Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 512.5

О ФОРМУЛЬНОСТИ И АЛГЕБРАИЧНОСТИ МНОЖЕСТВ АННУЛИРУЮЩИХ И ПОРОЖДАЮЩИХ НАБОРОВ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко

Аннотация: Исследуются формульные, диофантовы и алгебраические подмножества в множестве всех упорядоченных наборов, порождающих группу, либо порождающих группу как нормальную подгруппу для некоторых разрешимых относительно свободных групп.

Ключевые слова: порождающий набор, аннулирующий набор, диофантово множество, алгебраическое множество, формульное множество, разрешимая группа, нильпотентная группа.

1. Введение

Пусть G — некоторая группа. Свяжем с группой G языки первого порядка Λ и Λ_G. Алфавит языка Λ состоит из символов переменных, логических связок и функциональных символов $\cdot, {}^{-1}$. Дополняя язык Λ предметными константами c_g для всех $g \in G$, получим язык Λ_G.

Элементарной теорией $\mathrm{Th}(G)$ *группы* G называется совокупность всех предложений языка Λ (Λ_G), истинных в группе G.

Множество

$$G^r = \{(g_1, \dots, g_r) \mid g_i \in G\}$$

называется *аффинным r-мерным пространством над группой G*.

Подмножество M пространства G^r называется *формульным* (*относительно формульным*), если существует формула $\Phi(x_1, \dots, x_r)$ языка Λ (Λ_G) со свободными переменными $x_1, \dots, x_r$ такая, что $(g_1, \dots, g_r) \in M$ тогда и только тогда, когда $\Phi(g_1, \dots, g_r) \in \mathrm{Th}(G)$.

Следуя А. И. Мальцеву [1], «по аналогии с элементарной арифметикой отношение $\Phi(x_1, \dots, x_r)$ между элементами группы G с фиксированными элементами $a_1, \dots, a_n$ условимся называть *диофантовым отношением*, если

$$\Phi(x_1, \dots, x_r) \rightleftharpoons \exists y_1 \dots \exists y_t \big(x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} y_{j_1}^{\beta_{j_1}} a_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \dots x_{i_u}^{\alpha_{i_u}} y_{j_u}^{\beta_{j_u}} a_{l_u}^{\gamma_{l_u}} = 1\big),$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i = -1, 0, 1$». Диофантово отношение выделяет в пространстве G^r диофантово подмножество.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05.01.00292), научной программы МО РФ «Фундаментальные исследования высшей школы. Университеты России» (проект УР. 04.01.031).

Напомним понятие алгебраического множества над группой G. Более полную информацию можно получить из работы [2]. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, $F(X)$ — свободная группа с множеством порождающих X. Свободное произведение $G * F(X)$ называется *свободной G-группой* и обозначается через $G[X]$.

Пусть $S \subseteq G[X]$. Тогда множество решений

$$V_G(S) = \{p \in G^r \mid f(p) = 1 \text{ для всех } f \in S\}$$

называется *алгебраическим множеством над группой G, определенным множеством уравнений S*.

В том случае, когда группа G принадлежит некоторому многообразию $\mathbf{M}$, вместо группы $G[X]$ рассматривают группу $G_{\mathbf{M}}[X]$ — свободное произведение в многообразии $\mathbf{M}$ группы G и свободной группы $F_{\mathbf{M}}(X)$ многообразия $\mathbf{M}$ ранга r.

Очевидно, что любое алгебраическое множество, определенное конечным множеством уравнений S, является относительно формульным.

Пусть G — группа, свободная в некотором многообразии $\mathbf{M}$, и $\{a_1, \dots, a_r\}$ — ее базис. Через $B(G)$ обозначим множество упорядоченных наборов элементов группы длины r, порождающих эту группу:

$$B(G) = \{(g_1, \dots, g_r) \mid g_i \in G,\ \mathrm{gr}\langle g_1, \dots, g_r\rangle = G\}.$$

Если G — хопфова группа, то $B(G)$ — множество базисов группы G.

Элемент g группы G называется *тестовым*, если каждый эндоморфизм φ группы G, оставляющий элемент g неподвижным, является автоморфизмом, т. е. из условия $\varphi(g) = g$ следует, что φ — автоморфизм.

Ясно, что элемент $w(a_1, \dots, a_r)$ относительно свободной хопфовой группы G с базисом $\{a_1, \dots, a_r\}$ тогда и только тогда является тестовым, если все решения уравнения

$$w(x_1, \dots, x_r) = w(a_1, \dots, a_r) \tag{1}$$

лежат в $B(G)$. Другими словами, $w(a_1, \dots, a_r)$ — тестовый элемент, если алгебраическое множество, определенное уравнением (1), лежит в $B(G)$.

Упорядоченное множество элементов $\{g_1, \dots, g_m\}$ группы G называется *аннулирующим набором*, если нормальное замыкание этого множества совпадает со всей группой G.

Пусть G — некоторая r-порожденная группа. Через $DB(G)$ обозначим множество всех упорядоченных аннулирующих наборов элементов группы G длины r.

