Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 517.518.23+512.813.52

ТЕОРЕМЫ ТИПА УИТНИ О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА ГРУППАХ КАРНО

С. К. Водопьянов, И. М. Пупышев

Аннотация: Обобщена классическая теорема Уитни об описании ограничений функций различной гладкости на замкнутые множества группы Карно. Основные результаты работы сформулированы в [1].

Ключевые слова: группа Карно, теорема Уитни, продолжение функций, следы функций.

1. Обозначения и предварительные сведения

Группой Карно [2] называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли которой нильпотентна и градуирована, т. е. представляется в виде

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1},\ j < m, \quad [V_1, V_m] = 0.$$

Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1, X_2, \dots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V, причем $X_1, \dots, X_{n_1}$ — базис V_1, $X_{n_1+\dots+n_{i-1}+1}, \dots, X_{n_1+\dots+n_i}$, $1 < i \le m$, — базис V_i, образованный коммутаторами порядка $i-1$ некоторых базисных векторных полей пространства V_1. Здесь $n_1 = n, n_2, \dots, n_m$ — размерности подпространств $V_1, \dots, V_m$ соответственно.

Если $X_i \in V_{d_i}$, то число d_i называется *степенью поля* X_i. Векторные поля X_i степени $d_i = 1$ далее будем называть *горизонтальными.*

Экспоненциальное отображение $x = \exp \sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i$ будет диффеоморфизмом алгебры V на группу $\mathbb{G}$, посредством которого объекты, определенные на алгебре, переносятся на группу. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_N$ — координатные функции, определяемые следующим образом: $\eta_i(x) = x_i$. В этих координатах семейство растяжений δ_t, где $t > 0$, определяется как $\delta_t(x)$ с координатами $\eta_i(\delta_t(x)) = t^{d_i} x_i$.

Однородная норма ρ — это непрерывная на $\mathbb{G}$ функция класса $C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\})$, обладающая свойствами: $\rho(x) \ge 0$, причем $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$; $\rho(\delta_t(x)) = t\rho(x)$, $t > 0$; $\rho(xy) \le \kappa(\rho(x) + \rho(y))$, $\kappa \ge 1$. Справедлива оценка $|\eta_i(x)| \le \rho(x)^{d_i}$.

Иногда удобнее работать с метрикой Карно — Каратеодори $d_{CC}(x, y)$ на группе $\mathbb{G}$, определяемой следующим образом: $d_{CC}(x, y)$ — это длина кратчайшей горизонтальной кривой, соединяющей точки x и y. Такая кривая в силу теоремы Рашевского — Чоу существует (далее будем обозначать ее через $\gamma(x, y)$), и метрика $d_{CC}(x, y)$ эквивалентна квазиметрике $\rho(y^{-1}x)$.

Хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ равна $Q = \sum\limits_{i=1}^{N} d_i = \sum\limits_{i=1}^{m} i n_i$.

Если $I = (i_1, \dots, i_N)$ — мультииндекс, то через X^I мы обозначаем дифференциальный оператор $X^I = X_1^{i_1} \dots X_N^{i_N}$, $|I| = i_1 + \dots + i_N$, а через $d(I) = d_1 i_1 + \dots + d_N i_N$ — однородный порядок мультииндекса.

Очевидно, $|\eta^I(x)| \le \rho(x)^{d(I)}$, где выражение $\eta^I = \eta_1^{i_1} \dots \eta_N^{i_N}$ мы будем называть *мономом однородной степени* $d(I)$. *Однородным многочленом однородной степени* d называется линейная комбинация мономов одной и той же однородной степени d. *Многочленом однородной степени* d называется линейная комбинация мономов однородной степени не выше d.

Символ e_i используется для обозначения мультииндекса $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте. Буква C будет обозначать, вообще говоря, различные константы, зависящие только от показателя γ и характеристик группы $\mathbb{G}$.

2. Формула Тейлора на группах Карно

2.1. Свойства дифференциальных операторов. В [2] показывается, что базисные векторные поля представляются в виде

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \eta_i} + \sum_{d_k > d_i} P_{ik} \frac{\partial}{\partial \eta_k}, \tag{2.1}$$

где P_{ik} — однородный многочлен однородной степени $d_k - d_i$, а дифференциальные операторы X^J высших порядков представляются в виде

$$X^J = \sum_{\substack{|K| \le |J|, \\ d(K) \ge d(J)}} \mathbf{P}_{JK} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right)^K, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{P}_{JK}$ — однородный многочлен однородной степени $d(K) - d(J)$.

Легко проверить, что справедлива формула Лейбница дифференцирования произведения функций:

$$X^I(f \cdot g) = \sum_{I_1 + I_2 = I} C_{I_1, I_2} X^{I_1} f \cdot X^{I_2} g. \tag{2.3}$$

Нам еще понадобится формула

$$X^I(X^J f) = \sum_{d(S) = d(I) + d(J)} \gamma_{IJS} X^S f, \tag{2.4}$$

здесь перестановка операторов осуществляется по правилу $X_j X_i = X_i X_j - [X_i, X_j]$, где $j > i$, при этом однородный порядок операторов сохраняется. В действительности $\gamma_{IJS} = 0$, если $|S| \ge |I| + |J|$, $S \ne I + J$, и $\gamma_{IJ, I+J} = 1$, так что можно переписать (2.4) в виде

$$X^I(X^J f) = X^{I+J} f + \sum_{\substack{d(S) = d(I) + d(J), \\ |S| < |I| + |J|}} \gamma_{IJS} X^S f.$$

Заметим, что если подействовать оператором X^J на однородный многочлен однородной степени m, то результатом будет однородный многочлен однородной степени $m - d(J)$. Действительно, каждое слагаемое в (2.2) будет иметь однородную степень $d(K) - d(J) + m - d(K) = m - d(J)$.

Предложение 1. *В формуле* (2.2) $\mathbf{P}_{JJ} = 1$ *и* $\mathbf{P}_{JK} = 0$, *если* $|K| = |J|$, $d(K) = d(J)$, $K \neq J$, *т. е.* (2.2) *можно переписать в виде*

$$X^J = \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^J + \sum_{\substack{|K|<|J|,\\ d(K)=d(J)}} \mathbf{P}_{JK} \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^K + \sum_{\substack{|K|\le|J|,\\ d(K)>d(J)}} \mathbf{P}_{JK} \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^K. \tag{2.5}$$

Формула (2.5) доказывается индукцией по J стандартным образом.

Поскольку $\mathbf{P}_{JK}|_{\eta=0} = 0$, если $d(K) > d(J)$, то

$$X^J|_{\eta=0} = \sum_{\substack{|K|\le|J|,\\ d(K)=d(J)}} \mathbf{P}_{JK} \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^K\bigg|_0 = \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^J\bigg|_0 + \sum_{\substack{|K|<|J|,\\ d(K)=d(J)}} \mathbf{P}_{JK} \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^K\bigg|_0, \tag{2.6}$$

здесь $\mathbf{P}_{JK}$ — константы.

2.2. Формула Тейлора. Определение многочлена Тейлора на группе Карно $\mathbb{G}$ приведено в книге [2].

Определение 1. Многочлен

$$P(x,y) = \sum_{d(I)\le k} a_I(y) \frac{\eta^I(y^{-1}x)}{I!} \tag{2.7}$$

называется *многочленом Тейлора однородной степени* k для функции $f(x)$ в окрестности точки y, если для всех $d(J) \le k$ выполняется

$$X^J f(y) = X^J P|_{x=y}.$$

Найдем из этого условия коэффициенты $a_I(y)$. Имеем

$$X^J f(y) = \sum_{d(I)\le k} a_I(y) \left(X^J \, \frac{\eta^I(y^{-1}x)}{I!}\right)\bigg|_0, \quad d(J) \le k.$$

Из (2.6) следует, что

$$\begin{aligned} X^J f(y) = \sum_{d(I)\le k} a_I(y) \biggl(\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^J \frac{\eta^I(y^{-1}x)}{I!}\biggr)\bigg|_0 \\ + \sum_{d(I)\le k} \sum_{\substack{|K|<|J|,\\ d(K)=d(J)}} a_I(y) \mathbf{P}_{JK} \biggl(\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^K \frac{\eta^I(y^{-1}x)}{I!}\biggr)\bigg|_0, \quad d(J) \le k. \end{aligned}$$

В первой сумме $I = J$, а во второй должно быть $I = K$:

$$X^J f(y) = a_J(y) + \sum_{\substack{d(I)=d(J),\\ |I|<|J|}} a_I(y) \mathbf{P}_{JI}, \quad d(J) \le k. \tag{2.8}$$

Мы получили систему линейных уравнений треугольного вида относительно $a_I(y)$. Ее решение находится по формуле

$$a_I(y) = \sum_{\substack{d(K)=d(I),\\ |K|\le|I|}} \beta_{IK} X^K f(y) = X^I f(y) + \sum_{\substack{d(K)=d(I),\\ |K|<|I|}} \beta_{IK} X^K f(y), \tag{2.9}$$

где β_{IK} — константы, $\beta_{II} = 1$ и $\beta_{IK} = 0$, если $d(K) = d(I)$, $|K| = |I|$, $K \neq I$.

Формула (2.9) доказывается по индукции. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Многочлен Тейлора однородной степени k для функции $f(x)$, заданной на группе Карно $\mathbb{G}$, в окрестности точки y имеет вид* (2.7) *с коэффициентами, вычисляемыми по формуле* (2.9).

