*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2006. Том 47, № 3*

*УДК 517.9*

# О ПРИМЕНИМОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА К ДВУМЕРНЫМ ОПЕРАТОРАМ ТЁПЛИЦА С ИЗМЕРИМЫМИ СИМВОЛАМИ

**Л. И. Сазонов**

**Аннотация:** Для некоторого класса двумерных операторов Тёплица с локально секториальными символами установлены критерии фредгольмовости проекционного метода.

**Ключевые слова:** алгебры операторов ТЁплица, фредгольмовость, локальные и проекционные методы.

**1°**. Пусть $\Gamma = \{z;\ |z| = 1\}$ — единичная окружность в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $P$ — проектор Рисса в пространстве $L_2(\Gamma)$, связанный с оператором сингулярного интегрирования

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

формулой $P = \frac{1}{2}(I + S)$; $H_2(\Gamma) = PL_2(\Gamma)$ — пространство Харди.

Обозначим через $TO$ $C^*$-подалгебру в алгебре $\operatorname{End} H_2(\Gamma)$ всех линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $H_2(\Gamma)$, порожденную всеми операторами Тёплица $T(a) = PaI$ с символами $a \in L_\infty(\Gamma)$. Отметим, что алгебра $TO$ содержит идеал $\mathscr{K}$ всех компактных операторов из $\operatorname{End} H_2(\Gamma)$. Аналогично для пространств Харди $H_2(\Gamma\times\Gamma) = (P\otimes P)L_2(\Gamma\times\Gamma)$ введем $C^*$-алгебру $TO^{(2)}$, порожденную всеми двумерными операторами Тёплица $T^{(2)}(a) = (P \otimes P)aI$ с символами $a \in L_\infty(\Gamma \times \Gamma)$.

Алгебра $TO^{(2)}$ содержит идеал всех компактных операторов $\mathscr{K}^0 = \mathscr{K}\widehat{\otimes}\mathscr{K}$ и $C^*$-подалгебру $TO\widehat{\otimes}TO$ с замкнутыми двусторонними идеалами $\mathscr{K}^1 = \mathscr{K}\widehat{\otimes}TO$, $\mathscr{K}^2 = TO\widehat{\otimes}\mathscr{K}$. (Здесь через $\mathscr{A}\widehat{\otimes}\mathscr{B}$, где $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — $C^*$-подалгебры в $\operatorname{End} H_2(\Gamma)$, обозначается $C^*$-подалгебра в $\operatorname{End} H_2(\Gamma\times\Gamma)$, представляющая собой замыкание в операторной норме множества всех операторов вида $\sum A_i \otimes B_i$, где $A_i \in \mathscr{A}$, $B_i \in \mathscr{B}$.)

В исследованиях фредгольмовости различных классов операторов и применимости к ним проекционных методов важное значение имеет локальная техника. Теория операторов локального типа, разработанная И. Б. Симоненко [1], послужила основой для дальнейших многочисленных исследований в этом направлении. Отсылая за подробной библиографией к монографии [2], отметим используемые ниже локальный принцип И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [3],

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (код проекта НШ–1768.2003.1).

схему билокализации В. С. Пилиди [4], локальный принцип в теории проекционных методов А. В. Козака [5] и его дальнейшее развитие, изложенное в монографии [2].

Применение схемы билокализации к исследованию фредгольмовости в алгебре $TO\widehat{\otimes}TO$ можно кратко сформулировать следующим образом. Ввиду соотношения $\mathscr{K}^1\cdot\mathscr{K}^2\subset\mathscr{K}^0$ обратимость фактор-класса $[A]_0=A+\mathscr{K}^0$ оператора $A$ из $TO\widehat{\otimes}TO$ эквивалентна одновременной обратимости фактор-классов $[A]_i=A+\mathscr{K}^i$ в фактор-алгебрах $(TO\widehat{\otimes}TO)/\mathscr{K}^i$ $(i=1,2)$; в свою очередь, обратимость в этих фактор-алгебрах исследуется с помощью локальных методов; обратимость фактор-класса $[A]_0$ в фактор-алгебре $(TO\widehat{\otimes}TO)/\mathscr{K}^0$ эквивалентна его обратимости в полной алгебре $\operatorname{End}H_2(\Gamma\times\Gamma)/\mathscr{K}^0$, которая эквивалентна фредгольмовости оператора $A$.