В данной работе мы исследуем формульные, диофантовы и алгебраические подмножества множеств порождающих и аннулирующих наборов для некоторых относительно свободных разрешимых групп. Вначале мы докажем, что в свободных группах конечного ранга многообразия $\mathbf{AN}_c$ — произведения многообразий абелевых и нильпотентных групп класса нильпотентности $\leq c$ — множество аннулирующих наборов является формульным множеством. Далее замечаем, что для свободной абелевой группы G множество $B(G)$ не является относительно формульным. Для доказательства мы используем метод относительной элементарной определимости.

Предположим, что G — свободная метабелева группа ранга два с базой $\{a_1, a_2\}$. Рассмотрим два диофантовых подмножества D_1 и D_2 из G, определенных формулами $\Phi_1(x_1, x_2)$ и $\Phi_2(x_1, x_2)$:

$$\Phi_1(x_1, x_2) \rightleftharpoons \exists z([x_1, x_2] = z[a_1, a_2]z^{-1}), \quad \Phi_2(x_1, x_2) \rightleftharpoons \exists z([x_1, x_2] = z[a_2, a_1]z^{-1}).$$

Множество $B(G)$ является объединением множеств D_1 и D_2, и, следовательно, D_1 и D_2 относительно формульны.

Мы не знаем, является ли формульным множество порождающих в свободной разрешимой группе $F_r(\mathbf{A}^n)$ при $n \geq 2$ и $r \geq 3$. Однако доказываем, что это множество нельзя выделить формулами специального вида, допуская даже бесконечные конъюнкции. Имеет место следующий факт: множество баз $B(G)$ группы $G = F_r(\mathbf{A}^n)$ не является объединением конечного числа алгебраических множеств.

Последний результат касается диофантовых подмножеств из $B(G)$ для группы $G = F_r(\mathbf{A}^n)$. Как показал В. А. Романьков [3], группа $F_2(\mathbf{A}^3)$ содержит тестовые элементы. Поэтому множество ее баз содержит непустые диофантовы подмножества. Возникает вопрос о диофантовых подмножествах из $B(G)$ для группы $G = F_r(\mathbf{A}^n)$ при других значениях n и r.

Оказывается, что все диофантовы подмножества из $B(G)$ являются пустыми при $n = 1$ и $r \geq 2$, а также при $n \geq 2$ и $r \geq 3$. Отсюда следует, в частности, что группа $F_r(\mathbf{A}^n)$ при $r \geq 3$ не имеет тестовых элементов.

Будем придерживаться следующих обозначений. Сопряжение определим по формуле $x^y = yxy^{-1}$, коммутатор $[x, y]$ равен $xyx^{-1}y^{-1}$. Если F — свободная группа с базисом $\{x_1, \dots, x_r\}$, R — нормальная подгруппа из F, то на фактор-группе по коммутанту F/R' можно ввести левые производные Фокса $\partial g/\partial x_i$, соответствующие выбранному базису, и рассматривать их значения в групповом кольце $\mathbf{Z}(F/R)$. Все необходимые сведения о производных Фокса можно найти в [4]. Напомним, что

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varepsilon(v) + u\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\varepsilon : \mathbf{Z}(F) \to \mathbf{Z}$ — операция тривиализации.

Пусть $v(x_1, \dots, x_r)$ — элемент группы F, $g_i \in F/R'$, $a_i \in R/R'$. Тогда имеет место следующая формула (см., например, [5]):

$$v(a_1 g_1, \dots, a_r g_r) = a_1^{\partial v(\mathbf{g})/\partial x_1} \dots a_r^{\partial v(\mathbf{g})/\partial x_r} \cdot v(g_1, \dots, g_r), \tag{2}$$

где $\partial v(\mathbf{g})/\partial x_i$ — значение производной $\partial v/\partial x_i$ в точке $\mathbf{g} = (g_1 R, \dots, g_r R)$ из группы $F/R \times \dots \times F/R$.

2. Формульность аннулирующих наборов групп $F_r(AN_c)$

Теорема 1. *Пусть $c \geq 2$, F — свободная группа ранга $r \geq 2$, $G = F/[\gamma_c(F), \gamma_c(F)]$. Множество аннулирующих наборов группы G является формульным.*

Доказательство. Отметим некоторые формульные подмножества группы G. Обозначим $A = \gamma_c(G)$.

1. Коммутант G' группы G имеет конечную ширину n (см. [6]). Поэтому

$$g \in G' \Leftrightarrow \exists g_1 \exists h_1 \dots \exists g_n \exists h_n (g = [g_1, h_1] \dots [g_n, h_n]).$$

2. В [7] замечено, что

$$g \in \gamma_c(G) \Leftrightarrow \forall x([g^x, g] = 1).$$

3. Множество элементов группы G, примитивных по модулю коммутанта G', является формульным.

Рассмотрим формулу

$$P(g) \rightleftharpoons (\forall g_1)(\forall d \in G')(\forall a_1 \in A)(\exists a_2 \in A)([g_1, gd] = 1 \to [g_1, a_1] = [gd, a_2]). \quad (3)$$

Докажем, что элемент g удовлетворяет формуле (3) тогда и только тогда, когда элемент gG' можно включить в базис группы G/G'.