Для остаточного члена в формуле Тейлора $R_k(x,y) = f(x) - P(x,y)$ справедливы оценки (см. [2, с. 34, 35]): если $f \in C^k$, то

$$|R_k(x,y)| \le C_k \rho(y^{-1}x)^k \sup_{\substack{\rho(z)\le b^k \rho(y^{-1}x),\\ d(I)=k}} |X^I f(yz) - X^I f(y)|; \tag{2.10}$$

если $f \in C^{k+1}$, то

$$|R_k(x,y)| \le C'_k \rho(y^{-1}x)^{k+1} \sup_{\substack{\rho(z)\le b^{k+1} \rho(y^{-1}x),\\ d(I)=k+1}} |X^I f(yz)|. \tag{2.11}$$

Здесь b — константа из теоремы Лагранжа (см. [2, с. 33]): если $f \in C^1$, то

$$|f(x) - f(y)| \le C\rho(y^{-1}x) \sup_{\substack{\rho(z)\le b\rho(y^{-1}x),\\ i=1,\dots,n}} |X_i f(yz)|. \tag{2.12}$$

Из (2.11) следует утверждение: *если f — многочлен однородной степени не выше k, то $R_k \equiv 0$.* Таким образом, мы получили вид формулы Тейлора для многочленов.

Предложение 3. *Пусть $f(x)$ — многочлен однородной степени k. Тогда*

$$f(x) = \sum_{d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} X^K f(y) \Bigg) \frac{\eta^L(y^{-1}x)}{L!}.$$

Докажем еще одно важное свойство многочлена Тейлора.

Предложение 4. *Имеет место равенство*

$$X^J P(x,y) = \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} X^K (X^J f(y)) \Bigg) \frac{\eta^L(y^{-1}x)}{L!}, \tag{2.13}$$

т. е. производная X^J от многочлена Тейлора однородной степени k функции f есть многочлен Тейлора однородной степени $k - d(J)$ функции $X^J f$.

Действительно, обозначим $g(x) = P(x,y)$ и запишем формулу Тейлора для функции $X^J g = X^J P$ — многочлена однородной степени не выше $k - d(J)$ (см. предложение 3):

$$X^J P(x,y) = \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} X^K (X^J g(y)) \Bigg) \frac{\eta^L(y^{-1}x)}{L!},$$

откуда немедленно следует (2.13), поскольку $X^I g(y) = X^I P|_{x=y} = X^I f(y)$ для $d(I) \le k$ по определению многочлена Тейлора.

3. Теоремы типа Уитни для пространств Липшица

3.1. Пространства Липшица. Пусть $k < \gamma \le k+1$, где k целое, $k \ge 0$.

Определение 2. Будем говорить, что функция f, заданная на $\mathbb{G}$, *принадлежит пространству Липшица* $\mathrm{Lip}(\gamma, \mathbb{G})$, если существует константа M, для которой выполняется (для всех $d(J) \le k$)

$$|X^J f(x)| \le M, \quad |R_J(x,y)| \le M\rho(y^{-1}x)^{\gamma-d(J)} \text{ для любых } x, y \in \mathbb{G}. \tag{3.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_J(x,y) &= X^J f(x) - P_J(x,y) = X^J f(x) \\ &- \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS} X^S f(y) \Bigg) \frac{\eta^L(y^{-1}x)}{L!} \end{aligned} \tag{3.2}$$

— остаток тейлоровского разложения функции $X^J f(x)$ в окрестности точки y. *Нормой функции* f в этом пространстве назовем наименьшую постоянную M, для которой выполняется (3.1).

Для замкнутого множества $F \subset \mathbb{G}$ определим пространство $\mathrm{Lip}(\gamma, F)$, элементами которого будут наборы функций $\{f_J\}_{d(J)\le k}$, заданных на F.

Определение 3. Набор функций $\{f_J\}_{d(J)\le k}$, заданных на F, принадлежит пространству Липшица $\mathrm{Lip}(\gamma, F)$, если существует константа M, для которой выполняется (для всех $d(J) \le k$)

$$|f_J(x)| \le M; \ |R_J(x,y)| \le M\rho(y^{-1}x)^{\gamma-d(J)} \text{ для любых } x, y \in F. \tag{3.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_J(x,y) &= f_J(x) - P_J(x,y) \\ &= f_J(x) - \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS}\ f_S(y) \Bigg) \frac{\eta^L(y^{-1}x)}{L!}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Нормой набора $\{f_J\}$ в этом пространстве назовем наименьшую постоянную M, для которой выполняется (3.3).

Замечание 1. В случае $F = \mathbb{G}$ эти два определения эквивалентны, т. е. если для данной функции f существует набор функций f_J, удовлетворяющий (3.3), то функция f имеет непрерывные производные $X^J f$, где $d(J) \le k$, $X^J f = f_J$, и выполняется (3.1).

Доказательство этого утверждения аналогично рассуждениям при доказательстве леммы 6, вместо неравенств (3.14) и (3.15) используется оценка (3.3) для $R_J(x,y)$.

Наша основная задача — доказать, что

$$\mathrm{Lip}(\gamma, \mathbb{G})|_F = \mathrm{Lip}(\gamma, F).$$

Это вытекает из теоремы о следах и теоремы о продолжении.

Теорема 1. *Если $f \in \mathrm{Lip}(\gamma, \mathbb{G})$, то набор функций $\{f_J\}_{d(J)\le k}$ принадлежит пространству $\mathrm{Lip}(\gamma, F)$, где $f_J = X^J f|_F$ — следы на F производных $X^J f$ функции f с $d(J) \le k$, причем*

$$\|\{f_J\}_{d(J)\le k}\|_{\mathrm{Lip}(\gamma,F)} \le \|f\|_{\mathrm{Lip}(\gamma,\mathbb{G})}.$$

Справедливость теоремы о следах очевидна, если положить $f_J = X^J f|_F$, поскольку в этом случае из (3.1) следует (3.3).

Сформулируем теорему о продолжении.

Теорема 2. *Существует линейный оператор продолжения E_k, непрерывно отображающий пространство $\mathrm{Lip}(\gamma, F)$ в пространство $\mathrm{Lip}(\gamma, \mathbb{G})$, причем норма оператора ограничена постоянной, не зависящей от замкнутого множества $F \subset \mathbb{G}$, т. е. если набор функций $\{f_J\}_{d(J)\le k}$ принадлежит $\mathrm{Lip}(\gamma, F)$, то $f = E_k(\{f_J\}) \in \mathrm{Lip}(\gamma, \mathbb{G})$, причем*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(\gamma,\mathbb{G})} \le C\|\{f_J\}\|_{\mathrm{Lip}(\gamma,F)},$$

где C не зависит от множества F.

Следующее свойство позволит нам упростить рассуждения.

Лемма 1. *Если функция f непрерывна и ограничена в $\mathbb{G}$ и имеет непрерывные ограниченные производные $X^J f$ до порядка k включительно* (т. е. $d(J) \le k$), *причем $X^J f \in \mathrm{Lip}(\gamma - k, \mathbb{G})$ для $d(J) = k$, то $f \in \mathrm{Lip}(\gamma, \mathbb{G})$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$|R_J(x,y)| \le M\rho(y^{-1}x)^{\gamma-d(J)}$$

для $d(J) < k$. Поскольку $f \in C^k$, справедлива оценка (2.10) для R_J:

$$\begin{aligned}
|R_J(x,y)| &\le C\rho(y^{-1}x)^{k-d(J)} \sup_{\substack{\rho(z)\le c\rho(y^{-1}x),\\ d(I)=k-d(J)}} |X^I X^J f(yz) - X^I X^J f(y)| \\
&\le C\rho(y^{-1}x)^{k-d(J)} \sup_{\substack{\rho(z)\le c\rho(y^{-1}x),\\ d(L)=k}} |X^L f(yz) - X^L f(y)| \\
&\le C\rho(y^{-1}x)^{k-d(J)} \sup_{\rho(z)\le c\rho(y^{-1}x)} (M\rho(z)^{\gamma-k}) \le CM\rho(y^{-1}x)^{\gamma-d(J)}.
\end{aligned}$$

Мы использовали то, что $X^L f \in \mathrm{Lip}(\gamma - k, \mathbb{G})$ для $d(L) = k$, следовательно,

$$|X^L f(yz) - X^L f(y)| \le M\rho(z)^{\gamma-k},$$

а также то, что $\rho(z) \le c\rho(y^{-1}x)$ и $\gamma - k > 0$. Лемма доказана. $\square$

3.2. Свойства многочленов тейлоровского типа на группах Карно. Пусть $\{f_J\}_{d(J)\le k}$ — набор функций, заданных на F. Обозначим

$$P(x,t) = \sum_{d(L)\le k} \Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} f_K(t) \Big) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}, \quad x \in \mathbb{G},\ t \in F,$$

$$\begin{aligned}
P_J(x,t) = \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Big(&\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \\
&\times \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS} f_S(t) \Big) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}, \quad x \in \mathbb{G},\ t \in F,
\end{aligned}$$

$$R_J(x,t) = f_J(x) - P_J(x,t), \quad x, t \in F.$$

Лемма 2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$X^J P(x,t) = P_J(x,t), \quad x \in \mathbb{G},\ t \in F; \tag{3.5}$$

$$X^S P_J(x,t) = \sum_{d(M)=d(J)+d(S)} \gamma_{SJM} P_M(x,t), \quad x \in \mathbb{G},\ t \in F; \tag{3.6}$$

$$P_J(x,t) - P_J(x,s) = \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \\ \times \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS}\ R_S(t,s)\Big) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}, \quad x \in \mathbb{G},\ t,s \in F. \tag{3.7}$$

Доказательство. Докажем (3.5). Обозначим $g(x) = P(x,t)$ для фиксированного t и разложим $g(x)$ по формуле Тейлора, учитывая, что $g(x)$ — многочлен однородной степени не выше k (см. предложение 3):

$$g(x) = \sum_{d(L)\le k} \Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} X^K g(t)\Big) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}.$$

Отсюда

$$\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} X^K g(t) = \sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} f_K(t),$$

или, если учесть, что $\beta_{LL} = 1$ и $\beta_{LK} = 0$ при $d(K) = d(L)$, $|K| = |L|$, $K \ne L$, то

$$(X^L g(t) - f_L(t)) + \sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|<|L|}} \beta_{LK}(X^K g(t) - f_K(t)) = 0.$$

Можно доказать по индукции, что $f_K(t) = X^K g(t)$ для всех K. Для этого фиксируем $d(L) = d$ и обозначим $l = \min\{|L| : d(L) = d\}$.

