Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 512

ОПЕРАДЫ И МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОЛИЛИНЕЙНЫМИ ТОЖДЕСТВАМИ

С. Н. Тронин

Аннотация: Показано, что многообразия алгебр над абстрактными клонами и над соответствующими им операдами рационально эквивалентны. Введен класс операд (названных для определенности коммутативными), многообразия алгебр над которыми в некотором смысле походят на категории модулей над коммутативными кольцами. В частности, для алгебр над такими операдами имеет смысл понятие полилинейного отображения и тензорного произведения алгебр. Примерами многообразий над коммутативными операдами являются категории модулей над коммутативными кольцами и категория конвексоров. По аналогии с теорией линейных мультиоператорных алгебр развивается теория C-линейных мультиоператорных алгебр, в частности алгебр, определяемых C-полилинейными тождествами (здесь C — коммутативная операда). Вводятся и изучаются симметрические C-линейные операды. Основной результат работы: многообразие мультиоператорных C-линейных алгебр определяется C-полилинейными тождествами тогда и только тогда, когда оно рационально эквивалентно многообразию алгебр над C-линейной симметрической операдой.

Ключевые слова: операда, алгебра, многообразие, тождество, рациональная эквивалентность.

Введение

Работу можно считать непосредственным продолжением статей [1–3]. В частности, сохраняются все введенные в [1] обозначения и определения. Основной результат работы был анонсирован в [4, теорема 2] (см. также [5]).

Содержание работы таково. В § 1 приводятся необходимые сведения об алгебрах над операдами. В дополнение к результату работы [1] показано, что многообразие алгебр над произвольным абстрактным клоном рационально эквивалентно многообразию алгебр над соответствующей этому клону (в смысле, описанном в [1]) FSet-операде. Таким образом, имеется возможность, говоря о многообразиях алгебр, использовать наравне с обычным языком (клоны, тождества и т. п.) еще и язык операд. В § 2 вводится и изучается один класс операд, которые в данной работе для определенности называются коммутативными. Многообразия алгебр над такими операдами в некотором смысле походят на категории модулей над коммутативными кольцами. В частности, для алгебр над коммутативными операдами определены понятия полилинейного отображения и тензорного произведения алгебр со свойствами, подобными тем, которые

Работа выполнена при поддержке НИОКР АН РТ (код проекта 05–5.1–284).

имеют место для модулей над коммутативными кольцами. Примерами многообразий над коммутативными операдами являются категории модулей над коммутативными кольцами и категория конвексоров [2, 3]. Многообразие алгебр над коммутативной операдой C оказывается удобным для построения (по аналогии с теорией линейных мультиоператорных алгебр [6, 7]) теории C-линейных мультиоператорных алгебр, в частности алгебр, определяемых C-полилинейными тождествами. Набросок такой теории приводится в § 3. В § 4 вводятся и изучаются симметрические C-линейные операды (Σ-операды в терминах [1]) и многообразия C-линейных алгебр над ними. Основной результат работы доказан в § 5 (теорема 5.4): многообразие мультиоператорных C-линейных алгебр определяется C-полилинейными тождествами тогда и только тогда, когда оно рационально эквивалентно многообразию алгебр над C-линейной симметрической операдой.

Сделаем несколько общих замечаний о теории операд в дополнение к тому, что было сказано в [1]. Во-первых, следует отметить посвященные операдам монографии [8–10]. Во-вторых, результаты [1] (вместе с теоремой 1.2 данной работы) позволяют утверждать, что соотношение между теорией многообразий алгебр над операдами и классической теорией многообразий мультиоператорных алгебр (определяемых традиционно с помощью символов операций и тождеств) носит примерно такой же характер, как и соотношение между общей теорией групп и комбинаторной теорией групп.

Отметим еще, что в данной работе с середины § 1 мы считаем операду *контравариантным* функтором, определенным на категории, двойственной к данной вербальной категории. В работе [1] такой подход мог бы показаться излишним усложнением (хотя и согласованным с идеологией известной статьи [11]). Теперь, помимо того, что определение операды над вербальной категорией становится даже внешне идентичным «традиционному», появляется возможность использовать язык и технику тензорных произведений функторов [12], не прибегая к разного рода оговоркам и объяснениям относительно определений и обозначений.

§ 1. Алгебры над операдами и над клонами

Как отмечено выше, мы используем обозначения и определения из [1].

Определение 1.1. Пусть W — вербальная категория и R — W-операда. *Алгеброй над* R (*R-алгеброй*) называется множество A вместе с заданными для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ отображениями вида

$$R(n) \times A^n \longrightarrow A, \quad (r, a_1, \ldots, a_m) \mapsto ra_1 \ldots a_m = r\bar{a}.$$

Здесь $r \in R(n)$, $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, m$, $\bar{a}$ — краткое обозначение строки $a_1 \ldots a_n$, которую можно считать элементом A^n. При этом должны выполняться следующие свойства.

1. $(rr_1 \ldots r_k)(\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_k) = r(r_1\bar{a}_1) \ldots (r_k\bar{a}_k)$ для всех возможных $r \in R(k)$, $r_i \in R(n_i)$, $\bar{a}_i \in A^{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

2. $\varepsilon a = a$ для всех $a \in A$. Здесь $\varepsilon \in R(1)$ — единица операды R.

3. Для любого $f \in W(n, k)$ и произвольных $r \in R(n)$, $a_1, \ldots, a_k \in A$ выполнено тождество $(fr)a_1 \ldots a_k = ra_{f(1)} \ldots a_{f(n)}$. Если множество $R(0)$ непусто, то в определение алгебры входит задание отображения $R(0) \to A$, т. е. каждому элементу $r \in R(0)$ сопоставляется константа $r_A \in A$ с именем r.

Гомоморфизмом из алгебры A_1 над операдой R в R-алгебру A_2 называется отображение $h : A_1 \to A_2$, обладающее следующим свойством: $h(ra_1 \dots a_m) = rh(a_1) \dots h(a_m)$ для всех $r \in R(m)$, $a_1, \dots, a_m \in A$ ($m \geq 0$ произвольно). Гомоморфизмы алгебр переводят одноименные константы друг в друга. Категорию алгебр над операдой R будем обозначать через $\mathrm{Alg}(R)$ или через $\mathrm{Alg}(R_W)$, если необходимо явно указать, над какой вербальной категорией определена операда.

Пусть R — операда над вербальной категорией W, и пусть A — некоторая R-алгебра. Рассматривая ограничение операций композиции $R(n) \times A^n \to A$ на элементы $r \in R(n)$, получаем интерпретацию этих элементов как n-арных операций на R-алгебрах. Положим $\Omega_n = R(n)$ для каждого $n \geq 0$ и будем рассматривать семейство $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 0\}$ как множество символов n-арных операций, т. е. сигнатуру. Тогда $\mathrm{Alg}(R)$ естественным образом можно рассматривать как многообразие Ω-алгебр, задаваемое всеми тождествами вида 1–3 из определения алгебры над операдой.

Для произвольной сигнатуры Ω обозначим через $\mathrm{Alg}(\Omega)$ категорию всех Ω-алгебр и их гомоморфизмов.

Теорема 1.1. *Пусть R — операда над вербальной категорией W и для каждого $n \geq 0$ задано подмножество $\Omega_n \subseteq R(n)$. Допустим, что семейство $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 0\}$ порождает R как W-операду. Тогда можно определить рациональную эквивалентность между многообразием $\mathrm{Alg}(R)$ (многообразием в описанном выше смысле) и некоторым многообразием Ω-алгебр, которое естественным образом задается выбором семейства (сигнатуры) Ω.*

Доказательство. Используем категорный вариант определения рациональной эквивалентности [13]. Отображения композиции $R(n) \times A^n \to A$ ограничиваются до $\Omega_n \times A^n \to A$, что дает унивалентный функтор из $\mathrm{Alg}(R)$ в $\mathrm{Alg}(\Omega)$. Ввиду того, что Ω порождает R, этот функтор будет также полным. Образ $\mathrm{Alg}(R)$ в $\mathrm{Alg}(\Omega)$, очевидно, замкнут относительно прямых произведений. Из условия, что Ω порождает R, легко выводится, что Ω-подалгебры R-алгебр, превращенных таким способом в Ω-алгебры, будут также R-подалгебрами. Применяя это к конгруэнциям, получаем замкнутость относительно гомоморфных образов. Таким образом, имеет место полный и унивалентный функтор, образ которого — подмногообразие $\mathrm{Alg}(\Omega)$. Остальное очевидно. $\square$

Заметим, что при выборе различных семейств образующих в одной и той же операде R будут получаться различные, но рационально эквивалентные многообразия, изоморфные категории $\mathrm{Alg}(R)$.

Напомним определение алгебр над клоном K (см., например, [14, с. 85, 86]).

Определение 1.2. *Алгеброй над абстрактным клоном K* называется множество M, снабженное семейством операций

$$K(n) \times M^n \longrightarrow M, \quad (x, y_1, \dots, y_n) \mapsto [xy_1 \dots y_n] = [x\bar{y}]$$

($x \in K(n)$, $y_1, \dots, y_n \in M$), определенных для каждого $n \geq 0$ и обладающих следующими свойствами.

1. $[[xx_1 \dots x_m]\bar{y}] = [x[x_1\bar{y}] \dots [x_k\bar{y}]]$ для всех возможных $x \in K(m)$, $x_i \in K(n)$, $\bar{y} \in M^n$. Здесь, как и в [1], через $[xx_1 \dots x_m]$ обозначается результат действия операции $K(m) \times K(n)^m \longrightarrow K(n)$ в клоне K.

2. $[p_{i,n}y_1 \dots y_n] = y_i$ для всех $n \geq i > 0$, $y_1, \dots, y_n \in M$.

Гомоморфизм алгебр над клоном K определяется точно так же, как и для алгебр над операдами. Категорию (многообразие) алгебр над клоном K будем обозначать через $\mathrm{Alg}(K)$.

Напомним, что в [1] было показано, что многообразия абстрактных клонов и FSet-операд рационально эквивалентны (как многообразия многоосновных универсальных алгебр). В частности, были построены взаимно обратные функторы, один из которых переводит клон K в FSet-операду R, причем $R(n) = K(n)$ для всех n, а другой осуществляет обратное преобразование. В доказательстве следующей теоремы используются определения и обозначения из [1]. Позже будет произведена небольшая корректировка, о которой было сказано во введении.

Теорема 1.2. *Пусть K — абстрактный клон, R — FSet-операда, сопоставляемая клону K при указанном выше соответствии. Тогда многообразия $\mathrm{Alg}(K)$ и $\mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}})$ рационально эквивалентны.*

Доказательство. Напомним способ построения K по R и R по K из [1]. Операда R превращается в клон K следующим образом. Полагаем $K(n) = R(n)$ для всех $n \geq 0$. В качестве операции суперпозиции в клоне берется композиция отображений $R(m) \times R(n)^m \longrightarrow R(nm) \xrightarrow{\mu_{m,n}} R(n)$. Левая стрелка здесь обозначает композицию в операде R. Иными словами, $[xy_1 \dots y_m] = \mu_{m,n}(xy_1 \dots y_m)$, где $\mu_{m,n}$ соответствует морфизму $\mu_{m,n} : [nm] \to [n]$ из категории FSet, который отображает в i, $1 \leq i \leq n$, элементы из $[nm]$ вида $i, i+n, \dots, i+(m-1)n$. Если p_i^n — отображения из [1] в $[n]$, переводящие 1 в i, $1 \leq i \leq n$, то пусть $p_i^n : R(1) \to R(n)$ — отображения, получающиеся из них после применения функтора R, и тогда $p_{i,n} = p_i^n \varepsilon$ — проекции клона K.