Предположим, что gG' — примитивный элемент из группы G/G'. Если $[g_1, gd] = 1$ для некоторого $d \in G'$, то элемент g_1 является степенью элемента gd (см., например, [8]). Пусть $g_1 = (gd)^m$, $m \in \mathbf{Z}$. Тогда при $m \geq 1$ для любого $a_1 \in A$ имеем

$$[g_1, a_1] = [(gd)^m, a_1] = \left[gd, a_1^{((gd)^m - 1)/(gd-1)}\right] = [gd, a_2].$$

При $m \leq 0$ можно воспользоваться равенством

$$[x^{-1}, a] = [x, x^{-1}a^{-1}x].$$

Предположим теперь, что g — не примитивный элемент по модулю G'. Это означает, что найдутся $d \in G'$ и примитивный элемент $z \in G$ такие, что $gd = z^m$, $m \geq 2$. Предположим, что тем не менее для любого $a_1 \in A$ существует $a_2 \in A$ такой, что

$$[z, a_1] = [z^m, a_2]. \quad (4)$$

Пусть $y_1, \dots, y_r$ — базис свободной метабелевой группы $\overline{G} = G/G''$ и y_1 — образ элемента z при естественном гомоморфизме $G \to G/G''$. Тогда в группе $\overline{G}$ при $a = [y_1, y_2, \dots, y_2] \in A$ разрешимо уравнение

$$[y_1, a] = \left[y_1^m, b\right] \quad (5)$$

относительно $b \in \overline{G}'$. Вычислим производную по y_1 от левой и правой частей (5). Получим в кольце $\mathbf{Z}(G/G')$ равенство

$$(1 - y_2)^{c-1}(y_1 - 1) = \alpha\left(y_1^m - 1\right) \quad (6)$$

для некоторого $\alpha \in \mathbf{Z}(G/G')$. При $m \geq 2$ равенство (6) невозможно.

Запишем теперь формулу $\Phi(g_1, \dots, g_r)$, выделяющую аннулирующие наборы в группе G. Пусть $\{g_1, \dots, g_r\}$ — аннулирующий набор. Группа G/A нильпотентна, и, следовательно, элементы $\{g_1, \dots, g_r\}$ порождают ее по модулю A. По лемме из [6] каждый элемент из коммутанта G' можно записать в виде

$$d = \prod_{i=1}^{r} [g_i, f_i] \cdot d_1,$$

где $f_i \in G$, $d_1 \in [G, A]$. Любой элемент $g \in G$ можно представить в виде

$$g = \prod w_j^{m_j} \cdot \bar{a}, \quad (7)$$

где $m \in \mathbf{Z}$, w_j — базисные коммутаторы веса $\leq c$, построенные на элементах аннулирующего набора $g_1, \dots, g_r$, а $\bar{a} \in A$.

Так как для любого $a' \in A$, любого $h \in G$ и $m \in \mathbf{Z}$ существует элемент $a'' \in A$ такой, что

$$[h^m, a'] = [h, a'']$$

и для любых w_p, w_q имеет место равенство

$$[w_p w_q, a'] = [w_p, a'][w_q, a'][w_q, b]$$

при некотором $b \in A$, то коммутаторы вида $[g, a]$ можно представить в виде произведения коммутаторов $[w, \tilde{a}]$, где w — базисные коммутаторы, входящие в запись (7), а $\tilde{a}$ — некоторые элементы из A. Наконец, так как $[w, \tilde{a_1}][w, \tilde{a_2}] = [w, \tilde{a_1}\tilde{a_2}]$, элементы $\{g_1, \dots, g_r\}$ удовлетворяют формуле

$$\Phi_1(g_1, \dots, g_r) \rightleftharpoons (\forall d \in G')(\exists f_1 \dots \exists f_r)(\exists a_1 \dots \exists a_t \in A) \left(d = \prod_{i=1}^{r}[g_i, f_i] \cdot \prod_{j=1}^{t}[w_j(g_1, \dots, g_r), a_j]\right). \quad (8)$$

Здесь $w_j(g_1, \dots, g_r)$ — произвольные базисные коммутаторы веса $\leq c$. В качестве формулы $\Phi(g_1, \dots, g_r)$ рассмотрим

$$\Phi(g_1, \dots, g_r) \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{r} P(g_i) \wedge (\forall g)(\exists h_1 \dots \exists h_r)(\exists f_1 \dots \exists f_r)(\exists a_1 \dots \exists a_t \in A) \left(\bigwedge_{i=1}^{r}[g_i, h_i] = 1 \wedge g = h_1 \dots h_r \cdot \prod_{i=1}^{r}[g_i, f_i] \cdot \prod_{j=1}^{t}[w_j(g_1, \dots, g_r), a_j]\right). \quad (9)$$

Из вышесказанного следует, что аннулирующие наборы $\{g_1, \dots, g_r\}$ удовлетворяют формуле (9).