Если $|L| = l$, то не существует таких K, для которых $K < L$, и поэтому $X^L g(t) - f_L(t) = 0$. Пусть $j > l$ и утверждение уже доказано для всех L с $|L| < j$. Тогда для $|L| = j$

$$(X^L g(t) - f_L(t)) + \sum_{\substack{d(K)=d,\\ |K|<j}} \beta_{LK}(X^K g(t) - f_K(t)) = X^L g(t) - f_L(t) = 0,$$

т. е. $f_K(t) = X^K g(t)$ для всех K.

Разложим по формуле Тейлора многочлен $X^J g(x)$ однородной степени не выше $k - d(J)$ (см. предложение 3), учитывая доказанное выше и формулу (2.4):

$$X^J g(x) = \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS}\ X^S g(t)\Big) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}$$

$$= \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS}\ f_S(t)\Big) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!} = P_J(x,t).$$

Поскольку $X^J g(x) = X^J P(x,t)$, то (3.5) доказано.

Равенство (3.6) следует из (3.5) и (2.4):

$$X^S P_J(x,t) = X^S(X^J P(x,t)) = \sum_{d(M)=d(J)+d(S)} \gamma_{SJM} X^M P(x,t) = \sum_{d(M)=d(J)+d(S)} \gamma_{SJM} P_M(x,t).$$

Докажем (3.7). Для этого разложим $P_J(x,t) - P_J(x,s)$ по формуле Тейлора по x в окрестности точки t, учитывая, что это многочлен однородной степени не выше $k - d(J)$ (см. предложение 3), и используя (3.6):

$$P_J(x,t) - P_J(x,s) = \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} X^K (P_J(x,t) - P_J(x,s))|_{x=t} \Bigg) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}$$

$$= \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS}(P_S(t,t) - P_S(t,s)) \Bigg) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}$$

$$= \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS}(f_S(t) - P_S(t,s)) \Bigg) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}$$

$$= \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS} R_S(t,s) \Bigg) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}.$$

Здесь мы использовали то, что $P_J(t,t) = f_J(t)$. Действительно, так как $\eta(t^{-1}t) = 0$, то

$$P_J(t,t) = \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS} f_S(t) \Bigg) \frac{\eta^L(t^{-1}t)}{L!}$$

$$= \sum_{\substack{d(K)=0,\\ |K|\le 0}} \beta_{0K} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS} f_S(t) = \sum_{d(S)=d(J)} \gamma_{0JS}\ f_S(t),$$

поскольку $K = 0$. Но эта сумма равна $f_J(t)$, так как $\gamma_{0JJ} = 1$ и $\gamma_{0JS} = 0$, если $S \neq J$. Это следует из того, что при $K = 0$ для любой функции g согласно (2.4)

$$X^J g = X^K(X^J g) = \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS} X^S g = \sum_{d(S)=d(J)} \gamma_{0JS}\ X^S g.$$

Лемма доказана. □

3.3. Декомпозиция Уитни. Для построения оператора продолжения E_k нам понадобится декомпозиция Уитни и связанное с ней разбиение единицы.

Определение 4. Пусть $r > 0$. Совокупность шаров $B_i = B(x_i, r)$ называется *r-упаковкой на* $\mathbb{G}$, если

1) $\mathbb{G} = \bigcup\limits_i B_i$,

2) существует константа c такая, что шары $B(x_i, r/c)$ взаимно не пересекаются.

Лемма 3. *Для открытого множества ${}^cF$ с непустой границей существует набор шаров $B_i = B(x_i, r_i)$ со следующими свойствами.*

1. ${}^cF = \bigcup\limits_i B_i$.

2. *Существует такое целое число N_0, что в каждой точке $x \in {}^cF$ пересекаются не более N_0 из шаров B_i.*

3. *Существуют такие константы K_1 и K_2, $2\kappa^2 < K_1 < K_2$, $K_2 > 2$, что $K_1 r_i \le d(x_i, F) \le K_2 r_i$, где $d(x_i, F) = \inf\limits_{y \in F} \rho(y^{-1}x_i)$ — расстояние от точки x_i до множества F.*

4. *Существует такая константа K_3, что для любых шаров B_i и B_j таких, что $B_i \cap B_j \ne \varnothing$, верно $\frac{1}{K_3} r_i \le r_j \le K_3 r_i$.*

5. *Существует такая константа $K_4 > 1$, что $B\big(x_i, \frac{r_i}{K_4}\big) \cap B\big(x_j, \frac{r_j}{K_4}\big) = \varnothing$ для любых i и j.*

6. *Существует разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, где $\varphi_i \in C^\infty$, $\operatorname{supp} \varphi_i \subset B_i$,*

$$\sum_i \varphi_i(x) = 1 \quad \text{и} \quad |X^J \varphi_i(x)| \le \frac{C_J}{r_i^{d(J)}} \text{ при } x \in {}^cF.$$

Доказательство. Будем обозначать через $\operatorname{mes}(\cdot)$ меру Лебега на группе $\mathbb{G}$. Для случая множества конечной меры $\operatorname{mes} {}^cF < \infty$ эта лемма доказана в [2]. Мы будем следовать схеме, используемой при доказательстве аналогичного утверждения в статье [3] (см. лемму 5).

В [3] (см. лемму 4) доказано существование r-упаковки на $\mathbb{G}$ в метрике d_{CC}, где $c = K$ — константа из леммы Винера (см., например, [2, с. 53]). Поскольку метрика d_{CC} эквивалентна квазиметрике ρ, то существует константа D такая, что $D^{-1}\rho(y^{-1}x) \le d_{CC}(x, y) \le D\rho(y^{-1}x)$ для всех x, y. Следовательно, для любых $x \in \mathbb{G}$ и $r > 0$ будет $B_{CC}(x, r) \subset B_\rho(x, Dr)$ и $B_\rho(x, r) \subset B_{CC}(x, Dr)$. Докажем, что для данной r-упаковки, образованной шарами $B_{CC}(x_i, r)$, шары $B_\rho(x_i, Dr)$ образуют Dr-упаковку. Ясно, что $\bigcup\limits_i B_\rho(x_i, Dr) = \mathbb{G}$. При этом шары $B_{CC}(x_i, r/K)$ взаимно не пересекаются, а потому не пересекаются и лежащие внутри них шары $B_\rho(x_i, r/KD)$. Отсюда следует существование r-упаковки на $\mathbb{G}$ в квазиметрике ρ (с константой $c = KD^2$). Далее через d мы обозначаем расстояние ρ и под шарами подразумеваем открытые шары в квазиметрике ρ. Через M_k обозначим r-упаковку, образованную шарами радиуса $r = 2^k$, где k целое.

Определим слои Ω_k следующим образом: $\Omega_k = \{x \in {}^cF : c2^k \le d(x, F) \le c2^{k+1}\}$, где k целое, а $c > 2$ — некоторая константа, выбираемая ниже. Очевидно, что ${}^cF = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$. Для каждого k рассмотрим те шары из упаковки M_k, которые пересекают слой Ω_k, т. е. набор шаров $W = \bigcup\limits_k \{B \in M_k : B \cap \Omega_k \ne \varnothing\}$. Тогда $\bigcup\limits_{B_k \in W} B_k = {}^cF$. Покажем, что константу c можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись неравенства $K_1 r_i \le d(x_i, F) \le K_2 r_i$, $B_i \in W$. Пусть $B_i \in M_k$, тогда $r_i = 2^k$. Если $B_i \in W$, то найдется точка $x \in B_i \cap \Omega_k$. Поэтому

$$d(x_i, F) \le \kappa(d(x, F) + \rho(x^{-1}x_i)) \le \kappa(c2^{k+1} + 2^k) = \kappa(2c + 1)2^k$$

и

$$d(x_i, F) \ge d(x, F)/\kappa - \rho(x^{-1}x_i) \ge c2^k/\kappa - 2^k = (c/\kappa - 1)2^k.$$

Если мы выберем c так, что $(K_1+1)\kappa \le c \le (K_2-\kappa)/2\kappa$ (что возможно, если взять K_2 достаточно большим), то $\kappa(2c+1)\le K_2$, $c/\kappa-1\ge K_1$ и $K_1r_i \le (c/\kappa-1)2^k \le d(x_i,F)\le \kappa(2c+1)2^k \le K_2r_i$. В этом случае шары $B\in W$ заведомо не будут пересекаться с F (поскольку если $x\in B_i$, то $d(x,F)\ge d(x_i,F)/\kappa - \rho(x^{-1}x_i)\ge (K_1r_i/\kappa)-r_i\ge r_i$) и при этом покроют ${}^cF$. Исключим из набора W те шары, которые целиком лежат в объединении других шаров из W. Мы построили набор шаров, удовлетворяющих условиям 1, 3, 5 леммы.