Отметим, что непосредственно применить указанную схему к полной алгебре $TO^{(2)}$ нельзя ввиду того, что множества $\mathscr{K}^i$ не являются идеалами в этой алгебре. Выход за рамки тензорного произведения (в данном случае $TO\widehat{\otimes}TO$) предложен в [6, 7], где исследована фредгольмовость характеристических бисингулярных операторов с коэффициентами, имеющими разрывы вдоль гладких кривых. Применительно к алгебре $TO^{(2)}$ этот подход состоит в рассмотрении ее наибольшей $C^*$-подалгебры $\mathfrak{A}$, в которой $\mathscr{K}^i$ $(i=1,2)$ остаются двусторонними идеалами. Как будет показано ниже, эта подалгебра содержит операторы Тёплица с символами, выходящими за рамки тензорного произведения $L_\infty(\Gamma)\widehat{\otimes}L_\infty(\Gamma)$, но не совпадает с полной алгеброй $TO^{(2)}$.

Определим класс символов $S_{\mathfrak{A}}$, полагая $a$ $(\in L_\infty(\Gamma\times\Gamma))$ принадлежащим $S_{\mathfrak{A}}$, если $T^{(2)}(a)\in\mathfrak{A}$. Имеет место следующий критерий.

**Теорема 1.** *Функция $a\in L_\infty(\Gamma\times\Gamma)$ принадлежит $S_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда ряды*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|a_n^{(i)}\right|^2 \quad (i=1,2), \tag{1}$$

*где $a_n^{(i)}$ — частичные коэффициенты Фурье функции $a$:*

$$a_n^{(1)}(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma a(t,\tau)t^{-n}\frac{dt}{t},\quad a_n^{(2)}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma a(t,\tau)\tau^{-n}\frac{d\tau}{\tau},$$

*сходятся в норме $L_\infty(\Gamma)$.*

Доказательство. Введем ортопроекторы $Q_n$ и $P_n$ в $L_2(\Gamma)$:

$$(Q_nf)(t)=\frac{t^n}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(s)s^{-n}\frac{ds}{s},\quad P_n=\sum_{k=0}^{n}Q_k.$$

Так как для любого компактного оператора $K\in\operatorname{End}H_2(\Gamma)$ имеем $\|(I-P_n)K\|$, $\|K(I-P_n)\|\to0$ при $n\to\infty$, то аналогичные соотношения выполняются для операторов из идеалов $\mathscr{K}^i$ $(i=1,2)$. Поэтому включение $T^{(2)}(a)\in\mathfrak{A}$ эквивалентно выполнению условий

$$T^{(2)}(a)(Q_n\otimes I),(Q_n\otimes I)T^{(2)}(a)\in\mathscr{K}^1;\quad T^{(2)}(a)(I\otimes Q_n),(I\otimes Q_n)T^{(2)}(a)\in\mathscr{K}^2$$

для всех $n$.

Рассмотрим оператор $A_{n,m} = ((I - P_n) \otimes I)T^{(2)}(a)(Q_m \otimes I)$. Осуществляя разложение в ряд Фурье, устанавливаем равенство

$$\|A_{n,m}f\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \big\|T\big(a_{k-m}^{(1)}\big)f_m^{(1)}\big\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} T^*\big(a_{k-m}^{(1)}\big)T\big(a_{k-m}^{(1)}\big)f_m^{(1)}, f_m^{(1)}\right),$$

в котором $T^*\big(a_{k-m}^{(1)}\big)$ — оператор, сопряженный к оператору Тёплица $T\big(a_{k-m}^{(1)}\big)$. (Заметим, что для операторов Тёплица $T^*(a) = T(\bar{a})$, где черта означает комплексное сопряжение.) Из последнего соотношения вытекает равенство норм

$$\|A_{n,m}\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} T^*\big(a_{k-m}^{(1)}\big)T\big(a_{k-m}^{(1)}\big)\right\|. \tag{2}$$

Далее, легко проверяется, что в пространстве $L_2(\Gamma)$ выполняется равенство $\operatorname*{s\text{-}lim}_{r\to+\infty} U^{-r}PU^r = I$, где $U$ — унитарный оператор: $(Uf)(t) = tf(t)$, а $s$-lim обозначает сильный предел. Поэтому

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{r\to\infty} U^{-r} \sum_{k=n+1}^{\infty} T^*\big(a_{k-m}^{(1)}\big)T\big(a_{k-m}^{(1)}\big)U^r = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \big|a_{k-m}^{(1)}\big|^2\right)I$$