Предположим, что элементы $\{g_1, \dots, g_r\}$ удовлетворяют формуле (9). Так как $\{g_1, \dots, g_r\}$ примитивны по модулю G', то h_i суть степени g_i. Значит, любой элемент $g \in G$ лежит в нормальном замыкании элементов $\{g_1, \dots, g_r\}$. Теорема доказана.

Предложение 1. *Пусть G — разрешимая группа. Элементы $\{g_i \mid i \in I\}$ порождают нормальную подгруппу R, совпадающую с группой G, тогда и только тогда, когда их образы $\bar{g}_i$ в группе $\overline{G} = G/G'$ порождают группу $\overline{G}$.*

Доказательство. Предположим, что элементы $\{g_i \mid i \in I\}$ порождают группу $\overline{G} = G/G'$. Пусть g — произвольный элемент из группы G. Тогда g сравним с некоторым элементом g_1 из коммутанта G' по модулю нормальной подгруппы R, элемент g_1 сравним с некоторым элементом $g_2 \in G''$ по модулю R, и т. д. Так как $G^{(m)} = 1$ для некоторого m, то $g \in R$.

Обратно, пусть $R = G$. Элементы $\{\bar{g}_i \mid i \in I\}$ порождают абелеву группу $\overline{R} = \overline{G}$. Утверждение доказано.

Следствие. *Предикат $P(g_1, \dots, g_r)$, выделяющий вырождающие наборы в свободной разрешимой группе $G = F_r(\mathbf{A}^n)$, является формульным при $r \geq 2$ в сигнатуре Λ_G.*

Доказательство. Из предложения 1 получаем, что элементы $\{g_1, \dots, g_r\}$ образуют вырождающий набор тогда и только тогда, когда их образы в свободной метабелевой группе G/G'' образуют вырождающий набор. Хорошо известно, что коммутанты группы G являются формульными в сигнатуре Λ_G, а предикат $P(g_1, \dots, g_r)$ формулен в группе G/G'' по теореме 1. Отсюда получаем требуемое утверждение.

3. Алгебраические и формульные подмножества множества баз свободной разрешимой группы

Теория T называется *наследственно неразрешимой*, если любая подтеория теории T той же сигнатуры неразрешима.

Пусть L_0 — класс моделей сигнатуры $\sigma_0 = \langle P_0^{n_0}, \dots, P_l^{n_l} \rangle$, L_1 — класс моделей сигнатуры σ_1. Говорят, что класс L_0 *относительно элементарно определим в классе* L_1, если существуют такие формулы

$$\Re(\bar{x}, \bar{y}), \quad \Im(\bar{x}, \bar{y}^1, \bar{y}^2), \quad \aleph_0(\bar{x}, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{n_0}), \dots, \aleph_l(\bar{x}, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{n_l})$$

сигнатуры σ_1 (здесь $\bar{x} \rightleftharpoons (x_1, \dots, x_n), \bar{y}^i \rightleftharpoons (y_1^i, \dots, y_m^i)$), что для любой модели $\Upsilon \in L_0$ найдутся модель $\Delta \in L_1$ и элементы $a_1, \dots, a_n \in |\Delta|$, удовлетворяющие условиям:

(1) множество $M \rightleftharpoons \{\bar{b} \mid \bar{b} \in |\Delta|^m, \ \Delta \models \Re(\bar{a}, \bar{b})\}$ непусто;

(2) формула $\Im(\bar{a}, \bar{y}^1, \bar{y}^2)$ задает отношение конгруэнтности η на модели L сигнатуры σ_0, основным множеством которой является M, а предикаты P_i определены формулами $\aleph_i(\bar{x}, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{n_i})$, $0 \leq i \leq l$;

(3) фактор-модель L/η изоморфна Υ.

Хорошо известно [9], что если класс L_0 относительно элементарно определим в классе L_1 и теория $\mathrm{Th}(L_0)$ наследственно неразрешима, то теория $\mathrm{Th}(L_1)$ также наследственно неразрешима.

Как доказал Ю. Г. Пензин [10], теория целых чисел с операцией сложения и предикатом взаимной простоты наследственно неразрешима.

Предложение 2. *Пусть A — свободная абелева группа с базисом $a_1, \dots, a_r$, $r \geq 2$ в сигнатуре $\langle +, -, 0 \rangle$. Множество базисов группы A не является относительно формульным подмножеством.*

Доказательство. Известно [9], что элементарная теория абелевой группы разрешима. Предположим, что существует формула $\Phi(x_1, \dots, x_r)$, выделяющая базисы группы A. Докажем, что теория группы A, в сигнатуру которой добавлен предикат $\Phi(x_1, \dots, x_r)$, наследственно неразрешима. Доказательство проведем методом относительной элементарной определимости в модели $\Gamma = \langle A, +, -, 0, \Phi \rangle$ целых чисел с операцией сложения и предикатом взаимной простоты. Так как теория этой модели наследственно неразрешима [10], из противоречия следует справедливость предложения.

Рассмотрим на модели Γ формулу

$$E_1(x) \rightleftharpoons \Phi(x - a_1, a_2, \dots, a_r) \wedge \Phi(2x + a_1, a_2, \dots, a_r). \tag{10}$$

Она выделяет подгруппу, порожденную элементами $a_2, \dots, a_r$. Значит, подгруппы, порожденные элементами a_i, выделяются некоторыми формулами в модели Γ при любом $i = 1, \dots, r$.

