-линейная комбинация коммутативных векторных полей $D'_j, 1 \le j \le n$, находится в инволюции.

Пусть алгебра $(U, \omega)$ $(n+1)$-лиева для $\omega = \mathrm{id} \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_n$. Тогда $i(1)\omega = D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ и согласно результатам [2] алгебра $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ является $n$-лиевой. Обратно, если $(U, D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ — $n$-лиева алгебра, то по теореме 6.3 работы [5] алгебра $(U, \mathrm{id} \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ также является $(n+1)$-лиевой. $\square$

В заключение хотел бы выразить благодарность рецензенту за тщательное изучение моего скромного труда и за ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Nambu Y.* Generalized Hamiltonian mechanics // Phys. Rev. 1973. V. 7. P. 2405–2412.
2. *Филиппов В. Т.* $n$-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 126–140.
3. *Филиппов В. Т.* Об $n$-лиевой алгебре якобианов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 660–669.
4. *Пожидаев А. П.* Мономиальные $n$-лиевы алгебры // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 5. С. 542–567.
5. *Dzhumadil'daev A. S.* Identities and derivations for jacobian algebras // Contemp. Math. 2002. V. 315. P. 245–278.
6. *Flanders H.* Differential forms with applications to the physical sciences. New York; London: Acad. Press, 1963.
7. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов. М.: Мир, 1984.


*Статья поступила 4 февраля 2005 г., окончательный вариант — 12 января 2006 г.*

*Аскар Джумадильдаев*
*Институт математики Академии наук Республики Казахстан, Алматы, Казахстан*
*Казахско-Британский Университет, Алматы, Казахстан*
askar@math.kz