Установим справедливость условия 4. Пусть $B_i\cap B_j\ne\varnothing$, тогда существует точка $x\in B_i\cap B_j$ и

$$\rho\big(x_i^{-1}x_j\big)\le \kappa(\rho(x^{-1}x_i)+\rho(x^{-1}x_j))\le \kappa(r_i+r_j).$$

Имеем

$$K_1r_i\le d(x_i,F)\le \kappa\big(\rho\big(x_i^{-1}x_j\big)+d(x_j,F)\big)\le \kappa^2(r_i+r_j)+\kappa K_2r_j.$$

Следовательно, $(K_1-\kappa^2)r_i\le(\kappa^2+\kappa K_2)r_j$. Поскольку $K_1\ge 2\kappa^2$, то $r_i\le K_3r_j$, где $K_3=(\kappa^2+\kappa K_2)/(K_1-\kappa^2)$. Из соображений симметрии получаем $r_j\le K_3r_i$.

Докажем теперь свойство 2. Пусть точка x входит в m шаров $B_1,\dots,B_m$. Обозначим один из них через B_i. Согласно свойству 3 имеем $r_i/K_3\le r_j\le K_3r_i$ для всех $j=1,\dots,m$. Пусть $y\in B_j$. Тогда

$$\begin{aligned}\rho\big(x_i^{-1}y\big)\le \kappa\big(\rho\big(x_i^{-1}x\big)+\rho(x^{-1}y)\big)\le \kappa r_i+\kappa^2\big(\rho\big(x_j^{-1}y\big)+\rho\big(x_j^{-1}x\big)\big)\\ \le \kappa r_i+2\kappa^2r_j\le \kappa(2\kappa K_3+1)r_i,\end{aligned}$$

т. е. $B_j\subset B(x_i,K_0r_i)$ для всех $j=1,\dots,m$, где $K_0=\kappa(2\kappa K_3+1)$. Рассмотрим непересекающиеся шары $\widetilde B_j=B(x_j,r_j/K_4)$. Имеем

$$\sum_{j=1}^m \operatorname{mes}\widetilde B_j=\operatorname{mes}\bigcup_{j=1}^m\widetilde B_j\le \operatorname{mes}B(x_i,K_0r_i)=(K_0r_i)^Q.$$

Следовательно, $\sum\limits_{j=1}^m(r_j/K_4)^Q\le (K_0r_i)^Q$ и $m(r_i/K_3K_4)^Q\le(K_0r_i)^Q$. Таким образом, $m\le(K_0K_3K_4)^Q$, и свойство 2 доказано.

Утверждение 6 следует из утверждения 4 и леммы (3.7) в [2]. □

Введем следующие обозначения. Для $B_i\subset {}^cF$ обозначим через p_i такую точку из F, что

$$d(x_i,F)=\rho(p_i^{-1}x_i).\tag{3.8}$$

Для произвольной точки $x\in{}^cF$ будем обозначать через $\delta(x)$ расстояние от x до множества F, т. е. $\delta(x)=d(x,F)$.

Лемма 4. *Выполняются следующие соотношения:*

$$\rho(x^{-1}p_i)\sim d(x_i,F)\sim r_i\sim\delta(x),\quad x\in B_i;\tag{3.9}$$

$$\rho(y^{-1}p_i)\le C\rho(y^{-1}x),\quad y\in F,\ x\in B_i.\tag{3.10}$$

Здесь и далее запись $A\sim B$ означает, что существуют положительные константы C_1 и C_2, зависящие только от характеристик группы $\mathbb{G}$, такие, что выполняется неравенство $C_1A\le B\le C_2A$.

Доказательство. Установим (3.9). Пусть $x\in B_i$. Тогда по свойствам квазинормы ρ имеем

$$\rho(x^{-1}p_i)\le\kappa\big(\rho\big(x^{-1}x_i\big)+\rho\big(x_i^{-1}p_i\big)\big)\le\kappa(r_i+d(x_i,F))\le\kappa\big(K_1^{-1}+1\big)d(x_i,F).$$

С другой стороны,

$$d(x_i,F)=\rho\big(x_i^{-1}p_i\big)\le\kappa(\rho(x^{-1}x_i)+\rho(x^{-1}p_i))$$
$$\le\kappa(r_i+\rho(x^{-1}p_i))\le\kappa\big(K_1^{-1}d(x_i,F)+\rho(x^{-1}p_i)\big).$$

Следовательно, $d(x_i,F)(1-\kappa K_1^{-1})\le\kappa\rho(x^{-1}p_i)$, откуда (поскольку $K_1>\kappa$) вытекает, что $d(x_i,F)\le\kappa K_1(K_1-\kappa)^{-1}\rho(x^{-1}p_i)$. Таким образом, $\rho(x^{-1}p_i)\sim d(x_i,F)\sim r_i$.

Далее,

$$\delta(x)=d(x,F)\le\kappa(\rho(x^{-1}x_i)+d(x_i,F))\le\kappa(1+K_2)r_i.$$

Вместе с тем

$$d(x_i,F)\le\kappa(\rho(x^{-1}x_i)+d(x,F))\le\kappa(r_i+\delta(x)).$$

Значит, $\delta(x)\ge d(x_i,F)/\kappa-r_i\ge(K_1/\kappa-1)r_i$. Таким образом, $r_i\sim\delta(x)$, и (3.9) доказано.

Докажем (3.10). Пусть $y\in F$, $x\in B_i$. Тогда из (3.9) следует, что

$$\rho(y^{-1}p_i)\le\kappa(\rho(y^{-1}x)+\rho(x^{-1}p_i))\le\kappa(\rho(y^{-1}x)+C'd(x_i,F)). \tag{3.11}$$

Но

$$d(x_i,F)\le\kappa(\rho(x^{-1}x_i)+d(x,F))\le\kappa(r_i+\rho(y^{-1}x))\le\kappa(K_1^{-1}d(x_i,F)+\rho(y^{-1}x)).$$

Следовательно,

$$\rho(y^{-1}x)\ge\kappa^{-1}d(x_i,F)-K_1^{-1}d(x_i,F)=(K_1-\kappa)(\kappa K_1)^{-1}d(x_i,F),$$

т. е. $d(x_i,F)\le\kappa K_1(K_1-\kappa)^{-1}\rho(y^{-1}x)$. Из (3.11) получаем

$$\rho(y^{-1}p_i)\le\kappa(1+C'\kappa K_1(K_1-\kappa)^{-1})\rho(y^{-1}x)=C\rho(y^{-1}x),$$

что доказывает (3.10). □

3.4. Оператор продолжения. Оператор продолжения набора функций $\{f_J\}_{d(J)\le k}$, заданных на множестве F, на всю группу $\mathbb{G}$ определяется следующим образом:

$$f(x)=E_k(\{f_J\})(x)=\begin{cases} f_0(x), & x\in F;\\ {\sum_i}' P(x,p_i)\varphi_i(x), & x\in {}^cF,\end{cases} \tag{3.12}$$

где

$$P(x,y)=\sum_{d(L)\le k}\Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}}\beta_{LK}f_K(y)\Big)\frac{\eta^L(y^{-1}x)}{L!},\quad x\in\mathbb{G},\ y\in F,$$

$\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы, а точки p_i определяются из равенства (3.8). Знак ${\sum}'$ означает, что сумма берется не по всем шарам B_i, содержащим точку x, а только по тем, для которых $d(x_i,F)\le 1$.

Замечание 2. Так как каждая из функций φ_i входит в класс C^∞ и сумма по i для каждого x содержит не более N_0 слагаемых, то продолженная функция $f(x)$ принадлежит классу C^∞ на ${}^cF$ и тем более непрерывна на ${}^cF$.

Замечание 3. Если $k=0$, то оператор продолжения (3.12) имеет вид

$$E_0(f)(x)=\begin{cases} f(x), & x\in F;\\ \sum\limits_i f(p_i)\varphi_i(x), & x\in {}^cF.\end{cases}$$

Замечание 4. Если $x\in B_i$, то $\delta(x)=d(x,F)\sim d(x_i,F)$, т. е. существуют такие константы C_1 и C_2, что

— если $\delta(x)\le C_1$, то сумма ${}'\sum$ есть полная сумма по всем шарам B_i, содержащим точку x;

— если $C_1\le\delta(x)\le C_2$, то сумма ${}'\sum$ содержит конечное число слагаемых;

— если $\delta(x)>C_2$, то сумма ${}'\sum$ тождественно нулевая.