Наряду с базисом $a_1, \dots, a_r$ группы A рассмотрим другой базис $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_2$, $\dots$, $b_r = a_r$. Ясно, что относительно формульными являются подгруппы, порожденные элементами b_i при любом $i = 1, \dots, r$.

Рассмотрим формулу

$$\begin{gathered} P(a, b) \rightleftharpoons (a \in \mathrm{gr}\langle b_1 \rangle) \wedge (b \in \mathrm{gr}\langle b_1 \rangle) \wedge ((\forall x \forall y \forall u \forall v) \\ (x \in \mathrm{gr}\langle a_1 \rangle \wedge u \in \mathrm{gr}\langle a_1 \rangle \wedge y \in \mathrm{gr}\langle a_2 \rangle \wedge v \in \mathrm{gr}\langle a_2 \rangle \wedge (a = x + y) \wedge (b = u + v)) \to \\ (\exists d_2 \dots \exists d_r) \Phi(x + v, d_2, \dots, d_r)). \end{gathered} \tag{11}$$

Формула (11) верна на элементах $a, b \in A$ тогда и только тогда, когда $a = na_1 + na_2$, $b = ma_1 + ma_2$ и числа n, m взаимно просты. Действительно, только в этом случае элемент $na_1 + ma_2$ можно дополнить до базиса группы A.

Так как модель $\langle \mathbf{Z} b_1, +, P(a, b) \rangle$ изоморфна модели целых чисел с операцией сложения и предикатом взаимной простоты, предложение доказано.

Пусть $G = F_2(\mathbf{A}^2)$ — свободная метабелева группа ранга два с базисом a_1, a_2. Рассмотрим эндоморфизм ψ группы G:

$$\psi = \{a_1 \to b_1, a_2 \to b_2\}.$$

Известно [11], что ψ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$\det(\psi) = \det(\partial b_i / \partial a_j)$$

является обратимым элементом кольца $\mathbf{Z}(G/G')$, т. е. $\det(\psi) \in \pm G/G'$.

С другой стороны, в [12] показано, что

$$[a_1, a_2]^{\psi} = [a_1, a_2]^{\det \psi}.$$

Значит, пара элементов $\{y_1, y_2\}$ образует базис группы G тогда и только тогда, когда истинна формула

$$\Phi(y_1, y_2) \rightleftharpoons \exists u([y_1, y_2] = [a_1, a_2]^u \vee [y_1, y_2] = [a_1, a_2]^{-u}).$$

Однако в общем случае при $r \geq 3$ или $n \geq 2$ мы не знаем, выделяются ли базисы группы $F_r(\mathbf{A}^n)$ формулами.

Некоторую информацию по этому вопросу дает

Теорема 2. *Пусть G — свободная группа ранга r в многообразии n-ступенно разрешимых групп. При $r = 1$ и $n \geq 2$, а также при $n \geq 3$ и $r \geq 2$ множество баз $B(G)$ не является объединением конечного числа алгебраических множеств.*

Доказательство. Пусть $\{a_1, \dots, a_r\}$ — фиксированный базис группы G. Производные Фокса от элементов группы G будем обозначать через $\partial_i(g)$. Рассмотрим свободную n-ступенно разрешимую группу H с базисом $a_1, \dots, a_r, y_1, \dots, y_r$. Предположим, что множество баз $B(G)$ представляется в виде объединения алгебраических множеств B_i, $i = 1, \dots, m$. Множество B_i является множеством решений системы уравнений над группой G:

$$v_{i\lambda}(a_1, \dots, a_r; y_1, \dots, y_r) = 1,$$

где $\lambda \in \Lambda_i$, $v_{i\lambda}$ — элементы группы H.

Случай 1. G — свободная абелева группа. Так как G представляется матрицами над коммутативным нётеровым кольцом с единицей, по теореме B1 из [2] она является нётеровой по уравнениям, т. е. любая бесконечная система уравнений над этой группой эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме. Следовательно, множество $B(G)$ является формульным, что противоречит предложению.

Случай 2. Пусть $n \geq 2$ и $r \geq 3$. Обозначим $\overline{G} = G/G^{(n-1)}$, $\bar{g}$ — образ элемента $g \in G$ при естественном гомоморфизме $G \to \overline{G}$.

Пусть $v(a_1, \dots, a_r; y_1, \dots, y_r)$ — некоторый элемент группы H, c — элемент из последнего неединичного коммутанта G^{n-1}, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — элементы из целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}\overline{G}$, $g_1, \dots, g_r$ — элементы из группы G.

Из (2) получаем

$$\begin{aligned} &v(a_1, \dots, a_r; c^{\alpha_1} g_1, \dots, c^{\alpha_r} g_r) \\ &= c^{\alpha_1 (\partial v/\partial y_1)[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r; \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r] + \dots + \alpha_r (\partial v/\partial y_r)[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r; \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r]} \cdot v(a_1, \dots, a_r; g_1, \dots, g_r), \end{aligned} \tag{12}$$

где в квадратной скобке находится элемент группы $\underbrace{H/H^{(n-1)} \times \cdots \times H/H^{(n-1)}}_{2r}$.