и, следовательно,

$$\left\|\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \big|a_{k-m}^{(1)}\big|^2\right)\right\|_{L_\infty} \le \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} T^*\big(a_{k-m}^{(1)}\big)T\big(a_{k-m}^{(1)}\big)\right\| = \|A_{n,m}\|^2.$$

Предположим, что $T^{(2)}(a) \in \mathfrak{A}$, тогда $\|A_{n,m}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\big|a_k^{(1)}\big|^2$ сходится в норме $L_\infty(\Gamma)$. Учитывая, что $(T^{(2)}(a))^* = T^{(2)}(\bar{a})$ также принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$, аналогично устанавливаем сходимость в норме $L_\infty$ ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{0}\big|a_k^{(1)}\big|^2$.

Обратно, считая, что ряд (1) сходится в $L_\infty(\Gamma)$, из неравенства

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} T^*\big(a_{k-m}^{(1)}\big)T\big(a_{k-m}^{(1)}\big)f, f\right) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(T\big(a_{k-m}^{(1)}\big)f, T\big(a_{k-m}^{(1)}\big)f\big) \\ \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(a_{k-m}^{(1)}f, a_{k-m}^{(1)}f\big) &= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \big|a_{k-m}^{(1)}\big|^2 f, f\right) \le \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{k-m}^{(1)}|^2\right\|_{L_\infty} \|f\|^2\end{aligned}$$

с учетом сходимости ряда (1) получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_{n,m}\| = 0$. Аналогичное соотношение верно для оператора $(T^{(2)}(a))^*$. Поэтому операторы $T^{(2)}(a)(Q_m \otimes I)$, $(Q_m \otimes I)T^{(2)}(a)$, являясь равномерными пределами операторов из идеала $\mathscr{K}^1$, принадлежат этому идеалу.

Аналогично рассматривается случай идеала $\mathscr{K}^2$.

Следующие примеры показывают, что имеют место строгие вложения

$$L_\infty(\Gamma)\widehat{\otimes}L_\infty(\Gamma) \subset S_{\mathfrak{A}} \subset L_\infty(\Gamma \times \Gamma).$$

Пример 1. Пусть $a \in L_\infty(\Gamma)$ и $b(t,\tau) = a(t\tau)$. Тогда частичные коэффициенты Фурье

$$b_n^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} a(t\tau)t^{-n}\frac{dt}{t} = a_n\tau^n$$

удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|b_n^{(1)}(\tau)\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Аналогично для коэффициентов $\left\{b_n^{(2)}(t)\right\}$. Поэтому $b \in S_{\mathfrak{A}}$ для любой функции $a \in L_\infty(\Gamma)$. С другой стороны, если $c(t,\tau) \in L_\infty(\Gamma)\widehat{\otimes} L_\infty(\Gamma)$, то почти для всех $t$ функции $c(t,\cdot)$ принадлежат относительно компактному множеству в $L_\infty(\Gamma)$. Но, например, $b(t,\tau) = \chi_+(t\tau)$, где $\chi_+$ — характеристическая функция дуги $\{\operatorname{Re} t > 0\}$, таким свойством не обладает.

Пример 2. Пусть $a(t,\tau) = \exp i\frac{\arg t}{\arg \tau}$. Тогда коэффициенты Фурье имеют вид

$$a_n^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\exp\left\{\frac{2\pi i}{\arg\tau}\right\} - 1}{1/(\arg\tau) - n}$$

и обладают следующим свойством: $\max\limits_{\tau}\left|a_n^{(1)}(\tau)\right| = 1$. Поэтому $a(t,\tau)$ не принадлежит $S_{\mathfrak{A}}$.

Будем говорить (см. [2]), что *символ* $a \in L_\infty(\Gamma\times\Gamma)$ *секториален*, если существует константа $c \in \mathbb{C}$ такая, что $\operatorname{ess\,sup}|1 - ca| < 1$, или *локально секториален*, если для любой точки $\xi \in \Gamma\times\Gamma$ существуют такие окрестность $U$ и константа $c \in \mathbb{C}$, что $\operatorname*{ess\,sup}\limits_U |\chi_U - ca|_U| < 1$.

Имеет место следующий результат.