Обратно, если K — клон, то соответствие $[n] \mapsto R(n) = K(n)$ становится функтором, если для $f : [n] \to [m]$ и $x \in R(n) = K(n)$ положить $R(f)(x) = fx = [xp_{f(1),m} \dots p_{f(n),m}]$. Композиция в операде R определяется по формуле

$$\begin{aligned} &xx_1 \dots x_m \\ &\quad = [x[x_1 p_{1,n} \dots p_{n_1,n}][x_2 p_{n_1+1,n} \dots p_{n_1+n_2,n}] \dots [x_m p_{n_1+\dots+n_{m-1}+1,n} \dots p_{n,n}]]. \end{aligned}$$

Здесь $x \in R(m)$, $x_1 \in R(n_1), \dots, x_m \in R(n_m)$, $n = n_1 + \dots + n_m$. Единица операды R — элемент $\varepsilon = p_{1,1} \in K(1)$.

Следуя категорному определению рациональной эквивалентности многообразий из [13], построим два функтора $F : \mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}}) \to \mathrm{Alg}(K)$ и $G : \mathrm{Alg}(K) \to \mathrm{Alg}(R_{\mathrm{FSet}})$, взаимно обратные и коммутирующие со стирающими функторами.

Пусть A — алгебра над операдой R. Полагаем множество $F(A)$ равным множеству A и определим на этом множестве структуру алгебры над K. Пусть $x \in K(m) = R(m)$, $a_1, \dots, a_m \in F(A) = A$. Тогда по определению $[xa_1 \dots a_m] = xa_1 \dots a_m$, т. е. композиция в $F(A)$ как в алгебре над клоном K совпадает с композицией в A как в алгебре над операдой R.

При проверке свойств алгебры над клоном самую существенную роль играет сформулированное выше свойство алгебр над операдами:

$$(fx)a_1 \dots a_m = xa_{f(1)} \dots a_{f(k)} = x(\bar{a}f).$$

В частности, рассмотрим элемент $[p_{m,i}a_1 \dots a_m] = (p_i^m \varepsilon)a_1 \dots a_m$. Здесь роль f играет p_i^m, $k = 1$, $p_i^m(1) = i$, так что $(p_i^m \varepsilon)a_1 \dots a_m = \varepsilon a_i$. Далее,

$$[[xy_1 \dots y_m]a_1 \dots a_n] = [xy_1 \dots y_m]a_1 \dots a_n = (\mu_{m,n}(xy_1 \dots y_m))a_1 \dots a_n.$$

Здесь $f = \mu_{m,n}$ и применение такого f к $\bar{a}$ дает строку $\bar{a}\dots\bar{a}$ ($\bar{a}$ повторяется m раз). В результате получаем выражение $(xy_1\dots y_m)\bar{a}\dots\bar{a}$, которое согласно свойству ассоциативности для алгебр над операдами равно $x(y_1\bar{a})\dots(y_m\bar{a}) = [x[y_1\bar{a}]\dots[y_m\bar{a}]]$, что и требовалось показать. Таким образом, на множестве $F(A)$ определена структура алгебры над клоном K. Очевидно, что гомоморфизмы из R-алгебры A_1 в R-алгебру A_2 и гомоморфизмы из алгебры $F(A_1)$ над клоном K в алгебру $F(A_2)$ — это одни и те же отображения. Следовательно, F является функтором, к тому же коммутирующим со стирающими функторами.

Обратно, пусть дана алгебра A над клоном K. Определим алгебру $G(A)$ над операдой R, совпадающую как множество с A, следующим образом: если $a_1,\dots,a_m \in G(A)$, $x \in R(m) = K(m)$, то $xa_1\dots a_m = [xa_1\dots a_m]$. Проверим свойства алгебры над операдой. Свойство единицы очевидно: $\varepsilon a = [p_{1,1}a] = a$. Пусть $x \in R(m)$, $x_i \in R(n_i)$, $\bar{a}_i = a_{i,1}\dots a_{i,n_i} \in A^{n_i}$, $1 \le i \le m$, $n = n_1 + \dots + n_m$. Положим $y_i = [x_i p_{n_1+\dots+n_{i-1}+1,n}\dots p_{n_1+\dots+n_{i-1}+n_i,n}]$. Тогда

$$(xy_1\dots y_m)\bar{a}_1\dots\bar{a}_m = [[xy_1\dots y_m]\bar{a}_1\dots\bar{a}_m] = [[xy_1\dots y_m]\bar{a}_1\dots\bar{a}_m].$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}[y_i\bar{a}_1\dots\bar{a}_m] &= [[x_i p_{n_1+\dots+p_{n_{i-1}+1},n}\dots p_{n_1+\dots+p_{n_{i-1}+n_i},n}]\bar{a}_1\dots\bar{a}_m] \\ &= [x_i[p_{n_1+\dots+p_{n_{i-1}+1},n}\bar{a}_1\dots\bar{a}_m]\dots[p_{n_1+\dots+p_{n_{i-1}+n_i},n}\bar{a}_1\dots\bar{a}_m]].\end{aligned}$$

Очевидно, что для $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_i$ имеет место равенство

$$[p_{n_1+\dots+p_{n_{i-1}+j},n}\bar{a}_1\dots\bar{a}_m] = a_{i,j}.$$

В результате

$$[y_i\bar{a}_1\dots\bar{a}_m] = [x_i a_{i,1}\dots a_{i,n_i}] = x_i a_{i,1}\dots a_{i,n_i} = x_i\bar{a}_i.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$(xx_1\dots x_m)\bar{a}_1\dots\bar{a}_m = x(x_1\bar{a}_1)\dots(x\bar{a}_m).$$

Наконец, пусть $f : [k] \to [m]$ — морфизм из FSet, $x \in R(k)$, $a_1,\dots,a_m \in G(A) = A$. Рассмотрим элемент

$$\begin{aligned}(fx)a_1\dots a_m = (fx)\bar{a} &= [xp_{f(1),m}\dots p_{f(k),m}]\bar{a} \\ &= [[xp_{f(1),m}\dots p_{f(1),m}]\bar{a}] = [x[p_{f(1),m}\bar{a}]\dots[p_{f(k),m}\bar{a}]].\end{aligned}$$

Ввиду того, что $[p_{f(j),m}\bar{a}] = [p_{f(j),m}a_1\dots a_m] = a_{f(j)}$, в результате получим $[xa_{f(1)}\dots a_{f(k)}]$, т. е. $xa_{f(1)}\dots a_{f(k)}$, что и было нужно.

Снова очевидно, что гомоморфизмы алгебр над клоном K и гомоморфизмы соответствующих алгебр над операдой R — это одни и те же отображения. Доказательство завершается легкой проверкой взаимной обратности функторов F и G. Их перестановочность со стирающими функторами очевидна из построения. $\square$

Начиная с этого места будем рассматривать W-операду R как контравариантный функтор, определенный на двойственной к W категории W^{op}. Причины такой перемены были объяснены во введении. Фактически будет использоваться главным образом следующее. Пусть $f : [n] \to [m]$ — морфизм категории W. В работе [1], где R — ковариантный функтор, действие отображения $R(f) : R(n) \to R(m)$ на элемент $r \in R(n)$ обозначалось как fr (вместо $R(f)(r)$).

При замене W на W^{op} «тот же самый» функтор R становится контравариантным и вместо fr мы будем писать rf. При этом $r(fh) = (rf)h$, $r1 = r$, что и требовалось. Необходимо только помнить, что f, h и т. п. — стрелки из двойственной к W категории. П. 3 из определения алгебры над операдой можно теперь сформулировать в следующем виде.

3. Для любого $f \in W(n,k)$ и произвольных $r \in R(n)$, $a_1, \dots, a_k \in M$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$ выполнено тождество $(rf)a_1 \dots a_k = ra_{f(1)} \dots a_{f(n)}$, или $(rf)\bar{a} = r(f\bar{a})$.

Определение 1.3. Пусть W — вербальная категория. Рассмотрим *ковариантный* функтор G из категории W^{op} в категорию множеств. Будем писать $G(n)$ вместо $G([n])$, $[n] \in Ob(W)$, и fx вместо $G(f)(x)$, где $f \in W^{op}([m],[n]) = W([n],[m])$, $x \in G(n)$. *Градуированной W-полугруппой* будем называть такой функтор, обладающий следующими дополнительными свойствами:

1) для любых $[n],[m] \in Ob(W)$ определены операции $G(n) \times G(m) \longrightarrow G(n+m)$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$ такие, что $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для всех возможных $x \in G(n)$, $y \in G(m)$, $z \in G(k)$;

2) если даны $f \in W^{op}([n'],[n])$, $g \in W^{op}([m'],[m])$, то $(fx) \cdot (gy) = (f \times g)(x \cdot y)$ (заметим, что здесь использовано произведение в W^{op}, соответствующее копроизведению в W);

3) если даны $g_1 \in G(n_1), \dots, g_m \in G(n_m)$ и $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$ — разбиение, то для любого $f \in W^{op}(m,k)$ имеет место равенство $(f^*\alpha)(g_1 \cdot \ldots \cdot g_m) = g_{f(1)} \cdot \ldots \cdot g_{f(k)}$ (определение $f^*\alpha$ см. в [1]).

Определим также гомоморфизм $h : G_1 \to G_2$ градуированных W-полугрупп как естественное преобразование функторов (семейство отображений $h_n : G_1(n) \to G_2(n)$) такое, что для всех $x \in G(n)$, $y \in G(m)$ имеет место равенство $h_{n+m}(x \cdot y) = h_n(x) \cdot h_m(y)$. Категорию градуированных W-полугрупп и их гомоморфизмов будем обозначать через Gr_W.

Пример 1.1. Зафиксируем множество X. Тогда соответствие $[n] \mapsto X^n$ есть градуированная FSet-полугруппа в смысле только что данного определения. Функтор $[n] \mapsto X^n$ как контравариантный функтор на FSet действует следующим образом. Если дано отображение $f : [n] \to [m]$, то отображение $X^f : X^m \to X^n$ сопоставляет строке $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in X^m$ строку $\bar{x}f = (x_{f(1)}, \dots, x_{f(n)})$. Превращая этот функтор в ковариантный функтор из W^{op}, будем записывать результат рассмотренного только что отображения как $f\bar{x}$. Умножение $X^n \times X^m \to X^{n+m}$ — это приписывание строк друг к другу. Все свойства из определения градуированной FSet-полугруппы проверяются непосредственно (см. также [2, лемма 2]). Компоненты градуированной FSet-полугруппы, построенной в этом примере, будем обозначать через $T^n(X)$, имея в виду аналогию с тензорными степенями модуля. Эта аналогия станет еще более отчетливой в § 4, а пока $T^n(X) = X^n$. Вся градуированная полугруппа обозначается через $T(X)$.

Пример 1.2. Пусть $W = \Sigma$. Тогда определению градуированной Σ-полугруппы удовлетворяют биоперады [8].

Теорема 1.3. *Пусть R — некоторая W-операда, G — градуированная W-полугруппа.*

1. *Рассмотрим множество* $RG = \coprod_{n=0}^{\infty} R(n) \times G(n)$. *На нем естественным образом можно определить структуру алгебры над R как несимметрической*

операдой (в нашей терминологии — Id*-операдой).*

2. *Рассмотрим конгруэнцию Θ в алгебре RG, порожденную всеми эквивалентностями вида $(fx, g) \equiv (x, fg)$, где $f \in W(n, m)$, $x \in R(n)$, $g \in G(m)$. Тогда фактор-алгебра $R_W G = RG/\Theta$ обладает естественной структурой алгебры над W-операдой R.*

3. *При этом соответствие $G \mapsto R_W G$ становится функтором из категории* Gr_W *в категорию* $\mathrm{Alg}(R_W)$.