В случае $C_1\le\delta(x)\le C_2$ выполняется

$$|X^Jf(x)|\le A_JM \tag{3.13}$$

для всех J. Действительно, пусть $C_1\le\delta(x)\le C_2$. Тогда

$$X^Jf(x)=X^J\Big({}'\sum_i P(x,p_i)\varphi_i(x)\Big)={}'\sum_i\sum_{J_1+J_2=J}C_{J_1,J_2}P_{J_1}(x,p_i)X^{J_2}\varphi_i(x)$$

и

$$|X^Jf(x)|\le C\,{}'\sum_i\sum_{J_1+J_2=J}|P_{J_1}(x,p_i)|\cdot|X^{J_2}\varphi_i(x)|\le C\,{}'\sum_i\sum_{J_1+J_2=J}r_i^{-d(J_2)}$$
$$\times\Big|\sum_{d(J_1)+d(L)\le k}\Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\|K|\le|L|}}\beta_{LK}\sum_{d(S)=d(J_1)+d(K)}\gamma_{KJ_1S}\ f_S(p_i)\Big)\frac{\eta^L(p_i^{-1}x)}{L!}\Big|$$
$$\le C\,{}'\sum_i\sum_{J_1+J_2=J}\sum_{L,K,S}|f_S(p_i)|\rho(p_i^{-1}x)^{d(L)}r_i^{-d(J_2)}\le CM$$

в силу того, что сумма содержит конечное число слагаемых, и того, что

$$\rho(p_i^{-1}x)^{d(L)}r_i^{-d(J_2)}\sim\delta(x)^{d(L)-d(J_2)}\le C,$$

так как $C_1\le\delta(x)\le C_2$.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь те x, для которых $\delta(x)\le C_1$.

3.5. Доказательство теоремы о продолжении.

Лемма 5. *Справедливы следующие неравенства:*

$$|f(x)-P(x,a)|\le AM\rho(a^{-1}x)^\gamma,\quad x\in\mathbb{G},\ a\in F; \tag{3.14}$$
$$|X^Jf(x)-P_J(x,a)|\le AM\rho(a^{-1}x)^{\gamma-d(J)},\quad x\in\mathbb{G},\ a\in F,\ d(J)\le k; \tag{3.15}$$
$$|X^Jf(x)|\le AM,\quad x\in\mathbb{G},\ d(J)\le k; \tag{3.16}$$
$$|X^Jf(x)|\le AM\delta(x)^{\gamma-k-1},\quad x\in{}^cF,\ d(J)=k+1. \tag{3.17}$$

Доказательство. Докажем неравенство (3.14). Оно, очевидно, выполняется для $x\in F$ с $A=1$. Предположим, что $x\in{}^cF$, $\delta(x)\le C_1$. Тогда из (3.7) и того, что $\sum\limits_i\varphi_i(x)=1$, получаем

$$f(x)-P(x,a)=\sum_i(P(x,p_i)-P(x,a))\varphi_i(x)$$
$$=-\sum_i\sum_{d(L)\le k}\Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\|K|\le|L|}}\beta_{LK}R_K(a,p_i)\Big)\frac{\eta^L(a^{-1}x)}{L!}\varphi_i(x).$$

Отсюда

$$|f(x)-P(x,a)| \le C \sum_{d(L)\le k} \sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \sum_i |R_K(a,p_i)|\cdot|\eta^L(a^{-1}x)|\cdot|\varphi_i(x)|$$
$$\le CM\sum_{L,K}\sum_i \rho(a^{-1}p_i)^{\gamma-d(K)}\rho(a^{-1}x)^{d(L)}$$
$$\le CM\sum_{L,K}\sum_i \rho(a^{-1}x)^{\gamma-d(L)+d(L)} \le AM\rho(a^{-1}x)^{\gamma}.$$

Мы использовали то, что $\rho(a^{-1}p_i)\le C\rho(a^{-1}x)$ (неравенство (3.10)), $\gamma-d(K)=\gamma-d(L)>0$ и что сумма содержит конечное число слагаемых.

Докажем неравенство (3.15). Оно, очевидно, выполняется для $x\in F$ с $A=1$, если учесть, что $X^Jf(x)=f_J(x)$ для $x\in F$ (это мы докажем позже). Предположим, что $x\in {}^cF$, $\delta(x)\le C_1$. Тогда из (3.5) следует, что

$$X^Jf(x)=X^J\Big(\sum_i P(x,p_i)\varphi_i(x)\Big)=\sum_i P_J(x,p_i)\varphi_i(x)$$
$$+\sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\ne 0}} C_{J_1,J_2}P_{J_1}(x,p_i)X^{J_2}\varphi_i(x).$$

Если $\rho(a^{-1}x)\le\beta\delta(x)$, где $\beta>1$ — некоторая постоянная, то возьмем $b=a$; если же $\rho(a^{-1}x)>\beta\delta(x)$, то выберем любую точку $b\in F$ такую, что $\rho(b^{-1}x)\le\beta\delta(x)$. Ясно, что в обоих случаях

$$\rho(b^{-1}x)\le\beta\delta(x),\ \ \rho(b^{-1}x)\le\rho(a^{-1}x).$$

Поскольку $\sum\limits_i\varphi_i(x)\equiv 1$ и $\sum\limits_i X^{J_2}\varphi_i(x)\equiv 0$ для $x\in {}^cF$ и $0<d(J_2)\le k$, из (3.7) получаем

$$X^Jf(x)-P_J(x,a)=\sum_i (P(x,p_i)-P(x,a))\varphi_i(x)$$
$$+\sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\ne 0}} C_{J_1,J_2}(P_{J_1}(x,p_i)-P_{J_1}(x,b))X^{J_2}\varphi_i(x)=-\sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\ne 0}} C_{J_1,J_2}$$
$$\times\sum_{d(J_1)+d(L)\le k}\Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}}\beta_{LK}\sum_{d(S)=d(J_1)+d(K)}\gamma_{KJ_1S}\ R_S(b,p_i)\Big)\frac{\eta^L(b^{-1}x)}{L!}X^{J_2}\varphi_i(x)$$
$$-\sum_i\sum_{d(J)+d(L)\le k}\Big(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}}\beta_{LK}\sum_{d(S)=d(J)+d(K)}\gamma_{KJS}R_S(a,p_i)\Big)\frac{\eta^L(a^{-1}x)}{L!}\varphi_i(x).$$

Поэтому

$$|X^Jf(x)-P_J(x,a)|\le C\sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\ne 0}} \sum_{L,K,S}|R_S(b,p_i)|\cdot|\eta^L(b^{-1}x)|\cdot|X^{J_2}\varphi_i(x)|$$
$$+C\sum_i\sum_{L,K,S}|R_S(a,p_i)|\cdot|\eta^L(a^{-1}x)|\cdot|\varphi_i(x)|$$

$$\leq CM \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} \sum_{L,K,S} \rho(p_i^{-1}b)^{\gamma-d(S)}\rho(b^{-1}x)^{d(L)} r_i^{-d(J_2)}$$

$$+ CM \sum_i \sum_{L,K,S} \rho(p_i^{-1}a)^{\gamma-d(S)}\rho(a^{-1}x)^{d(L)}.$$

В первой сумме $\gamma - d(S) = \gamma - d(J_1) - d(K) = \gamma - d(J_1) - d(L) > 0$ и $\rho(p_i^{-1}b) \leq C\rho(b^{-1}x)$ согласно (3.10). Поскольку $\rho(b^{-1}x) \leq \beta\delta(x)$, имеем

$$r_i^{-d(J_2)} \sim \delta(x)^{-d(J_2)} \leq C\rho(b^{-1}x)^{-d(J_2)}.$$

Во второй сумме $\gamma - d(S) = \gamma - d(J) - d(K) = \gamma - d(J) - d(L) > 0$ и $\rho(p_i^{-1}a) \leq C\rho(a^{-1}x)$ согласно (3.10). Поэтому

$$|X^J f(x) - P_J(x,a)| \leq CM \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} \sum_{L,K,S} \rho(b^{-1}x)^{\gamma-d(J_1)-d(L)+d(L)-d(J_2)}$$

$$+ CM \sum_i \sum_{L,K,S} \rho(a^{-1}x)^{\gamma-d(J)-d(L)+d(L)} \leq CM \sum_i \sum_{J_1+J_2=J} \sum_{L,K,S} \rho(a^{-1}x)^{\gamma-d(J)}$$

$$\leq AM\rho(a^{-1}x)^{\gamma-d(J)},$$

поскольку $\rho(b^{-1}x) \leq \rho(a^{-1}x)$, $\gamma - d(J) > 0$ и сумма содержит конечное число слагаемых.

Неравенство (3.16) следует из (3.15), если для $x \in \mathbb{G}$ выбрать такую точку $a \in F$, что $\rho(a^{-1}x) \leq C$. Это возможно в силу того, что сумма ${\sum}'$ берется только по тем шарам B_i, расстояние от которых до F ограничено сверху некоторой константой.