**Лемма 1.** *Символ $a$ $(\in S_{\mathfrak{A}})$ локально секториален тогда и только тогда, когда справедливо представление $a = bs$, где $b \in C(\Gamma\times\Gamma)$, $b \neq 0$ на $\Gamma\times\Gamma$, $s \in S_{\mathfrak{A}}$ — секториальный символ.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости выберем конечное покрытие $\Gamma\times\Gamma$ указанными окрестностями $U_\alpha$ с соответствующими константами $c_\alpha$ и построим разложение единицы $\{\chi_\alpha\}$, отвечающее этому покрытию и состоящее из непрерывных функций.

Имеем оценку

$$\operatorname{ess\,sup}\left|1 - \sum c_\alpha\chi_\alpha a\right| \le \operatorname{ess\,sup}\sum|\chi_\alpha(1 - ac_\alpha)| < 1.$$

Ясно, что $\sum c_\alpha\chi_\alpha \neq 0$ на $\Gamma\times\Gamma$. Поэтому, полагая $b = \left(\sum c_\alpha\chi_\alpha\right)^{-1}$, получаем нужное представление для $a$ с $s = a\sum c_\alpha\chi_\alpha$.

Пусть $\alpha(t)$ $(\neq 0)$ — непрерывная на $\Gamma$ функция. Тогда для нее определена целочисленная характеристика, называемая индексом: $\operatorname{ind}\alpha = (1/2\pi)\int\limits_\Gamma d\arg\alpha(t)$. Если $b(t,\tau)$ $(\neq 0)$ — непрерывная на $\Gamma\times\Gamma$ функция, то при фиксированном аргументе $\tau$ для нее определен индекс по переменной $t$, называемый ее частным индексом по первой переменной и обозначаемый через $\operatorname{ind}_1 b$. Отметим, что $\operatorname{ind}_1 b$ не зависит от второй переменной $\tau$. Аналогично определяется второй частный индекс $\operatorname{ind}_2 b$. Для локально секториального символа $a$ определим частные индексы, полагая $\operatorname{ind}_i a = \operatorname{ind}_i b$, где $b$ — элемент представления $a = bs$. Очевидно, что это определение корректно, т. е. частные индексы не зависят от представления символа в виде, указанном в лемме 1.

**2°**. Целью этого пункта является исследование фредгольмовости операторов Тёплица с локально секториальными символами. Предварительно напомним определение фредгольмова оператора.

Пусть $\mathscr{B}(X)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $X$, $\mathscr{K}$ — ее двусторонний идеал всех компактных операторов. Оператор $A$ $(\in \mathscr{B}(X))$ называется *фредгольмовым*, если его фактор-класс $A + \mathscr{K}$ обратим в фактор-алгебре $\mathscr{B}(X)/\mathscr{K}$. Фредгольмовость оператора $A$ эквивалентна существованию его правого и левого регуляризаторов, т. е. таких операторов $R_1$ и $R_2$ из $\mathscr{B}(X)$, для которых операторы $R_1A - I$, $AR_2 - I$ являются компактными.

Если $\mathscr{A}$ — некоторая банахова подалгебра в $\mathscr{B}(X)$, содержащая единичный оператор $I$ и идеал $\mathscr{K}$, то оператор $A$ $(\in \mathscr{A})$ называется *фредгольмовым в алгебре* $\mathscr{A}$, если его фактор-класс $A + \mathscr{K}$ обратим в фактор-алгебре $\mathscr{A}/\mathscr{K}$. Очевидно, что фредгольмовость оператора в алгебре эквивалентна наличию у него регуляризаторов из этой алгебры. Поэтому, вообще говоря, фредгольмовость в подалгебре не совпадает с его фрегольмовостью. Однако если $X$ — гильбертово пространство и $\mathscr{A}$ является $C^*$-подалгеброй в $\mathscr{B}(X)$, содержащей единичный оператор и идеал компактных операторов, то фредгольмовость операторов из $\mathscr{A}$ совпадает с их фрегольмовостью в алгебре $\mathscr{A}$.

Для исследования фредгольмовости операторов Тёплица применим к алгебре $\mathfrak{A}$ с идеалами $\mathscr{K}^i$ схему билокализации. Указанная схема основана на следующем утверждении [4].