Доказательство. Все сводится к простым проверкам. Опишем чуть подробнее только способ задания структуры алгебры на RG. Задание отображений композиции вида

$$R(m) \times (RG)^m \longrightarrow RG$$

сводится к определению всевозможных отображений вида

$$R(m)\times(R(n_1)\times G(n_1))\times\cdots\times(R(n_m)\times G(n_m)) \longrightarrow R(n_1+\cdots+n_m)\times G(n_1+\cdots+n_m).$$

С точностью до очевидной перестановки сомножителей это равносильно заданию отображения из $(R(m) \times R(n_1) \times \cdots \times R(n_m)) \times (G(n_1)) \times \cdots \times G(n_m))$ в $R(n_1 + \cdots + n_m) \times G(n_1 + \cdots + n_m)$. Искомое отображение определяется как произведение двух известных: отображения композиции в операде R

$$R(m) \times R(n_1) \times \cdots \times R(n_m) \longrightarrow R(n_1 + \cdots + n_m)$$

и умножения в градуированной W-полугруппе

$$G(n_1) \times \ldots G(n_m) \longrightarrow G(n_1 + \cdots + n_m).$$

Можно представлять себе элементы RG в виде $r_i g_i$, где $r_i \in R(n_i)$, $g_i \in G(n_i)$, $1 \le i \le m$ (точнее, $r_i g_i$ — это сокращенное обозначение для пары (r_i, g_i)). Если $r \in R(m)$, то $r(r_1 g_1) \ldots \ (r_m g_m) = (r r_1 \ldots r_m)(x_1 \ldots x_m)$. С помощью этого явного выражения для композиции легко проверяются все свойства алгебры над операдой. Константы RG — это подмножество $R(0) \times X^0$, которое естественным образом можно отождествить с $R(0)$. $\square$

Замечание. Описанная в этой теореме конструкция алгебры $R_W G$ есть не что иное, как тензорное произведение функторов R и G в смысле работы [12]. В нашей работе используется упрощенная запись: RG (или $R_W G$) вместо $R \otimes G$ (или $R \otimes_W G$), ввиду того, что рассматривается достаточно специфический частный случай. Впрочем, «частность» этого случая относительна: ниже будет показано, что, например, все свободные алгебры в многообразиях вида $\mathrm{Alg}(R)$ получаются именно таким способом. Тензорное произведение функторов — полезная и удобная конструкция. Примеры тензорных произведений функторов в множестве встречаются в алгебраической топологии. Возможно, что использование языка операд позволит более широко применять эту технику и в универсальной алгебре.

Теорема 1.4. *Пусть R — некоторая W-операда, X — множество. Тогда $R_W T(X)$ есть свободная алгебра с базисом X в многообразии* $\mathrm{Alg}(R_W)$.

Доказательство. Вместо $R_W T(X)$ будем всюду писать $R_W X$. Для Σ-операд результат хорошо известен. Покажем, как устанавливается универсальное свойство в общем случае. Базисное множество X отображается в $R_W X$ следующим образом: берется композиция отображений $X \longrightarrow R(1) \times X \subseteq RX \longrightarrow R_W X$. Здесь левая стрелка отображает элемент $x \in X$ в пару (ε, x), где

$\varepsilon \in R(1)$ — единица операды R. Правая стрелка $RX \longrightarrow R_W X$ — проекция на фактор-алгебру. Если теперь задано отображение $X \longrightarrow A$ в R-алгебру A, то рассматриваются его степени $X^n \to A^n$, затем произведение с тождественным отображением $R(n)$, т. е. $R(n) \times X^n \longrightarrow R(n) \times A^n$. По совокупности таких отображений строится отображение

$$RX = \coprod_{n=0}^{\infty} R(n) \times X^n \longrightarrow \coprod_{n=0}^{\infty} R(n) \times A^n.$$

Совокупность операций композиции для алгебры A над операдой R позволяет построить отображение $\coprod\limits_{n=0}^{\infty} R(n) \times A^n \longrightarrow A$. Суперпозиция двух построенных отображений дает отображение $RX \longrightarrow A$, которое, как легко проверить, является гомоморфизмом алгебр над R как Id-операдой (ввиду того, что $Id \subseteq W$ для любой W, алгебры над W-операдой можно считать алгебрами и над Id-операдой, т. е. несимметрической операдой в традиционной терминологии). Но ввиду того, что для алгебры A выполнено тождество 3 из определения R-алгебры в начале этого параграфа, в ядре гомоморфизма $RX \longrightarrow A$ содержится конгруэнция, по которой факторизуется RX при построении $R_W X$. Таким образом получается гомоморфизм $R_W X \longrightarrow A$ со всеми необходимыми свойствами. Единственность следует, как обычно, из того, что образ X в $R_W X$ порождает всю эту алгебру. $\square$

Замечание. В дальнейшем потребуется одновременно рассматривать две структуры свободных алгебр над разными операдами. Для одной из этих структур будет использоваться обозначение вида RX, альтернативным же обозначением свободной алгебры с базисом X над операдой R будет $\mathrm{Fr}_R(X)$.

§ 2. Коммутативные операды

Определение 2.1. Пусть C — операда над некоторой вербальной категорией W. Обозначим действие элемента операды $\lambda \in C(n)$ на элементы $a_1, \ldots, a_n$ из C-алгебры A как $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} a_i$. Назовем операду C *коммутативной*, если для любых $\lambda \in C(n)$, $\gamma \in C(m)$ в любой C-алгебре имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} \sum_{j=1}^{m}{}^{(\gamma)} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}{}^{(\gamma)} \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} x_{i,j}.$$

Стоит отметить, что в этих обозначениях (просто по определению) имеют место равенства

$$\sum_{i=1}^{n_1+\cdots+n_m}{}^{(\omega\omega_1\ldots\omega_m)} x_i = \sum_{i=1}^{m}{}^{(\omega)} \left(\sum_{i=1}^{n_1}{}^{(\omega_1)} x_i\right)\left(\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}{}^{(\omega_2)} x_i\right)\ldots\left(\sum_{i=n_1+\cdots+n_{m-1}+1}^{n_1+\cdots+n_m}{}^{(\omega_m)} x_i\right).$$

Здесь предполагается, что $\omega \in C(m)$, $\omega_i \in C(n_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

Гомоморфизмы алгебр над коммутативной операдой C будем называть C-линейными отображениями. Смысл этого названия становится очевидным, если заметить, что оно сводится к тому, что для любых C-алгебр A и B, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\lambda \in C(n)$, гомоморфизм из A в B — это отображение $h : A \to B$ такое, что

$$h\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} h(a_i).$$

Множество гомоморфизмов из C-алгебры A в C-алгебру B будем обозначать через $\mathrm{Hom}_C(A,B)$.

В дальнейшем обозначение $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)}\, a_i$ будет использоваться только для алгебр над коммутативными операдами.

Замечание. Пусть C — коммутативная операда и A — алгебра над C. Рассмотрим два элемента $\omega,\nu\in C(2)$. Тогда в алгебре A должно быть выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{2}{}^{(\omega)}\sum_{j=1}^{2}{}^{(\nu)} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{2}{}^{(\nu)}\sum_{i=1}^{2}{}^{(\omega)} x_{i,j}.$$

Обозначим действие операций ω,ν следующим образом: $x\cdot y=\omega xy$, $a\circ b=\nu ab$. В этих обозначениях предыдущее тождество приобретает следующий (хорошо известный) вид:

$$(x_{1,1}\cdot x_{1,2})\circ(x_{2,1}\cdot x_{2,2})=(x_{1,1}\circ x_{2,1})\cdot(x_{1,2}\circ x_{2,2}).$$

Предположим, что обе операции ассоциативны. Положим $A(n)=A$ для всех натуральных $n\geq 1$ и определим отображения композиции

$$A(m)\times A(n_1)\times\dots\times A(n_m)\longrightarrow A(n_1+\dots+n_m)$$

по формуле $xy_1\dots y_m=x\cdot(y_1\circ\dots\circ y_m)$. Эта композиция оказывается ассоциативной. Если же существует $e\in A$ такой, что $a\cdot e=e\cdot a=a$ для всех $a\in A$ и $e\circ e=e$, то семейство $\{A(n)\mid n\geq 1\}$ превращается в несимметрическую операду (Id-операду в наших обозначениях). Чтобы определить на ней структуру Σ-операды, достаточно предположить, что умножение $a\circ b$ коммутативно. Эта конструкция демонстрирует одну из точек соприкосновения теории операд и теории двойных категорий (в смысле Эресмана), см. также гл. 5 книги [10].

Рассмотрим несколько примеров коммутативных операд.

Пример 2.1. Рассмотрим операду C, у которой $C(0)=\varnothing$, $C(1)$ — одноэлементное множество и для всех $n\geq 2$ множества $C(n)$ также пусты. Можно считать, что C является FSet-операдой. Определение коммутативной операды для C выполняется тривиальным образом. Категория алгебр над этой операдой фактически категория всех множеств.

Пример 2.2. Несколько обобщая предыдущий пример, можно рассмотреть операду с единственной непустой компонентой $C(1)$, которая является коммутативным моноидом. Эта операда также коммутативна, и категория алгебр над ней рационально эквивалентна категории левых $C(1)$-множеств, т. е. множеств, на которых задано левое действие моноида $C(1)$.

Пример 2.3. Пусть G — коммутативный моноид с мультипликативно записываемой операцией. Рассмотрим операду R, устроенную следующим образом. Положим $R(n)=G^n$ (нулевую компоненту можно при необходимости отбросить). Элементы вида $(x_1,\dots,x_n)$ из G^n будем обозначать через $\bar{x}$, и если $g\in G$, то пусть $g\bar{x}=(gx_1,\dots,gx_n)$. Композиция в этой операде определяется следующим образом. Пусть $\bar{x}=(x_1,\dots,x_m)\in R(m)$ и для $1\leq i\leq m$ строки $\bar{y}_i=(y_{i,1},\dots,y_{i,n_i})$ принадлежат компонентам $R(n_i)$. Тогда по определению

$$\bar{x}\,\bar{y}_1\dots\bar{y}_m=(x_1\bar{y}_1,\dots,x_m\bar{y}_m).$$

Эта операда (для не обязательно коммутативного моноида G) изучена в [15], где рассматривались только Σ-операды. Если моноид коммутативен, то можно определить на R структуру FSet операды следующим образом. Пусть дано отображение $f : [n] \to [m]$. Соответствующий морфизм двойственной категории действует в противоположном направлении, но после применения контравариантного функтора должно получиться отображение из $R(n)$ в $R(m)$. Для $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R(n)$ положим $\bar{x}f = (y_1, \dots, y_m)$, где $y_i = \prod\limits_{j, f(j)=i} x_j$. Как обычно, предполагается, что если множество $\{j \mid f(j) = i\}$ пусто, то соответствующее произведение равно единице моноида G. Стандартная проверка показывает, что выполнены все свойства FSet-операды. Еще более простая проверка показывает, что построенная операда является коммутативной. Если G — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, то многообразие алгебр над этой операдой рационально эквивалентно категории левых G-модулей. В ряде случаев будет удобно обозначать построенную выше операду так же, как и сам моноид, т. е. через G.

Пример 2.4. Очевидно, что подоперада коммутативной операды также коммутативна. Во многих случаях важными примерами являются подоперады, определенные над меньшей вербальной категорией, чем та, над которой определена объемлющая коммутативная операда. Впрочем, есть интересные ситуации, когда сужения вербальной категории не происходит. Например, операда симплексов Δ, изученная в [2], является подоперадой FSet-операды $\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, и соответствующая операда строится, как в примере 2.3. В [2] показано, что на Δ определена структура FSet-операды.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.1. *Класс коммутативных операд является многообразием многоосновных универсальных алгебр.*

Определение 2.2. *C-полилинейным* назовем отображение вида $h : A_1 \times \dots \times A_n \to B$, где $A_1, \dots, A_n, B$ — C-алгебры, являющееся C-линейным по каждому аргументу.

Это определение корректно в следующем смысле. Рассмотрим выражение $h(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$, и пусть $a_i = \sum\limits_{t=1}^{m}{}^{(\lambda)} x_t$, $a_j = \sum\limits_{s=1}^{k}{}^{(\gamma)} y_s$. Тогда, применяя определение полилинейности сначала к i-му, а затем к j-му аргументу, получим

$$\sum_{t=1}^{m}{}^{(\lambda)} \sum_{s=1}^{k}{}^{(\gamma)} h(a_1, \dots, x_t, \dots, y_s, \dots, a_n).$$

Если же применить определение сначала к j-му, а затем к i-му аргументу, то получим

$$\sum_{s=1}^{k}{}^{(\gamma)} \sum_{t=1}^{m}{}^{(\lambda)} h(a_1, \dots, x_t, \dots, y_s, \dots, a_n).$$

Эти элементы совпадают по определению коммутативной операды.