Известно [13], что элементы $c^{\alpha_1}a_1, \dots, c^{\alpha_r}a_r$ составляют базис группы G тогда и только тогда, когда элемент

$$\alpha_1\partial_1 c + \dots + \alpha_r\partial_r c + 1 \tag{13}$$

принадлежит группе $\overline{G}$. Выберем неединичный элемент c из G^{n-1}, зависящий лишь от элементов a_2, a_3. Пусть $\gamma(\bar{a}_2, \bar{a}_3)$ — элемент из кольца $\mathbf{Z}\overline{G}$, в запись которого входят лишь элементы $\bar{a}_2, \bar{a}_3$. Обозначим через d элемент c^γ и заметим, что при сделанных ограничениях набор элементов $\{a_1^d, a_2, \dots, a_r\}$ лежит в $B(G)$. Так как существует бесконечно много способов выбора элемента d с заданными ограничениями, найдутся элементы $d_1 \neq d_2$, удовлетворяющие ограничениям и такие, что наборы $\{a_1^{d_1}, a_2, \dots, a_r\}$ и $\{a_1^{d_2}, a_2, \dots, a_r\}$ принадлежат одному алгебраическому множеству B_i. Пусть для определенности $i = 1$.

Из определения элементов d_1 и d_2 следует существование различных $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}\overline{G}$ таких, что $d_1 = c^\alpha, d_2 = c^\beta$. Заметим, что

$$a_1^{d_1} = d_1a_1d_1^{-1} = c^\alpha a_1 c^{-\alpha} = c^{\alpha(1-\bar{a}_1)}a_1, \quad a_1^{d_2} = d_2a_1d_2^{-1} = c^\beta a_1 c^{-\beta} = c^{\beta(1-\bar{a}_1)}a_1.$$

Для всех $\lambda \in \Lambda_1$ имеем $v_{1\lambda}(a_1, \dots, a_r; a_1^{d_1}, a_2, \dots, a_r) = 1$. Кроме того, учитывая (12), получим

$$\begin{aligned} 1 = v_{1\lambda}(a_1, \dots, a_r; a_1^{d_2}, a_2, \dots, a_r) &= v_{1\lambda}(a_1, \dots, a_r; c^{\beta(1-\bar{a}_1)}a_1, a_2, \dots, a_r) \\ &= v_{1\lambda}(a_1, \dots, a_r; c^{(\beta-\alpha)(1-\bar{a}_1)}c^{\alpha(1-\bar{a}_1)}a_1, a_2, \dots, a_r) \\ = c^{(\beta-\alpha)(1-\bar{a}_1)\partial v_{1\lambda}/\partial y_1[\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_r;\bar{c}^{\alpha(1-\bar{a}_1)}\bar{a}_1,\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_r]} &\cdot v_{1\lambda}(a_1, \dots, a_r; c^{\alpha(1-\bar{a}_1)}a_1, \dots, a_r) \\ &= c^{(\beta-\alpha)(1-\bar{a}_1)\partial v_{1\lambda}/\partial y_1[\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_r;\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_r]}. \end{aligned} \tag{14}$$

Так как $c \neq 1$, то

$$(\beta - \alpha)(1 - \bar{a}_1)\frac{\partial v_{1\lambda}}{\partial y_1}[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r] = 0.$$

Ввиду $\alpha \neq \beta$ имеем

$$\frac{\partial v_{1\lambda}}{\partial y_1}[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r; \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r] = 0. \tag{15}$$

Пусть b — произвольный элемент из $G^{(n-1)}$. Покажем, что элементы $\{b^\beta a_1, a_2, \dots, a_r\}$ удовлетворяют всем уравнениям $v_{1\lambda}(a_1, \dots, a_r; y_1, \dots, y_r) = 1$, $\lambda \in \Lambda_1$, а значит, образуют базис. Действительно,

$$\begin{aligned} v_{1\lambda}(a_1, \dots, a_r; b^\beta a_1, \dots, a_r) &= v_{1\lambda}(a_1, \dots, a_r; b^\beta c^{-\beta}c^\beta a_1, \dots, a_r) \\ &= (bc^{-1})^{\beta\partial v_{1\lambda}/\partial y_1[\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_r;\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_r]} = (bc^{-1})^{\beta\cdot 0} = 1. \end{aligned}$$

Но любой базисный набор должен удовлетворять условию (13), т. е.

$$\beta\partial_1 b + 1 \in \overline{G}. \tag{16}$$

Покажем, что ввиду произвольности выбора элемента b условие (16) можно нарушить.