Докажем (3.17). Пусть $x \in {}^cF$, $\delta(x) \leq C_1$, $d(J) = k+1$. Имеем

$$X^J f(x) = \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} C_{J_1,J_2} P_{J_1}(x,p_i) X^{J_2}\varphi_i(x),$$

здесь $J_2 \neq 0$, так как $X^{J_1}P \equiv 0$ при $J_1 = J$, $d(J) = k+1$. Выберем такую точку $a \in F$, что $\rho(a^{-1}x) = \delta(x)$. Поскольку $\sum\limits_i X^{J_2}\varphi_i(x) \equiv 0$ для $x \in {}^cF$, из (3.7) получаем

$$X^J f(x) = \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} C_{J_1,J_2}(P_{J_1}(x,p_i) - P_{J_1}(x,a)) X^{J_2}\varphi_i(x)$$

$$= -\sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} C_{J_1,J_2} \sum_{d(J_1)+d(L)\leq k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\leq|L|}} \beta_{LK}$$

$$\times \sum_{d(S)=d(J_1)+d(K)} \gamma_{KJ_1S} R_S(a,p_i) \Bigg) \frac{\eta^L(a^{-1}x)}{L!} X^{J_2}\varphi_i(x)$$

и

$$|X^J f(x)| \leq C \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} \sum_{L,K,S} |R_S(a,p_i)| \cdot |\eta^L(a^{-1}x)| \cdot |X^{J_2}\varphi_i(x)|$$

$$\leq CM \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} \sum_{L,K,S} \rho(p_i^{-1}a)^{\gamma-d(S)}\rho(a^{-1}x)^{d(L)} r_i^{-d(J_2)}$$

$$\leq CM \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} \sum_{L,K,S} \delta(x)^{\gamma-d(J_1)-d(L)+d(L)-d(J_2)}$$

$$\leq CM \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} \sum_{L,K,S} \delta(x)^{\gamma-d(J)} \leq AM\delta(x)^{\gamma-k-1}.$$

Здесь мы использовали то, что $\rho(a^{-1}x) = \delta(x)$, $r_i \sim \delta(x)$, $\rho(p_i^{-1}a) \leq C\rho(a^{-1}x)$ согласно (3.10), $\gamma - d(S) = \gamma - d(J_1) - d(K) = \gamma - d(J_1) - d(L) > 0$, $d(J) = k+1$, а также то, что сумма содержит конечное число слагаемых. Лемма доказана. □

Лемма 6. *Функция $f = E_k(\{f_J\})$ имеет непрерывные ограниченные производные $X^J f$ в $\mathbb{G}$ для всех $d(J) \leq k$, причем $X^J f(x) = f_J(x)$ для $x \in F$.*

Доказательство. Докажем лемму по индукции. Сама функция f ограничена (из (3.16)), непрерывна на ${}^cF$ и совпадает с f_0 на F. Докажем непрерывность f в точке $a \in F$. Пусть $x \in \mathbb{G}$. Тогда из (3.14) следует, что

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - P(x,a)| + |f(a) - P(x,a)| \leq AM\rho(a^{-1}x)^\gamma + O(\rho(a^{-1}x)) \to 0 \quad (3.18)$$

при $\rho(a^{-1}x) \to 0$.

Пусть утверждение доказано для $|J| \leq m$, $d(J) \leq k$: существуют непрерывные ограниченные производные $X^J f$ в $\mathbb{G}$, причем $X^J f = f_J$ на F. Докажем это для $|I| = m+1$, $d(I) \leq k$. Пусть $I = e_i + J$ с $|J| = m$, т. е. $X^I = X_i X^J$.

Из равенства $X^J f(a) = f_J(a)$ для $a \in F$ вытекает справедливость соотношения (3.15) и для $x \in F$.

Ясно, что в точке $x \in {}^cF$ существуют непрерывные производные всех порядков. Докажем, что в точке $a \in F$ существует производная

$$X_i X^J f(a) = \sum_{d(S)=d(J)+d_i} \gamma_{e_i J S} f_S(a).$$

Действительно,

$$\Big| t^{-1}(X^J f(a\cdot \exp(tX_i)) - f_J(a)) - \sum_{d(S)=d(J)+d_i} \gamma_{e_i J S} f_S(a) \Big| \leq |t^{-1}(X^J f(a\cdot\exp(tX_i)) - P_J(a\cdot\exp(tX_i), a))| + \Big| t^{-1}\Big(P_J(a\cdot\exp(tX_i), a) - f_J(a) - t \sum_{d(S)=d(J)+d_i} \gamma_{e_i J S} f_S(a)\Big)\Big|. \quad (3.19)$$

В первом слагаемом согласно (3.15)

$$|X^J f(a\cdot\exp(tX_i)) - P_J(a\cdot\exp(tX_i), a)| \leq C\rho(\exp(tX_i))^{\gamma-d(J)} \sim C|t|^{\frac{\gamma-d(J)}{d_i}}.$$

Второе слагаемое имеет порядок $O(t)$.

Итак, в точке $a \in F$ существует производная

$$X^I f(a) = X_i X^J f(a) = \sum_{d(S)=d(J)+d_i} \gamma_{e_i J S} f_S(a) = f_{e_i+J}(a) = f_I(a),$$

поскольку $\gamma_{e_i J, e_i + J} = 1$, а для всех $S \neq e_i + J$ в нашем случае $\gamma_{e_i JS} = 0$. Это следует из того, что согласно (2.4)

$$X^{e_i+J} g = X_i X^J g = \sum_{d(S)=d(J)+d_i} \gamma_{e_i JS} X^S g \quad \text{для любой функции } g.$$

Воспользуемся (3.15), чтобы доказать непрерывность производной $X^I f$ в точках множества F. Пусть $a \in F$. Тогда

$$\begin{aligned} |X^I f(x) - f_I(a)| &\le |X^I f(x) - P_I(x,a)| + |P_I(x,a) - f_I(a)| \\ &\le CM\rho(a^{-1}x)^{\gamma - d(I)} + O(\rho(a^{-1}x)) \to 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

при $\rho(a^{-1}x) \to 0$.

Ограниченность производной вытекает из (3.16). Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $d(J) = k$. Обозначим $g(x) = X^J f(x)$. Нам понадобятся следующие неравенства:

$$|g(x) - g(a)| \le AM\rho(a^{-1}x)^{\gamma - k}, \quad x \in \mathbb{G},\ a \in F; \tag{3.21}$$

$$|X_i g(x)| \le AM\delta(x)^{\gamma - k - 1}, \quad x \in {}^cF,\ i = 1, \dots, n. \tag{3.22}$$

Докажем (3.21). Если $x \in F$ или $x \in {}^cF$, $\delta(x) \le C_1$, то из неравенства (3.15) получим

$$|g(x) - g(a)| = |X^J f(x) - f_J(a)| = |X^J f(x) - P_J(x,a)| \le AM\rho(a^{-1}x)^{\gamma - k},$$

поскольку $P_J(x,a) = f_J(a)$ для $d(J) = k$. Если же $x \in {}^cF$, $C_1 \le \delta(x) \le C_2$, то

$$|g(x) - g(a)| \le |g(x)| + |g(a)| \le 2M \le CM\delta(x)^{\gamma - k} \le AM\rho(a^{-1}x)^{\gamma - k}.$$

Докажем (3.22). Если $\delta(x) \le C_1$, то из неравенства (3.17) имеем

$$\begin{aligned} |X_i g(x)| = |X^{e_i} X^J f(x)| &= \Big| \sum_{d(S)=k+1} \gamma_{e_i JS} X^S f(x) \Big| \\ &\le C \sum_{d(S)=k+1} |X^S f(x)| \le AM\delta(x)^{\gamma - k - 1}. \end{aligned}$$

Если же $C_1 \le \delta(x) \le C_2$, то из (3.13) получаем

$$|X_i g(x)| \le CM \le AM\delta(x)^{\gamma - k - 1}.$$

Для доказательства теоремы осталось установить, что функции g принадлежат классу $\mathrm{Lip}(\gamma - k, \mathbb{G})$. То, что $|g(x)| \le M'$ для некоторого $M' = A'M$, следует из (3.16). Осталось показать, что для любых $x, y \in \mathbb{G}$

$$|g(x) - g(y)| \le M'\rho(y^{-1}x)^{\gamma - k}.$$

Если $x, y \in F$, то это, очевидно, вытекает из того, что $\{f_J\} \in \mathrm{Lip}(\gamma, F)$, а если $x \in {}^cF$, $y \in F$, то — из (3.21).

Пусть $x, y \in {}^cF$. Обозначим

$$L = \{yz : \rho(z) \le b\rho(y^{-1}x)\},$$

где b — константа из теоремы Лагранжа на группе Карно. Рассмотрим два случая: $d(L,F) > \rho(y^{-1}x)$ и $d(L,F) \le \rho(y^{-1}x)$.

Пусть $d(L,F) > \rho(y^{-1}x)$. Тогда по теореме Лагранжа (2.12)

$$|g(x)-g(y)| \le C\rho(y^{-1}x) \sup_{\substack{\rho(z)\le b\rho(y^{-1}x),\\ i=1,\dots,n}} |X_i g(yz)|$$
$$\le CAM\rho(y^{-1}x) \sup_{\rho(z)\le b\rho(y^{-1}x)} \delta(yz)^{\gamma-k-1} \le M'\rho(y^{-1}x)^{\gamma-k}.$$

Здесь мы использовали неравенство (3.22) и то, что

$$\delta(yz) = d(yz,F) \ge d(L,F) > \rho(y^{-1}x),$$

следовательно (поскольку $\gamma-k-1\le 0$),

$$\sup_{yz\in L} \delta(yz)^{\gamma-k-1} \le \rho(y^{-1}x)^{\gamma-k-1}.$$

Пусть теперь $d(L,F)\le \rho(y^{-1}x)$. В этом случае существуют точки $x' = yz \in L$ и $y'\in F$ такие, что $\rho((y')^{-1}x') \le \rho(y^{-1}x)$. Тогда

$$\rho((y')^{-1}x) \le \kappa(\rho((y')^{-1}x') + \rho((x')^{-1}x)) \le \kappa(\rho(y^{-1}x) + \rho((yz)^{-1}x))$$
$$\le \kappa(\rho(y^{-1}x)+\rho(z^{-1}y^{-1}x)) \le \kappa\rho(y^{-1}x)+\kappa^2(\rho(z)+\rho(y^{-1}x)) \le (\kappa+\kappa^2 b+\kappa^2)\rho(y^{-1}x)$$

и

$$\rho((y')^{-1}y) \le \kappa(\rho((y')^{-1}x') + \rho((x')^{-1}y)) \le \kappa(\rho(y^{-1}x) + \rho((yz)^{-1}y))$$
$$= \kappa(\rho(y^{-1}x)+\rho(z)) \le (\kappa+\kappa b)\rho(y^{-1}x).$$

Поскольку $y'\in F$, согласно (3.22)

$$|g(x)-g(y)| \le |g(x)-g(y')| + |g(y)-g(y')|$$
$$\le AM\rho((y')^{-1}x)^{\gamma-k} + AM\rho((y')^{-1}y)^{\gamma-k} \le M'\rho(y^{-1}x)^{\gamma-k}.$$

Теорема доказана, если отметить, что $M' = CM$ для некоторой константы C, не зависящей от множества F. $\square$

3.6. Теорема о продолжении для пространства Липшица с модулем непрерывности более общего вида. Пусть $\omega(\delta)$, $0<\delta<\infty$, — регулярный модуль непрерывности, т. е. положительная непрерывная возрастающая функция от δ, обладающая следующими свойствами:

$$\omega(0) = 0; \quad \omega(\delta)/\delta \text{ убывает.} \tag{3.23}$$

Из последнего условия следует, что для любого $C_1>0$ существует такое $C_2>0$, что $\omega(C_1\delta)\le C_2\omega(\delta)$ для всех $\delta>0$.