Если $C(0) = \{0\}$, то в каждой C-алгебре A содержится константа 0_A и любое C-линейное отображение $f : A \to B$ отображает 0_A в 0_B. В частности, для C-полилинейного отображения $h : A_1 \times \dots \times A_n \to B$ имеет место привычное свойство $h(a_1, \dots, 0_{A_i}, \dots, a_n) = 0_B$.

Лемма 2.2. *Множество* $\mathrm{Hom}_C(A, B)$ *обладает естественной структурой* C-*алгебры. А именно, если даны* C-*линейные* $f_1, \dots, f_n : A \to B$ *и* $\lambda \in C(n)$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} f_i$ *определяется следующим образом: для каждого* $a \in A$ *полагаем*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} f_i\right)(a) = \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} f_i(a).$$

C-*билинейными являются отображения композиции морфизмов в категории* $\mathrm{Alg}(C)$, *т. е.*

$$\mathrm{Hom}_C(A_2, A_1) \times \mathrm{Hom}_C(A_3, A_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(A_3, A_1), \quad (f, g) \mapsto fg,$$

и отображения вида $\mathrm{Hom}_C(A, B) \times A \longrightarrow B$, $(f, a) \mapsto f(a)$.

Доказательство. Проверим, что $f = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} f_i \in \mathrm{Hom}_C(A, B)$. Для этого возьмем $a = \sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\mu)} a_j$ и проделаем следующие вычисления, используя определение f и свойства C-линейности f_i:

$$\begin{aligned} f(a) = \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} f_i(a) = \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} f_i\left(\sum_{j=1}^{m}{}^{(\mu)} a_j\right) &= \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} \sum_{j=1}^{m}{}^{(\mu)} f_i(a_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m}{}^{(\mu)} \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} f_i(a_j) = \sum_{j=1}^{m}{}^{(\mu)} f(a_j). \end{aligned}$$

Оставшаяся часть доказательства сводится к легким проверкам. □

Категория $\mathrm{Alg}(C)$ во многих отношениях похожа на категорию модулей над коммутативным кольцом. Поскольку это — многообразие универсальных алгебр, то существуют произвольные декартовы произведения, копроизведения, уравнители (ядра гомоморфизмов) и т. п.

Напомним, что свободная C-алгебра с базисом X обозначается через CX. Поскольку вербальная категория предполагается фиксированной, указание на нее опускается. Элементы CX, как это следует из построения, суть «формальные линейные комбинации» вида $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} x_i$, где $\lambda \in C(n)$, $x_1, \dots, x_n \in X$.

Теорема 2.1. *Для любого отображения* $\omega : X_1 \times \dots \times X_n \to Y$, *где* $X_1, \dots, X_n$, Y — *произвольные множества, существует, и притом только одно,* C-*полилинейное отображение* $\overline{\omega} : CX_1 \times \dots \times CX_n \to CY$ *такое, что* $\overline{\omega}(x_1, \dots, x_n) = \omega(x_1, \dots, x_n)$ *для всех* $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$.

Для любого отображения $\omega : X_1 \times \dots \times X_n \to B$, *где* B — C-*алгебра, существует одно и только одно* C-*полилинейное отображение* $h : CX_1 \times \dots \times CX_n \to B$ *такое, что* $h(x_1, \dots, x_n) = \omega(x_1, \dots, x_n)$ *для всех* $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Единственность очевидна. Для доказательства существования (по сути, аналогичного линейному случаю) проведем индукцию по n. Для $n = 1$ доказываемое утверждение следует из определения свободной C-алгебры. Предположим, что утверждение уже доказано для отображений с $n - 1$ аргументами. Зафиксируем $x \in X_n$, и пусть $\omega_x : X_1 \times \dots \times X_{n-1} \to Y$ есть отображение, определяемое равенством $\omega_x(x_1, \dots, x_{n-1}) = \omega(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$. По предположению индукции существует, притом только одно, C-полилинейное отображение $\overline{\omega}_x : CX_1 \times \dots \times CX_{n-1} \to CY$ такое, что

$$\overline{\omega}_x\Big(\sum_{i_1}^{(\lambda_1)} x_{1,i_1}, \dots, \sum_{i_{n-1}}^{(\lambda_{n-1})} x_{n-1,i_{n-1}}\Big) = \sum_{i_1}^{(\lambda_1)} \dots \sum_{i_{n-1}}^{(\lambda_{n-1})} \omega_x(x_{1,i_1}, \dots, x_{n-1,i_{n-1}}) = \sum_{i_1}^{(\lambda_1)} \dots \sum_{i_{n-1}}^{(\lambda_{n-1})} \omega(x_{1,i_1}, \dots, x_{n-1,i_{n-1}}, x).$$

Зафиксируем $\bar{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})$, $u_i \in CX_i$, $1 \le i \le n-1$. Соответствие $x \mapsto \overline{\omega}_x(u_1, \dots, u_{n-1})$ есть отображение из X_n в CY. Обозначим его через $\omega_{\bar{u}}$, а его продолжение до гомоморфизма C-алгебр $CX_n \longrightarrow CY$ — через $\widetilde{\omega}_{\bar{u}}$. Заметим, что $\widetilde{\omega}_{\bar{u}}(x) = \overline{\omega}_x(\bar{u})$. Определим отображение

$$\overline{\omega} : CX_1 \times \dots \times CX_n \to CY,$$

полагая

$$\overline{\omega}(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) = \widetilde{\omega}_{\bar{u}}(u_n).$$

C-линейность по аргументу u_n для отображения $\overline{\omega}$ имеет место по построению. Зафиксируем $u_n = \sum_i^{(\lambda)} x_i$. Тогда

$$\overline{\omega}(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) = \sum_i^{(\lambda)} \overline{\omega}(u_1, \dots, u_{n-1}, x_i) = \sum_i^{(\lambda)} \overline{\omega}_{x_i}(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Выражения $\overline{\omega}_{x_i}(u_1, \dots, u_{n-1})$ являются функциями, C-линейными по каждому аргументу. Как показано в лемме 2.2, операция $\sum_i^{(\lambda)}$, примененная к C-линейным функциям, приводит к C-линейной функции. Это завершает доказательство первого утверждения.

Второе утверждение легко следует из первого. Положим $Y = B$. Игнорируя структуру C-алгебры на B и применяя уже доказанное, получим полилинейное отображение $\overline{\omega} : CX_1 \times \dots \times CX_n \to CB$. Остается взять суперпозицию этого отображения и гомоморфизма C-алгебр $CB \to B$, соответствующего естественному отображению базиса B в свободную алгебру CB. □

Отображение $\overline{\omega}$ из формулировки теоремы 2.1 будет называться *C-полилинеаризацией* отображения ω.

Наша следующая цель — описать тензорные произведения в $\mathrm{Alg}(C)$. Как и в случае модулей над коммутативными кольцами, определение тензорного произведения $A_1 \otimes A_2$ двух C-алгебр A_1 и A_2 предусматривает наличие C-билинейного отображения $u : A_1 \times A_2 \to A_1 \otimes A_2$ такого, что для любого C-билинейного $h : A_1 \times A_2 \to B$ существует, притом только один, гомоморфизм C-алгебр $f : A_1 \otimes A_2 \to B$ такой, что $fu = h$.

Теорема 2.2. *Тензорные произведения в* $\mathrm{Alg}(C)$ *существуют. Соответствие* $(A_1, A_2) \mapsto A_1 \otimes A_2$ *является функтором из* $\mathrm{Alg}(C) \times \mathrm{Alg}(C)$ *в* $\mathrm{Alg}(C)$.

Доказательство. Так же, как и в случае модулей, рассмотрим свободную C-алгебру $C(A_1 \times A_2)$ с базисом $A_1 \times A_2$ и профакторизуем ее по наименьшей конгруэнции, содержащей все пары

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} a_{i,1}, a_2\right), \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} (a_{i,1}, a_2)\right), \left(\left(a_1, \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} a_{i,2}\right), \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} (a_1, a_{i,2})\right),$$

где $a_1, a_{i,1} \in A_1$, $a_2, a_{i,2} \in A_2$, $\lambda \in C(n)$. Билинейное отображение u строится как суперпозиция естественных отображений $A_1 \times A_2 \to C(A_1 \times A_2)$ (базис свободной алгебры) и $C(A_1 \times A_2) \to A_1 \otimes A_2$ (проекция на фактор-алгебру). Проверка универсального свойства стандартна. Проверка функториальности производится точно так же, как и в случае модулей, с использованием универсального свойства. $\square$

Вместо $u(a_1, a_2)$ будем писать, как обычно, $a_1 \otimes a_2$. Таким образом, каждый элемент $A_1 \otimes A_2$ можно представить в виде $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} a_{i,1} \otimes a_{i,2}$.

Теорема 2.3. $\mathrm{Alg}(C)$ *является замкнутой категорией* (*в частности, симметрической моноидальной категорией по терминологии* [16]). *Замкнутость означает, что имеют место естественные изоморфизмы*

$$\mathrm{Hom}_C(A_1 \otimes A_2, A_3) \cong \mathrm{Hom}_C(A_1, \mathrm{Hom}_C(A_2, A_3)).$$

Доказательство. Почти дословно повторяются соответствующие рассуждения для модулей над коммутативными кольцами. $\square$

Рассмотрим две C-алгебры A и B и предположим, что на A группа Σ_n действует справа, а на B слева, причем действия C-линейны в том смысле, что умножение на каждую подстановку — автоморфизм C-алгебр. Тогда можно определить C-алгебру $A \otimes_{\Sigma_n} B$, профакторизовав $A \otimes B$ по наименьшей C-линейной конгруэнции, содержащей все пары $((a\sigma, b), (a, \sigma b))$, где $a \in A$, $b \in B$, $\sigma \in \Sigma_n$. Для $A \otimes_{\Sigma_n} B$ выполняется соответствующая модификация универсального свойства, в которой рассматриваются только такие C-билинейные отображения $h : A \times B \to V$, для которых $h(a\sigma, b) = h(a, \sigma b)$. Образ пары (a, b) при билинейном отображении $A \times B \longrightarrow A \otimes_{\Sigma_n} B$ будет обозначаться через $a \otimes b$.

В последнем параграфе будет использовано свойство сопряженности данного варианта тензорного произведения. Оно формулируется так. Сначала определяются категории $\mathrm{Alg}_{\Sigma_n}(C)$ и $\mathrm{Alg}(C)_{\Sigma_n}$, объекты которых — алгебры над C, снабженные соответственно левым и правым действиями симметрической группы Σ_n, причем эти действия C-линейны. Например, для левого действия это означает, что $\sigma\bigl(\sum\limits_i a_i\bigr) = \sum\limits_i{}^{(\lambda)} (\sigma a_i)$, и аналогично для правого действия. Морфизмами этих категорий являются эквивариантные гомоморфизмы C-алгебр. Множество морфизмов категории $\mathrm{Alg}(C)_{\Sigma_n}$ из объекта A_1 в объект A_2 обозначим через $\mathrm{Hom}_{C,\Sigma_n}(A_1, A_2)$. Если B — объект из $\mathrm{Alg}_{\Sigma_n}(C)$ и V — произвольная C-алгебра, то C-алгебра $\mathrm{Hom}_C(B, V)$ естественным образом превращается в объект категории $\mathrm{Alg}(C)_{\Sigma_n}$. Тогда для любого $A \in \mathrm{Alg}(C)_{\Sigma_n}$ имеет место естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_C(A \otimes_{\Sigma_n} B, V) \cong \mathrm{Hom}_{C,\Sigma_n}(A, \mathrm{Hom}_C(B, V)).$$

Также имеет место изоморфизм, где центральную роль играют левые действия:

$$\mathrm{Hom}_C(A \otimes_{\Sigma_n} B, V) \cong \mathrm{Hom}_{\Sigma_n,C}(B, \mathrm{Hom}_C(A, V)).$$

Доказательства практически те же, что и у соответствующих модульных аналогов.

Несомненно, что коммутативные операды и многообразия алгебр над ними представляют самостоятельный интерес. Для целей данной работы будет достаточно той минимальной информации, которая приведена выше.