**Лемма 2.** *Пусть $\mathscr{A}$ — банахова алгебра, $\mathscr{K}_0$, $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ — ее замкнутые двусторонние идеалы такие, что $\mathscr{K}_i \supset \mathscr{K}_0$ $(i = 1, 2)$, $\mathscr{K}_1 \cap \mathscr{K}_2 \subset \mathscr{K}_0$. Тогда обратимость фактор-класса $A + \mathscr{K}_0$ эквивалентна одновременной обратимости фактор-классов $A + \mathscr{K}_i$ $(i = 1, 2)$ в фактор-алгебрах $\mathscr{A}/\mathscr{K}_i$.*

Доказательство. Действительно, если $R_i$ — элемент из фактор-класса, обратного к классу $A + \mathscr{K}_i$, то элемент $R_1 + R_2 - R_1AR_2$ ввиду соотношений $(AR_1 - I)(AR_2 - i)$, $(R_1A - I)(R_2A - I) \in \mathscr{K}_0$ определяет фактор-класс, обратный к $A + \mathscr{K}_0$.

Применяя лемму 2 к алгебре $\mathfrak{A}$, приходим к выводу, что оператор $A$ из алгебры $\mathfrak{A}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фактор-классы $[A]_i = A + \mathscr{K}^i$ $(i = 1, 2)$ обратимы в фактор-алгебрах $\mathfrak{A}/\mathscr{K}^i$.

Для исследования обратимости в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}^i$ используем локальный принцип Гохберга — Крупника [3], краткая формулировка которого приводится ниже для полноты изложения.

Пусть $A$ — банахова алгебра с единицей $e$. Множество ее элементов $M$, не содержащее нуля, называется *локализующим классом*, если

1) $\sup\limits_{a\in M} \|a\| < \infty$;

2) для любых $a_1$, $a_2$ из $M$ существует $a \in M$ такой, что

$$aa_i = a_ia = a, \quad i = 1, 2.$$

Элементы $x, y \in A$ называются *$M$-эквивалентными*, если

$$\inf_{a\in M} \|(x - y)a\| = \inf_{a\in M} \|a(x - y)\| = 0.$$

Элемент $x \in A$ называется *$M$-обратимым слева* (*справа*), если существуют элементы $z \in A$, $a \in M$ такие, что

$$zxa = a \quad (axz = a).$$

Элемент $x$ называется *$M$-обратимым*, если он одновременно $M$-обратим слева и справа.

Система локализующих классов $\{M_\tau\}_{\tau\in T}$ называется *покрывающей*, если из любого семейства элементов $\{a_\tau\}_{\tau\in T}$ $(a_\tau \in M_\tau)$ можно выбрать конечное число элементов $a_{\tau_j}$, $j = 1,\dots N$, таких, что элемент $\sum a_{\tau_j}$ обратим в алгебре $A$.

**Теорема 2** [3]. *Пусть $\{x_\tau\}_{\tau\in T}$ — семейство локальных представителей элемента $x \in A$, т. е. для каждого $\tau \in T$ элементы $x$ и $x_\tau$ $M_\tau$-эквивалентны. Если элемент $x$ коммутирует со всеми элементами из $\bigcup\limits_{\tau\in T} M_\tau$, то $x$ обратим в алгебре $A$ тогда и только тогда, когда для любого $\tau \in T$ элемент $x_\tau$ $M_\tau$-обратим.*

Следующая лемма определяет локализующие классы в алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}^i$.

**Лемма 3.** *Пусть $M_t$ — множество всех функций из $C(\Gamma)$, равных единице в некоторой окрестности точки $t \in \Gamma$, со значениями в $[0,1]$ и $M_t^1$ — множество всех фактор-классов вида $[T(a)\otimes I]_1$, где $a \in M_t$. Тогда $\left\{M_t^1\right\}_{t\in\Gamma}$ — покрывающая система локализующих классов в алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}^1$, причем каждый класс принадлежит центру алгебры $\mathfrak{A}/\mathscr{K}^1$.*

Доказательство. Заметим, что для непрерывного символа $a \in C(\Gamma)$ операторы $Pa(I-P)$, $(I-P)aP$ компактны [3, с. 33]. Поэтому операторы $(Pa(P-I)\otimes P)b(P\otimes P)$, $(P\otimes P)b(Pa(P-I)\otimes P)$ в случае $b \in S_{\mathfrak{A}}$ принадлежат идеалу $\mathscr{K}^1$. Из очевидной формулы

$$(T(a)\otimes I)T^{(2)}(b) - T^{(2)}(b)(T(a)\otimes I) = (Pa(P-I)\otimes P)b(P\otimes P) - (P\otimes P)b(Pa(P-I)\otimes P)$$

следует, что каждый класс $M_t^1$ принадлежит центру алгебры $\mathfrak{A}/\mathscr{K}^1$.