Определение 5. Пусть $k\ge 0$ — целое число. Будем говорить, что функция f, заданная на $\mathbb{G}$, *принадлежит пространству Липшица* $\mathrm{Lip}(k+\omega,\mathbb{G})$, если существует константа M, для которой выполняется (для всех $d(J)\le k$)

$$|X^J f(x)| \le M;\ |R_J(x,y)| \le M\rho(y^{-1}x)^{k-d(J)}\omega(\rho(y^{-1}x)) \quad \text{для любых } x,y\in\mathbb{G}, \tag{3.24}$$

где R_J определяется формулой (3.2).

Определение 6. Набор функций $\{f_J\}_{d(J)\le k}$, заданных на F, *принадлежит пространству Липшица* $\mathrm{Lip}(k+\omega, F)$, если существует константа M, для которой выполняется (при всех $d(J)\le k$)

$$|f_J(x)|\le M;\ |R_J(x,y)|\le M\rho(y^{-1}x)^{k-d(J)}\omega(\rho(y^{-1}x)) \quad \text{для любых } x,y\in F, \tag{3.25}$$

где R_J определяется формулой (3.4).

Замечание 5. При $\omega(\delta)=\delta^{\gamma-k}$, $k<\gamma\le k+1$, пространство $\mathrm{Lip}(k+\omega,F)$ совпадает с $\mathrm{Lip}(\gamma,F)$.

Замечание 6. При $k=0$ условие (3.25) примет вид

$$|f(x)|\le M;\ |f(y)-f(x)|\le M\omega(\rho(y^{-1}x)) \quad \text{для любых } x,y\in F.$$

Теорема 3. *Существует линейный оператор продолжения E_k, непрерывно отображающий пространство $\mathrm{Lip}(k+\omega,F)$ в пространство $\mathrm{Lip}(k+\omega,\mathbb{G})$, причем норма оператора ограничена постоянной, не зависящей от замкнутого множества $F\subset\mathbb{G}$, т. е. если набор функций $\{f_J\}_{d(J)\le k}$ принадлежит $\mathrm{Lip}(k+\omega,F)$, то $f=E_k(\{f_J\})\in\mathrm{Lip}(k+\omega,\mathbb{G})$, причем*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(k+\omega,\mathbb{G})}\le C\|\{f_J\}\|_{\mathrm{Lip}(k+\omega,F)},$$

где C не зависит от множества F.

Эта теорема является обобщением теоремы 2, и ее доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 2. Поэтому мы приведем лишь формулировки основных вспомогательных утверждений.

Лемма 7. *Если функция f непрерывна и ограничена в $\mathbb{G}$ и имеет непрерывные ограниченные производные X^Jf до порядка k (т. е. $d(J)\le k$), причем $X^Jf\in\mathrm{Lip}(\omega,\mathbb{G})$ для $d(J)=k$, то $f\in\mathrm{Lip}(k+\omega,\mathbb{G})$.*

Лемма доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 8. *Справедливы следующие неравенства:*

$$|f(x)-P(x,a)|\le AM\rho(a^{-1}x)^k\omega(\rho(a^{-1}x)),\quad x\in\mathbb{G},\ a\in F; \tag{3.26}$$

$$|X^Jf(x)-P_J(x,a)|\le AM\rho(a^{-1}x)^{k-d(J)}\omega(\rho(a^{-1}x)),\quad x\in\mathbb{G},\ a\in F,\ d(J)\le k; \tag{3.27}$$

$$|X^Jf(x)|\le AM,\quad x\in\mathbb{G},\ d(J)\le k; \tag{3.28}$$

$$|X^Jf(x)|\le AM\delta(x)^{-1}\omega(\delta(x)),\quad x\in {}^cF,\ d(J)=k+1. \tag{3.29}$$

Лемма доказывается аналогично лемме 5 (неравенства (3.14)–(3.17)), используются свойства (3.23) функции $\omega(\delta)$.

Лемма 9. *Функция $f=E_k\{f_J\}$ имеет непрерывные ограниченные производные X^Jf в $\mathbb{G}$ для всех $d(J)\le k$, причем $X^Jf(x)=f_J(x)$ для $x\in F$.*

Лемма доказывается аналогично лемме 6 с использованием свойств (3.23) функции $\omega(\delta)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $d(J)=k$. Обозначим $g(x)=X^Jf(x)$. Нам понадобятся следующие неравенства:

$$|g(x)-g(a)|\le AM\omega(\rho(a^{-1}x)),\quad x\in\mathbb{G},\ a\in F; \tag{3.30}$$

$$|X_ig(x)|\le AM\delta(x)^{-1}\omega(\delta(x)),\quad x\in {}^cF,\ i=1,\dots,n. \tag{3.31}$$

Они доказываются аналогично соответствующим неравенствам (3.21) и (3.22).

Для доказательства теоремы осталось установить, что функции g принадлежат классу $\mathrm{Lip}(\omega, \mathbb{G})$, т. е. для любых $x, y \in \mathbb{G}$ выполняется неравенство

$$|g(x) - g(y)| \le M'\omega(\rho(y^{-1}x)).$$

Для $x \in {}^cF$ и $y \in F$ это следует из (3.30). Рассуждения в случае $x, y \in {}^cF$ дословно повторяют доказательство теоремы 2, только вместо неравенства (3.22) используется неравенство (3.31), а оценка в случае $d(L, F) > \rho(y^{-1}x)$ получается следующим образом:

$$\begin{aligned}|g(x) - g(y)| \le C\rho(y^{-1}x) &\sup_{\substack{\rho(z)\le b\rho(y^{-1}x),\\ i=1,\dots,n}} |X_i g(yz)| \\ &\le CAM\rho(y^{-1}x)\sup_{\xi\in L}\delta(\xi)^{-1}\omega(\delta(\xi)) \le M'\omega(\rho(y^{-1}x)),\end{aligned}$$

поскольку $\delta(\xi) > \rho(y^{-1}x)$, а функция $\omega(\delta)/\delta$ убывает (см. (3.23)). $\square$

4. Обобщение классической теоремы Уитни на группах Карно

Теорема 4. *Пусть набор функций $\{f_J\}_{d(J)\le k}$, заданных на F, удовлетворяет следующим условиям: $|f_J(x)| \le M$, $d(J) \le k$, на любом компактном подмножестве множества F и $R_J(x, y) = o(\rho(y^{-1}x)^{k-d(J)})$ в том смысле, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\bar{x} \in F$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x}) > 0$ такое, что для всех $x, y \in F$, удовлетворяющих условиям $\rho(\bar{x}^{-1}x) < \delta$ и $\rho(\bar{x}^{-1}y) < \delta$, выполняется неравенство*

$$|R_J(x, y)| \le \varepsilon\rho(y^{-1}x)^{k-d(J)}.$$

Тогда оператор E_k, определяемый формулой (3.12), задает продолжение набора функций $\{f_J\}$ на всю группу $\mathbb{G}$. Продолженная функция $f = E_k(\{f_J\})$ принадлежит классу $C^k(\mathbb{G})$, т. е. для всех J, где $d(J) \le k$, существуют непрерывные производные $X^J f$, причем $X^J f|_F = f_J$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательствам теорем 2 и 3. Однако она не является прямым следствием теоремы 3, поскольку в ней накладываются более слабые условия на набор функций $\{f_J\}$. Эта теорема является аналогом классической теоремы Уитни [4, 5]. Для функций класса C^1 на группах Гейзенберга соответствующая теорема доказана в статье [6]. Некоторые обобщения классической теоремы Уитни в $\mathbb{R}^n$ получены Фефферманом [7].

Лемма 10. *Пусть $a \in F$, $x \in {}^cF$, $d(J) \le k$. Тогда $X^J f(x) - P_J(x, a) = o(\rho(a^{-1}x)^{k-d(J)})$ при $x \to a$ в обычном смысле, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon, a) > 0$ такое, что если $\rho(a^{-1}x) < \tilde{\delta}$, то $|X^J f(x) - P_J(x, a)| \le \varepsilon\rho(a^{-1}x)^{k-d(J)}$.*

Доказательство. Лемма доказывается аналогично неравенству (3.15). Очевидно, что производные $X^J f(x)$ существуют и непрерывны на ${}^cF$. Поскольку $x \to a$, достаточно рассмотреть случай $\delta(x) \le C_1$, т. е. сумма ${}'\sum$ в (3.12) есть полная сумма по всем шарам B_i, содержащим точку x. В этом случае из (3.5) получаем

$$X^J f(x) = \sum_i P_J(x, p_i)\varphi_i(x) + \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\ne 0}} C_{J_1,J_2} P_{J_1}(x, p_i) X^{J_2}\varphi_i(x).$$

Если $\rho(a^{-1}x) \leq \beta\delta(x)$, где $\beta > 1$ — некоторая постоянная, то возьмем $b = a$; если же $\rho(a^{-1}x) > \beta\delta(x)$, то выберем любую точку $b \in F$ такую, что $\rho(b^{-1}x) \leq \beta\delta(x)$. Ясно, что в обоих случаях $\rho(b^{-1}x) \leq \beta\delta(x)$, $\rho(b^{-1}x) \leq \rho(a^{-1}x)$.