§ 3. C-линейные Ω-алгебры (C-коммутативная операда)

Изложенная в предыдущем параграфе теория коммутативных операд позволяет строить теорию C-линейных мультиоператорных алгебр (где C — любая коммутативная операда). Стоит обратить внимание на то, что частными случаями этой теории будут и теория Ω-алгебр (без дополнительной структуры), излагаемая во многих книгах (например, в [17]), и теория линейных мультиоператорных алгебр [6, 7]. Эти случаи соответствуют примерам 2.1 и 2.3. В данном же параграфе приводятся только определения и минимально необходимые в дальнейшем сведения. Коммутативная операда C предполагается фиксированной. Пусть $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 0\}$ — некоторое семейство символов n-арных операций (сигнатура). Многообразие всех Ω-алгебр будем обозначать через $\mathrm{Alg}(\Omega)$, а свободную алгебру этого многообразия с базисом X — через $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$. Через $\eta_X : X \to \mathrm{Fr}_\Omega(X)$ будет обозначаться отображение включения базисного множества в соответствующую свободную алгебру.

Определение 3.1. Пусть A — некоторая C-алгебра. Будем говорить, что на A *задана структура C-линейной Ω-алгебры*, если для каждого $n \geq 0$ и для каждого $\omega \in \Omega_n$ задано C-полилинейное отображение $\omega^A : A^n \to A$. При $n = 0$ это превращается в отображение из одноэлементного множества в A, которое можно отождествить с его образом — константой, также обозначаемой через ω^A.

Гомоморфизмы C-линейных Ω-алгебр определяются как C-линейные отображения с обычными для гомоморфизмов Ω-алгебр свойствами. Категорию C-линейных Ω-алгебр обозначим через $\mathrm{Alg}_C(\Omega)$. Свободные C-линейные Ω-алгебры определим с помощью универсального свойства. А именно, C-линейная Ω-алгебра $\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$ будет называться *свободной*, если задано отображение базиса $\eta_{C,X} : X \to \mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$ такое, что для любого отображения $\xi : X \to A$ в любую C-линейную Ω-алгебру A существует, притом только один, гомоморфизм C-линейных Ω-алгебр $h : \mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X) \to A$ такой, что $h\eta_{C,X} = \xi$.

Теорема 3.1. *Пусть Ω — некоторая сигнатура, C — коммутативная операда, $A \in \mathrm{Alg}(\Omega)$. Соответствие $A \mapsto CA$ есть функтор из $\mathrm{Alg}(\Omega)$ в $\mathrm{Alg}_C(\Omega)$. Правым сопряженным к этому функтору является забывающий функтор из $\mathrm{Alg}_C(\Omega)$ в $\mathrm{Alg}(\Omega)$ («забывается» структура C-алгебры). Функтор $A \mapsto CA$ отображает свободные Ω-алгебры в свободные C-линейные Ω-алгебры с теми же базисами.*

Доказательство. Пусть A является Ω-алгеброй и для $\omega \in \Omega_n$ через ω^A обозначается соответствующая n-арная операция — отображение из A^n в A. Введем структуру C-линейной Ω-алгебры на CA следующим образом. В качестве операций ω^{CA}, соответствующих $\omega \in \Omega_n$, берутся полилинеаризации отображений ω^A. Если $h : A_1 \to A_2$ — гомоморфизм Ω-алгебр, то через $Ch : CA_1 \to CA_2$ естественно обозначить гомоморфизм свободных C-алгебр такой, что $Ch \cdot \eta_{A_1} = \eta_{A_2} \cdot h$. Ясно, что $C(h_1h_2) = Ch_1 \cdot Ch_2$ и $C1_A = 1_{CA}$. Остается убедиться, что Ch — гомоморфизм Ω-алгебр. Для этого надо заметить, что левая и правая части в доказываемом равенстве $Ch(\omega^{CA_1}x_1\dots x_n)=\omega^{CA_2}(Ch(x_1)\dots Ch(x_n))$ — полилинеаризации отображений из A_1^n в A_2, определяемых по формулам $h(\omega^{A_1}a_1\dots a_n)$ и $\omega^{A_2}(h(a_1)\dots h(a_n))$. Так как h — гомоморфизм, эти отображения равны. Следовательно, равны и их полилинеаризации.

Утверждение о сопряженности очевидно. Покажем, что универсальное свойство свободной C-линейной Ω-алгебры выполнено для $C\,\mathrm{Fr}_\Omega(X)$. Это будет означать, что в качестве $\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$ можно брать именно алгебру $C\,\mathrm{Fr}_\Omega(X)$. Прежде всего заметим, что если A есть Ω-алгебра, то отображение $\eta_A : A\to CA$ является гомоморфизмом Ω-алгебр (структура C-алгебры на CA тут отбрасывается). Далее, определим $\eta_{C,X}$ как суперпозицию отображения $\eta_X : X\to \mathrm{Fr}_\Omega(X)=\mathrm{Fr}(X)$ и гомоморфизма Ω-алгебр $\eta_{\mathrm{Fr}(X)} : \mathrm{Fr}(X)\to C\,\mathrm{Fr}(X)$. Рассмотрим произвольную Ω-алгебру A и некоторое отображение $\xi : X\to A$. Остается применить два универсальных свойства. Сначала по ξ однозначно строится гомоморфизм Ω-алгебр $f : \mathrm{Fr}(X)\to A$ такой, что $f\eta_X=\xi$. Потом по отображению f однозначно строится гомоморфизм C-алгебр $h : C\,\mathrm{Fr}(X)\to A$ такой, что $h\eta_{\mathrm{Fr}(X)}=f$. Ясно, что $h\eta_{C,X}=\xi$, так что остается показать, что h есть гомоморфизм Ω-алгебр. Единственность его при этом также будет очевидной. Элементы $C\,\mathrm{Fr}(X)$ записываются в виде $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} w_i$, где w_i — элементы свободной Ω-алгебры (Ω-слова). Действие h по построению имеет вид

$$h\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} w_i\right)=\sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} h(w_i)=\sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} f(w_i).$$

Дальнейшее вычисление, использующее то, что f уже является гомоморфизмом, по сути ничем не отличается от линейного случая. $\square$

Всюду в дальнейшем будем полагать $\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)=C\,\mathrm{Fr}_\Omega(X)$. Дадим теперь набросок теории тождеств и многообразий для C-линейных Ω-алгебр. Доказательства стандартны, поэтому их можно опустить.

Для произвольной $A\in\mathrm{Alg}_C(\Omega)$ положим

$$\Theta_A(X)=\{(t_1,t_2)\mid t_1,t_2\in\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X),\ h(t_1)=h(t_2)\ \text{для любого гомоморфизма } h:\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)\to A\}.$$

Это — конгруэнция на $\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$, т. е. C-линейная Ω-подалгебра $\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)\times\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$, являющаяся отношением эквивалентности. Элементы $\Theta_A(X)$ естественно назвать тождествами A в алфавите X. Обратно, пусть дано некоторое семейство Z пар элементов $(z_{1,i},z_{2,i})\in\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X_i)\times\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X_i)$, $i\in I$. Определим $\mathrm{Var}(Z)$ как полную подкатегорию категории $\mathrm{Alg}(\Omega)$, объекты которой — все те алгебры, для которых элементы множества Z являются тождествами. Полная подкатегория $\mathbf{M}$ категории $\mathrm{Alg}_C(\Omega)$ называется *многообразием C-линейных Ω-алгебр*, если $\mathbf{M}=\mathrm{Var}(Z)$ для некоторого Z. Положим

$$\Theta_{\mathbf{M}}(X)=\bigcap_{A\in\mathbf{M}}\Theta_A(X).$$

Это вполне инвариантная конгруэнция на свободной алгебре $\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$, которую естественно называть *вербальной конгруэнцией* многообразия $\mathbf{M}$ в алфавите X. Соответствие $X\mapsto\Theta_{\mathbf{M}}(X)$ является функтором. Свободная алгебра $\mathrm{Fr}_{\mathbf{M}}(X)$ многообразия $\mathbf{M}$ с базисом X — это фактор-алгебра $\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)/\Theta_{\mathbf{M}}(X)$. Непустая полная подкатегория $\mathbf{M}$ категории $\mathrm{Alg}(\Omega)$ является многообразием тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}$ замкнута относительно взятия прямых произведений, подалгебр и гомоморфных образов. Каждое многообразие можно представить в виде $\mathrm{Var}(Z)$ для множества $Z \subseteq \mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X) \times \mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$ для счетного множества X. Для такого X задание $\mathrm{Fr}_{\mathbf{M}}(X)$ (или соответственно $\Theta_{\mathbf{M}}(X)$) полностью определяет многообразие $\mathbf{M}$.

Пусть X — произвольный алфавит и w есть Ω-слово из $\mathrm{Fr}_{\Omega}(X)$. Назовем *носителем слова* w множество тех $x \in X$, которые входят в запись w.

Определение 3.2. Пусть X — произвольный алфавит. Пару $(t_1, t_2) \in \mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X) \times \mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$ назовем *C-полилинейным тождеством*, если

$$t_i = \sum_{j=1}^{n_i}{}^{(\lambda_i)} w_{i,j}, \quad i = 1, 2,$$

и слова $w_{i,j} \in \mathrm{Fr}_{\Omega}(X)$ для всех i, j таковы, что их носители совпадают и каждая переменная из носителя входит в каждое слово $w_{i,j}$ с кратностью единица. Элементы $\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$, обладающие свойствами, подобными свойствам t_1 или t_2, будем называть *C-полилинейными.*

Будем говорить, что многообразие $\mathbf{M}$ определяется (или задается) C-полилинейными тождествами, если $\mathbf{M} = \mathrm{Var}(Z)$, и Z состоит из C-полилинейных тождеств.

Хорошо известно, что в случае линейных мультиоператорных алгебр над полем нулевой характеристики каждое многообразие можно задать полилинейными тождествами [18, 19]. Для других коммутативных операд и соответствующих им мультиоператорных линейных алгебр вопрос о том, насколько широк класс многообразий, определяемых полилинейными тождествами, пока открыт.

§ 4. C-линейные Σ-операды (C-коммутативная операда)

Зафиксируем, как и выше, коммутативную операду C над фиксированной вербальной категорией.

Определение 4.1. Σ-операда R будет называться *C-линейной*, если все компоненты $R(n)$ при $n \geq 1$ являются C-алгебрами и все отображения композиции $R(m) \times R(n_1) \times \cdots \times R(n_m) \longrightarrow R(n_1 + \cdots + n_m)$ линейны по всем компонентам, которые являются C-алгебрами. Эта оговорка относится исключительно к компоненте $R(0)$, которая может и не быть C-алгеброй. Кроме того, для любого $\sigma \in \Sigma(n, n) = \Sigma_n$ отображение $r \mapsto r\sigma$ должно быть C-линейным.

Гомоморфизм C-линейных операд $f : R \to H$ определяется как гомоморфизм Σ-операд с дополнительным свойством: все его компоненты $f_n : R(n) \to H(n)$ при $n \geq 1$ являются также гомоморфизмами C-алгебр.

Определение 4.2. Пусть R — C-линейная операда. *C-линейной алгеброй над* R называется R-алгебра A, которая является также C-алгеброй, причем все отображения композиции $R(n) \times A^n \longrightarrow A$ при $n \geq 1$ являются C-полилинейными. Гомоморфизм R-алгебр в этом случае должен быть также гомоморфизмом C-алгебр. Категорию C-линейных R-алгебр обозначим через $\mathrm{Alg}_C(R)$.

Пусть R — некоторая произвольная операда. В дальнейшем рассматриваются только Σ-операды, за исключением, возможно, фиксированной коммутативной операды C.

Обозначим через CR семейство $\{CR(n) \mid n \geq 0\}$, где $CR(n)$ — свободная C-алгебра с базисом $R(n)$. Согласно теореме 2.1 операции композиции $R(m) \times R(n_1) \times \dots \times R(n_m) \longrightarrow R(n_1 + \dots + n_m)$ можно «продолжить по линейности», превратив в отображения $CR(m) \times CR(n_1) \times \dots \times CR(n_m) \longrightarrow CR(n_1 + \dots + n_m)$. Далее, если $\sigma \in \Sigma_n$, то соответствующее отображение $R(n) \longrightarrow R(n)$ продолжается до гомоморфизма C-алгебр $CR(n) \longrightarrow CR(n)$.