Далее, имеет место равенство

$$\inf_{[A]_1\in M_t^1} \|[A]_1\| = \sup_{[A]_1\in M_t^1} \|[A]_1\| = 1. \tag{3}$$

Действительно, пусть $K_\epsilon \in \mathscr{K}^1$ — оператор такой, что

$$\|[A]_1\| + \varepsilon \geq \|A + K_\varepsilon\|.$$

Тогда для оператора $B$ умножения на функцию $b$ из $M_t$ при достаточно малом носителе функции $b$ имеем

$$\|A + K_\varepsilon\| \geq \|B(A+K_\varepsilon)\| \geq \|ba\|_{L_\infty} - \|b(I-P)aP\| - \|BK_\varepsilon\| \geq 1-\varepsilon,$$

что и дает нужное равенство. Отметим, что здесь использовано соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} \|B_nK\| = 0$, в котором $K$ — компактный оператор и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$.

Теперь заметим, что система классов $\{M_t\}_{t\in\Gamma}$ образует покрывающую систему локализующих классов в алгебре $C(\Gamma)$ и, следовательно, $\left\{M_t^1\right\}_{t\in\Gamma}$ — покрывающая система локализующих классов в алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}^1$.

Замечание. Аналогичным образом определяется покрывающая система локализующих классов $\left\{M_t^2\right\}_{t\in T}$ в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathscr{K}^2$.

**Теорема 3.** *Пусть $a \in (S_{\mathfrak{A}})$ — локально секториальный символ. Оператор $T^{(2)}(a)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда* $\operatorname{ind}_i a = 0$ $(i = 1, 2)$.

Доказательство. Пусть символ $a$ имеет нулевые частные индексы. Тогда для $a$ справедливо представление $a = bs$, где $b \in C(\Gamma\times\Gamma)$ не обращается в нуль и имеет нулевые частные индексы, а функция $s$ секториальна. Поэтому оператор $T^{(2)}(s)$ обратим, так как для него справедлива оценка

$$\|I - cT^{(2)}(s)\| = \|T^{(2)}(1-cs)\| < 1$$

с некоторой константой $c \neq 0$. Далее, для любой точки $\xi \in \Gamma$ фактор-класс $[T^{(2)}(bs)]_1$ $M^1_\xi$-эквивалентен фактор-классу $[T^{(2)}(b_\xi s)]_1$, где $b_\xi(t,\tau) = b(\xi,\tau)$, т. е. $b_\xi$ — непрерывная функция одного переменного $\tau$. Так как $\operatorname{ind} b_\xi = 0$, то существует непрерывная на $\Gamma$ ветвь $\ln b_\xi$ и ее можно равномерно аппроксимировать многочленами Лорана. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ функция $b_\xi$ допускает факторизацию $b_\xi = b^+_\xi d b^-_\xi$, где $b^\pm_\xi = e^{p_\pm}$, $d = e^q$, причем $q$ — непрерывная функция с нормой $\|q\|_{L_\infty} < \varepsilon$, $p_+$, $p_-$ — многочлены соответственно по неотрицательным и отрицательным степеням переменной $\tau$.

Вследствие этого оператор $T^{(2)}(b_\xi s)$ может быть представлен в виде

$$T^{(2)}(b_\xi s) = \big(I \otimes T\big(b^-_\xi\big)\big) T^{(2)}(sd) \big(I \otimes T\big(b^+_\xi\big)\big)$$

и, следовательно, обратим при достаточно малом $\varepsilon$. Поэтому фактор-класс $[T^{(2)}(a)]_1$ является $M^1_\xi$-обратимым.

Аналогично устанавливается $M^2_\xi$-обратимость фактор-класса $[T^{(2)}(a)]_2$ при любом $\xi \in \Gamma$. В силу локального принципа Гохберга — Крупника фактор-классы $[T^{(2)}(a)]_i$ $(i = 1, 2)$ обратимы, что вследствие леммы 2 влечет фредгольмовость оператора $T^{(2)}(a)$.