Действительно, пусть $b_1 \in G^{(n-1)}$ и $\partial_1 b_1 \neq 0$. Тогда $\beta\partial_1 b_1 = \bar{g} - 1$ для некоторого $1 \neq \bar{g} \in \overline{G}$. Элемент $b_2 = [b_1, a_1]$ также должен удовлетворять условию (16). Значит, $\beta\partial_1 b_1(1 - \bar{a}_1) = (\bar{g} - 1)(1 - \bar{a}_1) = \bar{h} - 1$ для некоторого $\bar{h} \in \overline{G}$. Тем самым $\bar{g} - 1 - \bar{g}\bar{a}_1 + \bar{a}_1 = \bar{h} - 1$, т. е. $\bar{g} - \bar{g}\bar{a}_1 + \bar{a}_1 = \bar{h}$. Однако $\bar{g} \neq 1$ и $\bar{a}_1 \neq 1$. Поэтому равенство (16) не выполняется для элемента b_2; противоречие. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $G = F_r(\mathbf{A}^n)$ — свободная разрешимая группа с базисом $\{a_1, \dots, a_r\}$, $r \geq 3$, $B(G)$ — множество базисов группы G. Тогда при $n = 1$ и $r \geq 2$, а также при $n \geq 2$, $r \geq 3$ любое диофантово подмножество из $B(G)$ пусто.*

Доказательство. Случай 1: $n = 1$, $r \geq 2$. В абелевой группе G операцию запишем аддитивно. Диофантово отношение имеет вид

$$\Phi(x_1, \dots, x_r) = (\exists y_1 \dots \exists y_t)(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_t y_t = c),$$

где $\alpha_i, \beta_j \in \mathbf{Z}$, а $c \in G$. Пусть $\{c_1, \dots, c_r\}$ — некоторый базис группы G, удовлетворяющий условию

$$\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_r c_r + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_t b_t = c$$

для некоторых $b_1, \dots, b_t$ из G. Пусть $c - \beta_1 b_1 + \dots + \beta_t b_t = d$. Покажем, что уравнение $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r = d$ имеет решение вне $B(G)$.

Действительно,

$$\alpha_1(c_1 - \alpha_2 u) + \alpha_2(c_2 + \alpha_1 u) + \alpha_3 c_3 + \dots + \alpha_r c_r = d$$

при любом $u \in G$. Заметим, что детерминант, составленный естественным способом по базису $\{c_1, \dots, c_r\}$, равен 1 или -1. Пусть D — детерминант, составленный по элементам $\{c_1 - \alpha_2 u, c_2 + \alpha_1 u, c_3, \dots, c_r\}$. Легко подсчитать, что $D = \det(c_1, \dots, c_r) - \det(u, \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2, c_3, \dots, c_r)$. Поэтому можно выбрать u так, что D необратим в кольце $\mathbf{Z}$.

Случай 2: $n \geq 2$, $r \geq 3$. Наряду с группой G рассмотрим свободные разрешимые группы $S = F_{2r+t}(\mathbf{A}^n)$ с базисом $\{a_1, \dots, a_r, x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_t\}$ и группу $H = F_{2r}(\mathbf{A}^n)$ с базисом $\{a_1, \dots, a_r, x_1, \dots, x_r\}$, естественно вложенные друг в друга: $G < H < S$.

Предположим, что непустое множество $D \subseteq B(G)$ задается диофантовым отношением

$$\Phi(x_1, \dots, x_r) \rightleftharpoons \exists \mathbf{y}\, (v(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1), \tag{17}$$

где $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_t)$, $v(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ — элемент из группы S.

Пусть $(b_1, \dots, b_r)$ — некоторый набор элементов из группы G, удовлетворяющий отношению (17). Найдутся элементы $c_1, \dots, c_t$ из группы G такие, что уравнение

$$v(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{c}) = 1 \tag{18}$$

имеет решение $(b_1, \dots, b_r)$.

Так как элементы $c_1, \dots, c_t$ выражаются через элементы $a_1, \dots, a_r$, уравнение (18) можно записать в виде

$$w(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 1, \tag{19}$$

где $w(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \in H$. Покажем, что уравнение (19) имеет решение, не лежащее в $B(G)$. Из полученного противоречия будет следовать утверждение теоремы.

Пусть c — неединичный элемент из последнего неединичного коммутанта $G^{(n-1)}$, а $\beta_1, \dots, \beta_r$ — элементы из целочисленного группового кольца группы $\overline{G} = G/G^{(n-1)}$.

Если

$$w(\mathbf{a}, c^{\beta_1} b_1, \dots, c^{\beta_r} b_r) = 1, \tag{20}$$

то элементы $\{c^{\beta_1}b_1,\dots,c^{\beta_r}b_r\}$ составляют базис группы G. Из (2) получаем

$$w(\mathbf{a},c^{\beta_1}b_1,\dots,c^{\beta_r}b_r)=c^{\beta_1\partial w/\partial x_1[\mathbf{z}]+\dots+\beta_r\partial w/\partial x_r[\mathbf{z}]}\cdot w(\mathbf{a},\mathbf{b})$$
$$=c^{\beta_1\partial w/\partial x_1[\mathbf{z}]+\dots+\beta_r\partial w/\partial x_r[\mathbf{z}]}, \quad (21)$$

где $\partial w/\partial x_1[\mathbf{z}]$ — значение производной от элемента $w(\mathbf{a},\mathbf{x})\in H$ по переменной x_j в точке $\mathbf{z}=(\bar a_1,\dots,\bar a_r,\bar b_1,\dots,\bar b_r)$, а черта означает образ элемента в группе $\overline{G}$.