Аналогично, пусть A — алгебра над операдой R. Полилинеаризация отображений композиции $R(n) \times A^n \longrightarrow A$ дает семейство C-полилинейных отображений $CR(n) \times (CA)^n \longrightarrow CA$. Следующая теорема показывает, что эти конструкции обладают ожидаемыми свойствами.

Теорема 4.1. *Соответствие $R \mapsto CR$ есть функтор из категории Σ-операд в категорию C-линейных Σ-операд. Правым сопряженным к этому функтору является забывающий функтор («забываются» структуры C-алгебр).*

Пусть A — некоторая R-алгебра. Соответствие $A \mapsto CA$ является функтором из $\mathrm{Alg}(R)$ в $\mathrm{Alg}_C(\mathrm{C}R)$, обладающим правым сопряженным — забывающим функтором.

Доказательство. По теореме 2.1 выполнимость всех соотношений из определения операды достаточно проверять на базисных элементах компонент $CR(n)$, т. е. на элементах из $R(n)$. Но на них все выполняется потому, что R — операда по условию. Точно так же можно рассуждать и в случае алгебр. □

Имеет место факт, аналогичный теореме 1.1. А именно, пусть R — C-линейная Σ-операда, и пусть A — некоторая C-линейная R-алгебра. Рассматривая ограничение операций композиции $R(n) \times A^n \longrightarrow A$ на элементы $r \in R(n)$, получаем интерпретацию этих элементов как n-арных операций на R-алгебрах. Положим $\Omega_n = R(n)$ для каждого $n \geq 0$ и будем рассматривать семейство $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 0\}$ как множество символов n-арных операций, т. е. сигнатуру. Тогда $\mathrm{Alg}(R)$ естественным образом можно рассматривать как многообразие C-линейных Ω-алгебр, задаваемое всеми тождествами вида 1–3 из определения алгебры над операдой.

Теорема 4.2. *Пусть R — C-линейная операда и для каждого $n \geq 0$ задано подмножество $\Omega_n \subseteq R(n)$. Допустим, что семейство $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 0\}$ порождает R как C-линейную Σ-операду. Тогда можно определить рациональную эквивалентность между многообразием $\mathrm{Alg}_C(R)$ (многообразием в описанном выше смысле) и некоторым многообразием C-линейных Ω-алгебр, которое естественным образом задается выбором семейства (сигнатуры) Ω.*

Доказательство ничем не отличается от доказательства теоремы 1.1. □

Определим $T^n_C(X)$ как $CT^n(X) = C(X^n)$. Можно было бы определить и C-линейный аналог градуированных W-полугрупп в общем случае, но пока достаточно заметить, что на $T^n_C(X)$ определено левое C-линейное действие симметрической группы Σ_n, которое получается C-линеаризацией всех отображений $X^n \longrightarrow X^n$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)} \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$, $\sigma \in \Sigma_n$. Поэтому согласно результатам § 2 определены C-алгебры $R(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n_C$.

Теорема 4.3. *Свободная C-линейная алгебра с базисом X в многообразии $\mathrm{Alg}_C(R)$ имеет вид*

$$\mathrm{Fr}_R(X) = \coprod_{n=1}^{\infty} R(n) \otimes_{\Sigma_n} T^n_C(X).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.4. □

Один из первых результатов такого рода (для многообразия алгебр Ли при некоторых дополнительных предположениях), по-видимому, получен в работе [20]. Фактически в ней была вычислена линейная операда, многообразием алгебр над которой было многообразие алгебр Ли, и было показано, что свободные алгебры Ли записываются в форме, аналогичной той, которая приведена в теореме 4.3. Впрочем, само понятие операды (как семейства множеств с операциями композиции) в [20], конечно, не использовалось, как не используется оно, например, и в работах С. П. Мищенко о росте многообразий (в частности, в [21]), хотя изучаемые им семейства полилинейных элементов $P_n(\mathbf{V})$ свободных алгебр с базисом $x_1, \ldots, x_n$ многообразий линейных алгебр $\mathbf{V}$ являются операдами. Можно даже показать, что любая линейная операда (по крайней мере в случае нулевой характеристики) имеет именно такой вид.

Определение 4.3. Рассмотрим семейство множеств $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 0\}$. *Свободная Σ-операда с базисом* Ω — это Σ-операда $FO_\Omega = \{FO_\Omega(n) \mid n \geq 0\}$ вместе с семейством отображений $\eta_{\Omega,n} : \Omega_n \to FO_\Omega(n)$, причем выполнено универсальное свойство: для любой операды R и любого семейства отображений $\xi = \{\xi_n \mid \xi_n : \Omega_n \to R(n), n \geq 0\}$ существует, притом только один, гомоморфизм операд $h : FO_\Omega \to R$ такой, что $h\eta_\Omega = \xi$. Это означает, что имеют место равенства $h_n\eta_{\Omega,n} = \xi_n$ для всех компонент. Аналогично определяются свободные C-линейные Σ-операды $FO_{C,\Omega}$.

Определение для произвольных W-операд точно такое же, но в данной работе в нем нет необходимости. Разумеется, операды являются специфической разновидностью многоосновных универсальных алгебр, и свободные операды — это свободные алгебры в соответствующем многообразии. Поэтому вопроса об их существовании (в нелинейном случае) не возникает. Явное построение можно найти, например, в [22].

Опишем вкратце устройство операд FO_Ω. В качестве n-й компоненты можно взять подмножество абсолютно свободной Ω-алгебры с базисом $x_1, \ldots, x_n$, состоящее из слов, в запись которых входят все базисные элементы («переменные») $x_1, \ldots, x_n$, причем каждое ровно по одному разу. Действие симметрической группы Σ_n — это перестановка переменных в слове. Опишем композицию. Пусть $w = w(x_1, \ldots, x_m) \in FO_\Omega(m)$, $w_i = w_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in FO_\Omega(n_i)$, $1 \leq i \leq m$. Тогда $ww_1 \ldots w_m$ — это результат подстановки в слово $w(x_1, \ldots, x_m)$, т. е. слово $w(w'_1, \ldots, w'_m)$, где каждое w'_i получается из w_i следующей заменой переменных: вместо x_j при $1 \leq j \leq n_i$ подставляется $x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+j}$. Полагаем $n_0 = 0$, так что $w'_1 = w_1$. Отображение $\eta_{\Omega,n}$ сопоставляет символу $\omega \in \Omega_n$ слово $\omega x_1 \ldots x_n$.

Существует и другая модель свободных операд. Дадим ее краткое описание, опуская обоснования (впрочем, не слишком сложные). Сначала рассмотрим какое-либо множество S, которое будем считать линейно упорядоченным. Пусть $G = S^*$ — свободный моноид с базисом S. Рассмотрим соответствующую G операду, описанную в примере 2.3 (хотя там говорится о коммутативном моноиде, определение операды годится и в общем случае) и в работе [15]. Определим в этой операде подоперaду, которую будем называть *операдой префиксных кодов* в алфавите S (и обозначим ее через PC_S) следующим образом. Элементы $PC_S(n)$ — это упорядоченные последовательности $(w_1, \ldots, w_n)$ слов в алфавите S такие, что совокупность $\{w_1, \ldots, w_n\}$ является «префиксным кодом», т. е. все эти слова различны и ни одно из них не является префиксом другого. Можно показать, что таким образом действительно определяется подоперада и что она является свободной Σ-операдой с базисом $X_S = \{X_{S,n} \mid n \geq 1\}$, где $X_{S,n}$ состоит из элементов $(s_1, \dots, s_n)$, $s_1, \dots, s_n \in S$ и $s_1 < \dots < s_n$. Нетрудно убедиться, что для любого семейства подмножеств $\Omega = \{\Omega_n \mid \Omega_n \subseteq X_{S,n}, n \geq 1\}$ подоперада PC_S, порожденная этим семейством, будет свободной операдой с базисом Ω. Наконец, для любого семейства Ω можно найти линейно упорядоченное множество S и набор инъективных отображений $\Omega_n \to X_{S,n}$ для всех $n \geq 1$. Ввиду того, что каждая операда изоморфна фактор-операде свободной операды, можно сделать вывод, что операдная композиция, описанная в примере 2.3, вовсе не является экзотическим частным случаем. Напротив, в некотором смысле отображения композиции во всех операдах устроены «примерно так же».

Теорема 4.4. *Пусть FO_Ω — свободная Σ-операда с базисом Ω. Тогда CFO_Ω — свободная C-линейная операда с базисом Ω.*

Доказательство. Можно рассуждать таким же образом, как при доказательстве теоремы 3.1. $\square$

Следствие. *Пусть $FO_{C,\Omega}$ — свободная C-линейная Σ-операда с базисом Ω. Существует изоморфизм между ней и операдой F, описываемой следующим образом: n-я компонента $F(n)$ — это подмножество $C\,\mathrm{Fr}_\Omega(x_1, \dots, x_n)$, состоящее из всех C-линейных комбинаций вида $\sum\limits_{i=1}^{k}{}^{(\lambda)}\, w_i(x_1, \dots, x_n)$, где слова $w_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Fr}_\Omega(x_1, \dots, x_n)$ имеют один и тот же носитель $\{x_1, \dots, x_n\}$ и каждая переменная входит в каждое слово ровно один раз. Композиция и действие симметрических групп в этой операде определяются точно так же, как и выше при первом описании нелинейной свободной операды.*

Доказательство очевидно. $\square$

Теорема 4.5. *Пусть F — свободная Σ-операда с базисом Ω. Тогда многообразие $\mathrm{Alg}(F)$ рационально эквивалентно многообразию всех Ω-алгебр, а многообразие C-линейных алгебр над свободной C-линейной операдой CF рационально эквивалентно многообразию всех C-линейных Ω-алгебр.*

Доказательство. Случай нелинейных операд является частным случаем C-линейных ввиду примера 2.1. Легко показать (а в линейном случае это хорошо известно), что задание структуры C-линейной алгебры A над операдой R равносильно заданию гомоморфизма C-линейных Σ-операд $h : R \to E_A$, где n-я компонента операды E_A — это C-алгебра $\mathrm{Hom}_C(A^{\otimes n}, A)$. Эта операда в C-линейном случае строится точно так же, как и в линейном, и все подробности можно найти в работе [23]. Ясно, что задание на C-алгебре A структуры C-линейной Ω-алгебры равносильно заданию для всех $n \geq 0$ отображений $\Omega_n \to E_A(n)$. Но по определению свободной операды с базисом Ω это равносильно тому, что задан гомоморфизм C-линейных Σ-операд $F \to E_A$. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между алгебрами из $\mathrm{Alg}_C(\Omega)$ и из $\mathrm{Alg}_C(CF)$. Проверка того, что это изоморфизм категорий с необходимыми свойствами, не представляет затруднений. $\square$

Понятие рациональной эквивалентности [24], по-видимому, будет одним из центральных при использовании теории операд в универсальной алгебре. Неформально говоря, многообразия, рационально эквивалентные многообразию алгебр над операдой $\mathrm{Alg}(R)$, можно при решении некоторых вопросов заменить на $\mathrm{Alg}(R)$ и отказаться от употребления множества выделенных операций. Компоненты операды R — это множества *всех* производных операций данной арности. Доказанная только что теорема 4.5 означает, что многообразие всех C-линейных Ω-алгебр можно заменять многообразием $\mathrm{Alg}_C(CFO_\Omega)$ во всех случаях, когда решаемая задача зависит только от класса рациональной эквивалентности. Именно такие задачи и решаются в следующем параграфе.

§ 5. Характеризация многообразий C-линейных алгебр, определяемых C-полилинейными тождествами

Зафиксируем коммутативную операду C над некоторой вербальной категорией. Все другие операды определены над вербальной категорией Σ.