Поскольку $\sum\limits_i \varphi_i(x) \equiv 1$ и $\sum\limits_i X^{J_2}\varphi_i(x) \equiv 0$ для $x \in {}^cF$ и $0 < d(J_2) \leq k$, из (3.7) получаем

$$X^J f(x) - P_J(x,a) = \sum_i (P(x,p_i) - P(x,a))\varphi_i(x)$$
$$+ \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} C_{J_1,J_2}(P_{J_1}(x,p_i) - P_{J_1}(x,b))X^{J_2}\varphi_i(x) = -\sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} C_{J_1,J_2}$$
$$\times \sum_{d(J_1)+d(L)\leq k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\leq|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J_1)+d(K)} \gamma_{KJ_1S} R_S(b,p_i)\Bigg) \frac{\eta^L(b^{-1}x)}{L!}\, X^{J_2}\varphi_i(x)$$
$$-\sum_i \sum_{d(J)+d(L)\leq k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\leq|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS} R_S(a,p_i)\Bigg) \frac{\eta^L(a^{-1}x)}{L!}\varphi_i(x),$$

$$|X^J f(x) - P_J(x,a)| \leq C \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} \sum_{L,K,S} |R_S(b,p_i)|\rho(b^{-1}x)^{d(L)} r_i^{-d(J_2)}$$
$$+ C\sum_i \sum_{L,K,S} |R_S(a,p_i)|\rho(a^{-1}x)^{d(L)}.$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Пусть $\bar{x} = a$, и $\rho(a^{-1}x) < \tilde{\delta} = \frac{\delta}{\kappa(\mathbf{C}+2\kappa)}$, где $\delta = \delta(\varepsilon/\widetilde{C}, a)$ выбрано согласно условию теоремы, $\mathbf{C}$ — константа из (3.10), а $\widetilde{C}$ — константа, зависящая от k и характеристик группы $\mathbb{G}$, она будет выбрана позднее.

Ввиду (3.10)

$$\rho(a^{-1}p_i) < \mathbf{C}\tilde{\delta} \leq \delta, \quad \rho(a^{-1}b) \leq \kappa(\rho(b^{-1}x) + \rho(a^{-1}x)) \leq 2\kappa\rho(a^{-1}x) < 2\kappa\tilde{\delta} \leq \delta,$$
$$\rho(b^{-1}p_i) \leq \kappa(\rho(a^{-1}p_i) + \rho(a^{-1}b)) < \kappa(\mathbf{C}+2\kappa)\tilde{\delta} = \delta.$$

Из условий теоремы и неравенства (3.10) следует, что

$$|R_S(a,p_i)| \leq \frac{\varepsilon}{\widetilde{C}}\rho(a^{-1}p_i)^{k-d(S)} = \frac{\varepsilon}{\widetilde{C}}\rho(a^{-1}p_i)^{k-d(J)-d(L)} \leq C\frac{\varepsilon}{\widetilde{C}}\rho(a^{-1}x)^{k-d(J)-d(L)}$$

во второй сумме и

$$|R_S(b,p_i)| \leq \frac{\varepsilon}{\widetilde{C}}\rho(b^{-1}p_i)^{k-d(S)} = \frac{\varepsilon}{\widetilde{C}}\rho(b^{-1}p_i)^{k-d(J_1)-d(L)} \leq C\frac{\varepsilon}{\widetilde{C}}\rho(b^{-1}x)^{k-d(J_1)-d(L)}$$

в первой. Поскольку $\rho(b^{-1}x) \leq \beta\delta(x)$, то $r_i^{-d(J_2)} \sim \delta(x)^{-d(J_2)} \leq C\rho(b^{-1}x)^{-d(J_2)}$. Отсюда

$$|X^J f(x) - P_J(x,a)| \leq C\frac{\varepsilon}{\widetilde{C}} \sum_i \sum_{\substack{J_1+J_2=J,\\ J_2\neq 0}} \sum_{L,K,S} \rho(b^{-1}x)^{k-d(J_1)-d(L)+d(L)-d(J_2)}$$
$$+ C\frac{\varepsilon}{\widetilde{C}}\sum_i \sum_{L,K,S} \rho(a^{-1}x)^{k-d(J)-d(L)+d(L)} \leq \widetilde{C}\frac{\varepsilon}{\widetilde{C}}\rho(a^{-1}x)^{k-d(J)} = \varepsilon\rho(a^{-1}x)^{k-d(J)},$$

так как $\rho(b^{-1}x) \le \rho(a^{-1}x)$, $k - d(J) \ge 0$ и сумма содержит конечное число слагаемых. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4. Требуется доказать, что продолженная функция f имеет непрерывные производные $X^J f$ с $d(J) \le k$, причем $X^J f = f_J$ на множестве F. Поскольку $f \in C^\infty({}^cF)$, достаточно доказать существование и непрерывность производных в точках множества F.

Докажем это по индукции. Сама функция f по построению совпадает с f_0 на F. Докажем ее непрерывность в точке $a \in F$. Пусть $x \in \mathbb{G}$ и $\rho(a^{-1}x) \to 0$. Тогда из леммы 10 следует, что

$$|f(x) - f(a)| \le |f(x) - P(x,a)| + |f(a) - P(x,a)| \le o(\rho(a^{-1}x)^k) + O(\rho(a^{-1}x)) \to 0$$

при $\rho(a^{-1}x) \to 0$.

Пусть уже доказано, что f имеет непрерывные производные $X^J f$ с $|J| \le m$, $d(J) \le k$, причем $X^J f = f_J$ на F.

Из оценки остатка R_J в условии теоремы и того, что $X^J f(x) = f_J(x)$ для $x \in F$, следует, что оценка $X^J f(x) - P_J(x,a) = o(\rho(a^{-1}x)^{k-d(J)})$ верна и для $x \in F$.

Рассмотрим $X^I f$ с $|I| = m+1$, $d(I) \le k$. Пусть $I = e_i + J$ с $|J| = m$, т. е. $X^I = X_i X^J$. Тогда $d(I) = d_i + d(J)$.

Докажем, что в точке $a \in F$ существует производная

$$X_i X^J f(a) = \sum_{d(S)=d(J)+d_i} \gamma_{e_i JS} f_S(a).$$

Действительно, справедливо неравенство (3.19). В первом слагаемом в правой части (3.19) согласно лемме 10, если $a\exp(tX_i) \notin F$, и в силу оценок R_J, если $a\exp(tX_i) \in F$, имеем

$$|X^J f(a\exp(tX_i)) - P_J(a\exp(tX_i), a)| = o(\rho(\exp(tX_i))^{k-d(J)}) = o(|t|^{\frac{k-d(J)}{d_i}}).$$

Второе слагаемое имеет порядок $O(|t|)$. Поэтому

$$\Big|t^{-1}(X^J f(a\exp(tX_i)) - f_J(a)) - \sum_{d(S)=d(J)+d_i} \gamma_{e_i JS} f_S(a)\Big| \le o(|t|^{\frac{k-d(J)}{d_i}-1}) + O(|t|) \to 0$$

при $|t| \to 0$, поскольку $k - d(J) - d_i = k - d(I) \ge 0$.

Итак, в точке $a \in F$ существует производная

$$X^I f(a) = X_i X^J f(a) = \sum_{d(S)=d(J)+d_i} \gamma_{e_i JS} f_S(a) = f_{e_i+J}(a) = f_I(a).$$

Здесь, как и в лемме 6, используется формула (2.4).

Докажем непрерывность производной $X^I f$ в точках множества F. Пусть $a \in F$. По лемме 10

$$|X^I f(x) - f_I(a)| \le |X^I f(x) - P_I(x,a)| + |P_I(x,a) - f_I(a)| \le o(\rho(a^{-1}x)^{k-d(I)}) + O(\rho(a^{-1}x)) \to 0$$

при $\rho(a^{-1}x) \to 0$, так как $k - d(I) \ge 0$. Второе слагаемое оценивается аналогично лемме 6 (см. (3.20)). Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Теоремы типа Уитни о продолжении функций на группе Карно // Докл. РАН. 2006. Т. 406, № 5. С. 586–590.
2. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton, NJ: Amer. Math. Soc., 1982.
3. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1015–1048.
4. *Whitney H.* Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 63–89.
5. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
6. *Franchi B., Serapioni R., Serra Cassano F.* Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group // Math. Ann. 2001. V. 321, N 3. P. 479–531.
7. *Fefferman C.* A sharp form of Whitney's extension theorem // Ann. of Math. (2). 2005. V. 161, N 1. P. 509–577.

Статья поступила 8 июля 2005 г., окончательный вариант — 3 ноября 2005 г.

Водопьянов Сергей Константинович, Пупышев Илья Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru, iluxa1@ngs.ru