Таким образом, элементы $\{c^{\beta_1}b_1,\dots,c^{\beta_r}b_r\}$ составляют базис группы G тогда и только тогда, когда

$$\beta_1\frac{\partial w}{\partial x_r}[\mathbf{z}]+\dots+\beta_r\frac{\partial w}{\partial x_r}[\mathbf{z}]=0. \quad (22)$$

Как отмечено ранее (см. (13)), все решения $\beta_1,\dots,\beta_r$ уравнения (22) должны удовлетворять условию

$$\beta_1\frac{\partial c}{\partial b_1}+\dots+\beta_r\frac{\partial c}{\partial b_r}+1\in\overline{G}. \quad (23)$$

Однако уравнение (22) не зависит от элемента c. Поэтому если элементы $\{c^{\beta_1}b_1,\dots,c^{\beta_r}b_r\}$ удовлетворяют уравнению (20), то при любом $d\in G^{(n-1)}$ элементы $\{d^{\beta_1}b_1,\dots,d^{\beta_r}b_r\}$ также удовлетворяют уравнению (20), а потому

$$\beta_1\frac{\partial d}{\partial b_1}+\dots+\beta_r\frac{\partial d}{\partial b_r}+1\in\overline{G} \quad (24)$$

при любом $d\in G^{(n-1)}$.

Заметим, что в уравнении (22) все коэффициенты $\partial w/\partial x_j[\mathbf{z}]$ не равны нулю. В противном случае это уравнение имеет решение вида $\{0,\dots,0,\beta_j,0,\dots,0\}$ при любом $\beta_j\in\mathbf{Z}\overline{G}$. Тогда при любом $d\in G^{(n-1)}$ набор элементов

$$\{b_1,\dots,b_{j-1},d^{\beta_j}b_j,b_{j+1},\dots,b_r\}$$

удовлетворяет уравнению $w(\mathbf{a},\mathbf{x})=1$ и, значит, образует базис. Но тогда $\beta_j\partial d/\partial b_j+1\in\overline{G}$ при любом $d\in G^{(n-1)}$ и любом $\beta_j\in\mathbf{Z}\overline{G}$. Если $\partial d/\partial b_j\neq 0$, то это невозможно.

Кольцо $\mathbf{Z}\overline{G}$ является областью Орэ. Выберем в нем такие элементы $\beta_1\neq 0$, $\beta_2\neq 0$, что

$$\beta_1\frac{\partial w}{\partial x_1}[\mathbf{z}]+\beta_2\frac{\partial w}{\partial x_2}[\mathbf{z}]=0.$$

Заметим, что при любом $t\in\mathbf{Z}\overline{G}$ набор элементов $\{t\beta_1,t\beta_2,0,\dots,0\}$ также образует решение уравнения (22). Пусть $1\neq d$ — элемент из $G^{(n-1)}$, зависящий только от элементов b_1 и b_3. Тогда из (24) получаем

$$t\beta_1\frac{\partial d}{\partial b_1}+1\in\overline{G} \quad (25)$$

при любом $t\in\mathbf{Z}\overline{G}$. Так как $\beta_1\partial d/\partial b_1\neq 0$, то (25) невозможно. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе // Алгебра и логика. 1962. Т. 1, № 5. С. 45–50.

2. *Baumslag G., Miasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups // J. of Algebra. 1999. V. 219. P. 16–79.

3. *Романьков В. А.* О тестовых элементах свободных разрешимых групп ранга 2 // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 2. С. 192–201.

4. *Ремесленников В. Н., Соколов В. Г.* Некоторые свойства вложения Магнуса // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 5. С. 566–578.

5. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

6. *Rhemtulla A, Akhavan-Malayeri M.* Commutator length of abelian-by-nilpotent groups // Glasgov Math. Z. 1998. V. 40, N 1. P. 117–121.

7. *Тимошенко Е. И.* Об универсальных теориях метабелевых групп и вложении Шмелькина // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 495–498.

8. *Мальцев А. И.* О свободных разрешимых группах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 3. С. 495–498.

9. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

10. *Пензин Ю. Г.* Неразрешимость теории целых чисел со сложением и предикатом взаимной простоты // Тез. докл. 3-й Всесоюзной конф. по мат. логике. Новосибирск, 1974. С. 149–153.

11. *Bachmuth S.* Automorphisms of free metabelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 118. P. 93–104.

12. *Gupta C. K., Timoshenko E. I.* Automorphic and endomorphic reducibility and primitive endomorphisms of free metabelian groups // Comm. Algebra. 1997. V. 25. P. 3057–3070.

13. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* О тестовом ранге некоторых свободных полинильпотентных групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 37–50.

Статья поступила 24 марта 2005 г.

Гупта Чандра Канта (Chandra Kanta Gupta)
Manitoba University, Winnipeg, R3T 2N2, Canada
CGUPTA@cc.umanitoba.ca

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. архитектурно-строительный университет,
ул. Ленинградская, 113, Новосибирск 630008
etim@sibstrin.ru