Напомним, что конгруэнция на операде R — это конгруэнция на многоосновной универсальной алгебре, которой и является операда. Более подробно, конгруэнцию V на операде R можно определить как подопераду прямого произведения $R \times R$ такую, что все $V(n) \subseteq R(n) \times R(n)$ являются отношениями эквивалентности. В случае C-линейной операды R ее C-линейные конгруэнции должны быть C-линейными подоперадами.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathrm{Fr}(X)$ *— свободная C-линейная Ω-алгебра со счетным базисом X и F — свободная C-линейная Σ-операда с базисом Ω. Существует взаимно однозначное соответствие между вполне инвариантными C-линейными конгруэнциями* $\mathrm{Fr}(X)$*, порожденными полилинейными элементами, и C-линейными конгруэнциями F. Взаимно однозначное соответствие строится следующим образом. Если V — конгруэнция в F, то соответствующая вполне инвариантная конгруэнция $\widetilde{V}$ — это образ суперпозиции C-линейных отображений*

$$\coprod_{n=0}^{\infty} V(n)\otimes_{\Sigma_n} T^n_C(X) \longrightarrow \coprod_{n=0}^{\infty} (F(n)\times F(n))\otimes_{\Sigma_n} T^n_C(X) \longrightarrow \left(\coprod_{n=0}^{\infty} F(n)\otimes_{\Sigma_n} T^n_C(X)\right)^2.$$

Первое (слева направо) из участвующих здесь отображений индуцировано вложениями $V(n) \subseteq F(n) \times F(n)$, а второе на порождающих элементах имеет вид $(\omega_1, \omega_2) \otimes \bar{x} \mapsto (\omega_1 \otimes \bar{x}, \omega_2 \otimes \bar{x})$. Имеет место изоморфизм C-линейных Ω-алгебр: $\mathrm{Fr}_F(X)/\widetilde{V} \cong \mathrm{Fr}_{F/V}(X)$.

Доказательство. Вспоминая, как согласно теореме 4.5 устроена алгебра $\mathrm{Fr}(X) = \mathrm{Fr}_F(X)$, находим, что ее элементы можно записать в виде $\sum\limits_k{}^{(\lambda)}\omega_i \otimes \bar{x}_i$, где ω_i — элементы F, а $\bar{x}_i$ — строки из элементов X. Чтобы упростить обозначения, будем опускать в этой записи значки $\otimes$, так что элементы $\mathrm{Fr}(X)$ — это C-линейные комбинации $\sum\limits_k{}^{(\lambda)}\omega_i\bar{x}_i$.

В начале доказательства построим соответствие, обратное к указанному в формулировке. Пусть дана вполне инвариантная конгруэнция $U \subseteq \mathrm{Fr}(X) \times \mathrm{Fr}(X)$, где X счетно. Рассмотрим множество P всех пар полилинейных элементов вида $(\omega\bar{x}, \mu\bar{x}) \in U$, где в $\bar{x} = x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ все $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ различны, $\omega, \mu \in F(n)$ для некоторого $n = 0, 1, 2, \ldots$. Утверждается, что тогда семейство множеств $V = \widehat{U}$, $V = \{V(n) \mid n = 0, 1, \ldots\}$, $V(n) = \{(\omega, \mu) \in F(n)^2 \mid (\omega\bar{x}, \mu\bar{x}) \in P$ для некоторого $\bar{x}\}$ образует конгруэнцию в операде F. Во-первых, заметим, что выбор $\bar{x}$ для пары (ω, μ) произволен в том смысле, что вместо $\bar{x} = x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ можно взять любое другое слово $\bar{x}' = x_{j_1} \ldots x_{j_n}$ с условием, что все $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ — различные элементы X. Это следует из инвариантности конгруэнции U: соответствие $x_{i_k} \mapsto x_{j_k}$, $1 \le k \le n$, продолжается до эндоморфизма $\mathrm{Fr}(X)$, затем до эндоморфизма $\mathrm{Fr}(X) \times \mathrm{Fr}(X)$, отображающего U в U, а пару $(\omega\bar{x}, \mu\bar{x})$ — в пару $(\omega\bar{x}', \mu\bar{x}')$. Очевидно, что все $V(n)$ будут отношениями эквивалентности и C-алгебрами. Пусть $(\omega, \mu) \in V(m)$, $(\omega_i, \mu_i) \in V(n_i)$, $1 \le i \le m$. Покажем, что $(\omega\omega_1 \dots \omega_m, \mu\mu_1 \dots \mu_m) \in V(n_1 + \dots + n_m)$. Выберем слова $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ в алфавите X так, что $(\omega_i\bar{x}_i, \mu_i\bar{x}_i) \in P$, $1 \le i \le m$, и в $\bar{x}_i$, $\bar{x}_j$ нет общих символов для всех $i \ne j$. Это можно сделать ввиду счетности X. Поскольку U — подалгебра F-алгебры $\mathrm{Fr}(X) \times \mathrm{Fr}(X)$, то для любого $\omega \in F(n)$ и любых $(\omega_i\bar{x}_i, \mu_i\bar{x}_i) \in P$, $1 \le i \le m$, получим элемент из U:

$$\omega(\omega_1\bar{x}_1, \mu_1\bar{x}_1) \dots (\omega_m\bar{x}_m, \mu_m\bar{x}_m) = ((\omega\omega_1 \dots \omega_m)(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m), (\omega\mu_1 \dots \mu_m)(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m)).$$

Ввиду выбора $\bar{x}_i$ этот элемент должен принадлежать P. Таким образом,

$$(\omega\omega_1 \dots \omega_m, \omega\mu_1 \dots \mu_m) \in V(n_1 + \dots + n_m).$$

Пусть $\bar{x} = x_{t_1} \dots x_{t_m}$ — слово в алфавите X такое, что все x_{t_j} различны, и $\bar{x}$ не имеет общих символов ни с одним из $\bar{x}_i$, $1 \le i \le m$. Тем самым $(\omega\bar{x}, \mu\bar{x}) \in P \subset U$. Рассмотрим эндоморфизм $\mathrm{Fr}(X)$, отображающий x_{t_j} в $\mu_j\bar{x}_j$, $1 \le j \le m$. Тогда $(\omega\bar{x}, \mu\bar{x})$ отображается в элемент U:

$$\begin{aligned}\omega(\mu_1\bar{x}_1 \dots \mu_m\bar{x}_m), \mu(\mu_1\bar{x}_1 \dots \mu_m\bar{x}_m))\\ = ((\omega\mu_1 \dots \mu_m)(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m), (\mu\mu_1 \dots \mu_m)(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m)).\end{aligned}$$

Так как полученный элемент принадлежит P, имеет место включение

$$(\omega\mu_1 \dots \mu_m, \mu\mu_1 \dots \mu_m) \in V(n_1 + \dots + n_m).$$

Поскольку $V(n_1 + \dots + n_m)$ есть отношение эквивалентности, получаем требуемое включение $(\omega\omega_1 \dots \omega_m, \mu\mu_1 \dots \mu_m) \in V(n_1 + \dots + n_m)$.

Из инвариантности конгруэнции U также легко следует, что множества $V(n)$ замкнуты относительно действия групп Σ_n.

Таким образом, $\widehat{U}$ — подоперада $F \times F$, т. е. конгруэнция на F.

Из построения соответствия $U \mapsto \widehat{U} = V$ ясно, что оно сохраняет включения и произвольные пересечения. Обратное соответствие $V \mapsto \widetilde{V}$ определено в формулировке теоремы. Непосредственная проверка показывает, что $\widetilde{V}$ есть конгруэнция. Покажем ее полную инвариантность. Пусть гомоморфизм $\varphi : \mathrm{Fr}(X) \to \mathrm{Fr}(X)$ отображает x_i в $\sum_j^{(\alpha_i)}(w_{ij}\bar{x}_{ij})$, где $w_{ij} \in F$, α_i — элементы операды C, и $(u_1x_1 \dots x_m, u_2x_1 \dots x_m)$ — порождающий элемент $\widetilde{V}$ (здесь $(u_1, u_2) \in V(m)$ и можно даже не предполагать, что все $x_1, \dots, x_m$ различны). Применив φ к этому элементу, получим $(u_1\varphi(x_1) \dots \varphi(x_m)$, $u_2\varphi(x_1) \dots \varphi(x_m))$, что с учетом определения операций в прямом произведении преобразуется к виду

$$\sum_{j_1}^{(\alpha_1)} \dots \sum_{j_m}^{(\alpha_m)} ((u_1w_{1\,j_1} \dots w_{m\,j_m})\bar{x}_{j_1 \dots j_m}, (u_2w_{1\,j_1} \dots w_{m\,j_m})\bar{x}_{j_1 \dots j_m}),$$

где $\bar{x}_{j_1 \dots j_m} = \bar{x}_{1\,j_1} \dots \bar{x}_{m\,j_m}$. Остается заметить, что в операде $F \times F$

$$(u_1w_{1\,j_1} \dots w_{m\,j_m}, u_2w_{1\,j_1} \dots w_{m\,j_m}) = (u_1, u_2)(w_{1\,j_1}, w_{1\,j_1}) \dots (w_{m\,j_m}, w_{m\,j_m}),$$

причем $(u_1, u_2) \in V(m)$ по выбору, а любая пара (w, w) принадлежит $V(k)$, так как все $V(k)$ — отношения эквивалентности. Следовательно, результат записанной выше композиции также принадлежит подоперде V. Это доказывает инвариантность конгруэнции $\widetilde{V}$.

Покажем взаимную обратность соответствий $U \mapsto \widehat{U}$ и $V \to \widetilde{V}$. В одну сторону это очевидно: полилинейные элементы из $\widetilde{V}$ приводят вновь к операде V. Проверим, что если $V = \widehat{U}$, то $U = \widetilde{V}$. До сих пор не использовалось то, что U порождается множеством P как вполне инвариантная конгруэнция. Это означает, что произвольный элемент $(z_1, z_2) \in U$ представляется в виде $\sum^{(\lambda)} \omega(p_1', p_1'') \dots (p_m', p_m'')$, где «слагаемые» $\omega(p_1', p_1'') \dots (p_m', p_m'')$ устроены следующим образом: $\omega \in F(m)$ (число m для каждого «слагаемого» свое), а каждая пара (p_i', p_i'') получается из некоторого элемента P подстановкой вместо переменных элементов $\mathrm{Fr}(X)$, причем для каждого отдельно взятого i, $1 \le i \le m$, вместо одинаковых переменных подставляются одинаковые элементы. С помощью рассуждений, сходных с теми, которые выше были использованы для доказательства полной инвариантности $\widetilde{V}$, заключаем, что каждый (p_i', p_i'') представляется в виде C-линейной комбинации элементов вида $(q_i'\bar{x}_i, q_i''\bar{x}_i)$, где $(q_i', q_i'') \in V = \widehat{U}$. Следовательно, произвольный элемент U есть C-линейная комбинация элементов вида

$$\omega(q_1'\bar{x}_1, q_1''\bar{x}_1) \dots (q_m'\bar{x}_m, q_m''\bar{x}_m) = ((\omega q_1' \dots q_m')\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m, (\omega q_1'' \dots q_m'')\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m). \tag{$*$}$$

Пара $(\omega q_1' \dots q_m', \omega q_1'' \dots q_m'')$ принадлежит V. Чтобы убедиться в этом, выберем для каждой пары (q_i', q_i'') слово $\bar{y}_i$ в алфавите X таким образом, что $(q_i'\bar{y}_i, q_i''\bar{y}_i) \in P$, причем в $\bar{y}_i$ и $\bar{y}_j$ нет общих символов при всех $i \ne j$. Поскольку U — подалгебра, то композиция

$$\omega(q_1'\bar{y}_1, q_1''\bar{y}_1) \dots (q_m'\bar{y}_m, q_m''\bar{y}_m) = ((\omega q_1' \dots q_m')\bar{y}_1 \dots \bar{y}_m, (\omega q_1'' \dots q_m'')\bar{y}_1 \dots \bar{y}_m)$$

принадлежит U, а значит, и P. Возвращаясь к элементу $(*)$, заключаем, что он принадлежит $\widetilde{V}$. Включение $\widetilde{V} \subseteq U$ очевидно.

Таким образом, получено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок, между двумя решетками, причем отображение $U \mapsto \widehat{U}$ сохраняет произвольные пересечения. Но так как точная верхняя грань элементов U_1 и U_2 в рассматриваемых решетках есть пересечение всех U таких, что $U_1, U_2 \subseteq U$, то имеет место изоморфизм решеток.

Пусть $v : V(n) \subseteq F(n) \times F(n)$ — естественное вложение, $\pi_1, \pi_2 : F(n) \times F(n) \to F(n)$ — естественные проекции на первый и на второй множители и $c : F(n) \to F(n)/V(n)$ — проекция на фактор-множество. Это гомоморфизм C-алгебр и коуравнитель пары $(\pi_1 v, \pi_2 v)$. Так как функтор тензорного произведения обладает правым сопряженным, то он сохраняет коуравнители, поэтому

$$c \otimes 1 : F(n) \otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X) \to (F(n)/V(n)) \otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X)$$

есть коуравнитель пары $((\pi_1 \otimes 1)(v \otimes 1), (\pi_2 \otimes 1)(v \otimes 1))$.

Рассмотрим C-линейное отображение

$$d : (F(n) \times F(n)) \otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X) \to \big(F(n) \otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X)\big) \times \big(F(n) \otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X)\big)$$

такое, что $d((\omega_1, \omega_2) \otimes \bar{x}) = (\omega_1 \otimes \bar{x}, \omega_2 \otimes \bar{x})$. Если $p_i : \big(F(n) \otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X)\big)^2 \to F(n) \otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X)$, $i = 1, 2$, — естественные проекции, то имеют место очевидные равенства $p_i d = \pi_i \otimes 1$, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $(F(n)/V(n)) \otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X)$ есть коуравнитель пары $(p_1 d(v \otimes 1), p_2 d(v \otimes 1))$, т. е. фактор-алгебра C-алгебры $\big(F(n) \otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X)\big)^2$ по конгруэнции, являющейся образом $d(v \otimes 1)$. Остается заметить, что в любой категории, где соответствующие операции определены, взятие копроизведения произвольного семейства диаграмм коуравнителей есть также диаграмма коуравнителя. Это значит, что свободная алгебра многообразия $\mathrm{Alg}_C(F/V)$, имеющая вид $\coprod_{n=0}^{\infty}(F(n)/V(n))\otimes_{\Sigma_n} T_C^n(X)$, изоморфна фактор-алгебре $\mathrm{Fr}_F(X)$ по конгруэнции $\widetilde{V}$. $\square$

Теорема 5.2. *Пусть R — некоторая C-линейная Σ- операда. Тогда многообразие C-линейных R-алгебр $\mathrm{Alg}_C(R)$ определяется C-полилинейными тождествами.*

Эта теорема следует из следующего более точного утверждения, которое и будет далее доказано.

Теорема 5.3. *Пусть R — некоторая C-линейная Σ-операда. Выберем в ней произвольное семейство образующих Ω (предполагая, что $\Omega\cap R(n)=\Omega_n$). Тогда операду R можно считать фактор-операдой C-линейной свободной операды F с базисом Ω по некоторой конгруэнции V. Утверждается, что многообразие C-линейных R-алгебр $\mathrm{Alg}_C(R)$ рационально эквивалентно многообразию C-линейных Ω-алгебр, определяемому семейством тождеств вида $\omega_1\bar{x}=\omega_2\bar{x}$, где пары $(\omega_1,\omega_2)\in V(n)$ пробегают некоторое семейство образующих операдной конгруэнции V, а в строке $\bar{x}=x_1\dots x_n$ все переменные различны. Фактически таким образом описывается вполне инвариантная конгруэнция $\widetilde{V}$ из теоремы* 5.1.

Доказательство. Рассмотрим естественную проекцию на фактор-операду $\pi: F\to R$, и пусть V — ее ядро. Иными словами, $V=\{V(n)\mid n\geq 0\}$, $V(n)=\{(z_1,z_2)\in F(n)\times F(n)\mid \pi_n(z_1)=\pi_n(z_2)\}$ для всех n. Эта проекция индуцирует вполне унивалентный функтор $\mathrm{Alg}_C(R)\to\mathrm{Alg}_C(F)$, причем по теореме 4.5 многообразие $\mathrm{Alg}_C(F)$ отождествляется с $\mathrm{Alg}_C(\Omega)$. Действие функтора можно описать следующим образом. Структура R-алгебры на A определяется гомоморфизмом операд $R\to E_A$, а структура соответствующей F-алгебры задается суперпозицией этого гомоморфизма с гомоморфизмом π. Ввиду того, что Ω — это базис F, такой гомоморфизм операд $F\to E_A$ однозначно определяется отображением $\Omega\to E_A$ (точнее, семейством отображений $\Omega_n\to E_A(n)$ для всех n). Образ построенного так функтора — это именно то многообразие, про которое надо доказать, что оно определяется тождествами из $\widetilde{V}$.

Сделаем еще несколько простых наблюдений. Пусть A — некоторая C-линейная Ω-алгебра, $\Theta_A(X)\subseteq\mathrm{Fr}(X)\times\mathrm{Fr}(X)$ — соответствующая вербальная конгруэнция. Предположим, что X здесь — счетное множество и $\mathrm{Fr}(X)=\mathrm{Fr}_{C,\Omega}(X)$. Тогда ядром соответствующего структуре A гомоморфизма $F\to E_A$ будет в обозначениях доказательства теоремы 5.1 конгруэнция $\widehat{\Theta_A(X)}$. По теореме о гомоморфизме алгебра A будет принадлежать многообразию $\mathrm{Alg}_C(R)$ (вложенному в $\mathrm{Alg}_C(\Omega)$ описанным выше образом) тогда и только тогда, когда $V\subseteq\widehat{\Theta_A(X)}$.

Теперь доказательство завершатся следующим образом. Пусть $\mathbf{M}$ — многообразие C-линейных Ω-алгебр, определяемых вербальной конгруэнцией $\widetilde{V}$. Таким образом, $\Theta_{\mathbf{M}}(X)=\widetilde{V}=\bigcap_{A\in\mathbf{M}}\Theta_A(X)$. Но тогда согласно теореме 5.1 получаем $V=\widehat{\Theta_{\mathbf{M}}(X)}=\bigcap_{A\in\mathbf{M}}\widehat{\Theta_A(X)}$. Отсюда следуют импликации

$$A\in\mathrm{Alg}_C(R)\Leftrightarrow V\subseteq\widehat{\Theta_A(X)}\Longleftrightarrow A\in\mathbf{M}.\qquad\square$$

Теорема 5.4. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *многообразие* C*-линейных* Ω*-алгебр, определяемое* C*-полилинейными тождествами. Тогда существует* C*-линейная* Σ*-операда* R *такая, что* $\mathbf{M}$ *рационально эквивалентно* $\mathrm{Alg}_C(R)$.

Доказательство. Пусть дано многообразие C-линейных Ω-алгебр $\mathbf{M}$, определяемое полилинейными тождествами, и пусть $\mathrm{Fr}_{\mathbf{M}}(X)$ есть свободная алгебра $\mathbf{M}$ со счетным базисом X. Согласно условию эта алгебра изоморфна фактор-алгебре абсолютно свободной алгебры $\mathrm{Fr}_F(X)$ по вполне инвариантной конгруэнции, порожденной полилинейными элементами. Но уже известно, что эта конгруэнция имеет вид $\widetilde{V}$ для некоторой конгруэнции V свободной операды F с базисом Ω. Из последнего утверждения теоремы 5.1 следует, что $\mathrm{Fr}_F(X)/\widetilde{V} \cong \mathrm{Fr}_{F/V}(X)$ в смысле C-линейных Ω-алгебр. Из определения F следует, что существует полный унивалентный функтор $\mathrm{Alg}_C(F/V) \longrightarrow \mathrm{Alg}_C(\Omega)$, образ которого есть многообразие. Свободные алгебры со счетными базисами у этого многообразия и у $\mathbf{M}$ изоморфны, и ввиду п. б) теоремы 1.2.1 из [13, с. 27] отсюда следует утверждение нашей теоремы. $\square$

Объединяя теоремы 5.2 и 5.4, получаем главный результат работы.

Теорема 5.5. *Класс многообразий* C*-линейных мультиоператорных алгебр, определяемых* C*-полилинейными тождествами, с точностью до рациональной эквивалентности совпадает с классом многообразий алгебр над* C*-линейными* Σ*-операдами.*

Отметим, что для линейных мультиоператорных алгебр соответствующий результат был получен в работах автора [25–28]. Вскоре после того, как аналогичный факт был установлен еще в одном частном случае [3], стало понятно, что идея доказательства проходит в гораздо более общей ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тронин С. Н.* Абстрактные клоны и операды // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 924–936.
2. *Тронин С. Н.* Операды в категории конвексоров. I // Изв. вузов. Математика. 2002. № 3. С. 42–50.
3. *Тронин С. Н.* Операды в категории конвексоров. II // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5. С. 61–69.
4. *Тронин С. Н.* О характеризации многообразий алгебр над W-операдами // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 250-летию Московского гос. ун-та и 75-летию каф. высш. алгебры: Тез. докл. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. С. 127–128.
5. *Тронин С. Н.* Теория операд и универсальная алгебра // Алгебра и анализ-2004 / Материалы междунар. конф., посвящ. 200-летию Казанского гос. ун-та, Казань, 2–9 июля 2004 г. Казань: Изд-во Казанск. мат. об-ва, 2004. С. 20–21. (Труды мат. центра им. Н. И. Лобачевского; Т. 23).
6. *Курош А. Г.* Мультиоператорные кольца и алгебры // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 1. С. 3–15.
7. *Баранович Т. М., Бургин М. С.* Линейные Ω-алгебры // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 4. С. 61–106.
8. *Смирнов В. А.* Симплициальные и операдные методы в теории гомотопий. М.: Факториал-Пресс, 2002.
9. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in algebra, topology and physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Math. Surveys and Monographs; V. 96).
10. *Leinster T.* Higher operads, higher categories. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.).
11. *Lawvere F. W.* Functorial semantics of algebraic theories // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1963. V. 50, N 5. P. 869–872.

12. *Кацов Е. Б.* Тензорное произведение функторов // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 2. С. 318–327.
13. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
14. *Мовсисян Ю. М.* Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1990.
15. *Тронин С. Н., Копп О. А.* Матричные линейные операды // Изв. вузов. Математика. 2000. № 6. С. 53–62.
16. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. М.: Физматлит, 2004.
17. *Смирнов Д. М.* Многообразия алгебр. Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1992.
18. *Кизнер Ф. И.* Две теоремы о тождествах в мультиоператорных алгебрах // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 1. С. 39–42.
19. *Ширшов А. И., Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
20. *Клячко А. А.* Элементы Ли в тензорной алгебре // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1296–1304.
21. *Мищенко С. П.* Рост многообразий алгебр Ли // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 6. С. 25–45.
22. *Бордман Дж., Фогт Р.* Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977.
23. *Артамонов В. А.* Клоны полилинейных операций // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 1. С. 47–59.
24. *Мальцев А. И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 1. С. 29–32.
25. *Тронин С. Н.* О многообразиях, задаваемых полилинейными тождествами // Тез. сообщ. XIX Всесоюзн. алгебр. конф., 9–11 сент. 1987 г. Львов, 1987. Ч. 2. С. 280.
26. *Тронин С. Н.* О некоторых свойствах финитарных алгебраических теорий // Тез. сообщ. V Сибирской школы по многообразиям алгебраических систем, 1–5 июля 1988 г. Барнаул, 1988. С. 68–70.
27. *Тронин С. Н.* О некоторых свойствах алгебраических теорий многообразий линейных алгебр. I. Многообразия, задаваемые полилинейными тождествами / Казанский гос. ун-т. Казань, 1988. 31 с. Деп в ВИНИТИ 11.08.88, № 6511-В88.
28. *Тронин С. Н.* О ретракциях свободных алгебр и модулей: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Кишинев, 1989.

Статья поступила 11 марта 2005 г.

Тронин Сергей Николаевич
Казанский гос. университет,
механико-математический факультет, кафедра алгебры,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`Serge.Tronin@ksu.ru`