Если $b = b_0 t^\kappa \tau^\mu$, где $b_0$ имеет нулевые частные индексы, то, как установлено выше, оператор $T^{(2)}(b_0 s)$ фредгольмов, поэтому обратимость фактор-классов $[T^{(2)}(a)]_i$ влечет обратимость фактор-классов $[T^{(2)}(t^\kappa \tau^\mu)]_i$, что возможно лишь при $\kappa = \mu = 0$.

Поясним это утверждение при $i = 1$. Пусть, например, $\mu \leq 0$, тогда справедливо представление

$$[T^{(2)}(a)]_1 = [I \otimes T(\tau^\mu)]_1 [T(t^k) \otimes I]_1 [T^{(2)}(b_0 s)]_1.$$

Легко проверяется, что фактор-класс $[T(t^{-k}) \otimes I]_1$ является обратным к фактор-классу $[T(t^k) \otimes I]_1$. Поэтому из предыдущего равенства ввиду обратимости фактор-классов $[T^{(2)}(a)]_1$ и $[T^{(2)}(b_0 s)]_1$ вытекает обратимость фактор-класса $[I \otimes T(\tau^\mu)]_1$, что возможно лишь при $\mu = 0$. Аналогично при $i = 2$ устанавливается, что $k = 0$.

**3°**. В оставшейся части работы исследуется применимость проекционных методов к двумерным операторам Тёплица с локально секториальными символами класса $S_{\mathfrak{A}}$. В отличие от известных результатов [2] этот класс символов, как уже отмечалось, выходит за рамки тензорного произведения $L_\infty(\Gamma) \widehat{\otimes} L_\infty(\Gamma)$, но операторы рассматриваются лишь в пространстве $l^2\big(Z^2_+\big)$.

Пусть $X$ — банахово пространство с системой проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$, сильно сходящихся к единичному оператору $I$, $\mathscr{B}(X)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в $X$, $\mathscr{G}\mathscr{B}(X)$ — группа всех ограниченно обратимых операторов из $\mathscr{B}(X)$, $\mathscr{K}(X)$ — идеал всех компактных операторов в $\mathscr{B}(X)$.

Говорят, что к оператору $A \in \mathscr{B}(X)$ *примени́м проекционный метод по системе проекторов* $\{Q_n\}$, и используют при этом обозначение $A \in \Pi\{Q_n\}$, если при $n > n_0$ для любого $y \in X$ уравнение

$$Q_n A Q_n x = Q_n y$$

имеет единственное решение $x_n \in \operatorname{Im} Q_n$ и элементы $x_n$ сходятся в норме пространства $X$ к решению уравнения $Ax = y$. Из применимости к оператору $A$ проекционного метода следует его обратимость, но обратное, вообще говоря, неверно. Общая теория проекционных методов изложена, например, в [8]. Вопрос о применимости проекционного метода можно свести к исследованию обратимости элементов некоторой банаховой алгебры. Впервые этот важный факт вместе с локальным подходом к исследованию применимости проекционных методов установлен в [5]. Дальнейшее развитие локального метода изложено в [2]. Мы приведем лишь необходимый для дальнейшего результат из [2], ограничившись операторами Тёплица, действующими в пространстве $l^2\big(Z^2_+\big)$.

Пусть $Z^n$ $(Z^n_+)$ — декартово произведение $n$ экземпляров множества $Z^1$ $(Z^1_+)$ всех целых (неотрицательных целых) чисел, $l^2\big(Z^n_+\big) = \widehat{\otimes} l^2\big(Z^1_+\big)$ — тензорное произведение $n$ экземпляров гильбертова пространства $l^2\big(Z^1_+\big)$ комплексных последовательностей $\{x_j\}_{j\in Z^1_+}$. Ввиду изометрического изоморфизма пространств $H_2(\Gamma^n)$ и $l^2\big(Z^n_+\big)$ оператор Тёплица $T^{(n)}(a) : l^2\big(Z^n_+\big) \to l^2\big(Z^n_+\big)$, сопоставляемый символу $a \in L_\infty(\Gamma^n)$, определяется формулой

$$T^{(n)}(a) : \{x_j\}_{j\in Z^n_+} \to \Big\{ \sum_{j\in Z^n_+} a_{k-j} x_j \Big\}_{k\in Z^n_+},$$

где $\{a_j\}_{j\in Z^n}$ — набор коэффициентов Фурье символа $a \in L_\infty(\Gamma^n)$. (В дальнейшем $n = 1, 2$.)

Пусть $\mathscr{P}_n = P_n \otimes P_n$ — система ортопроекторов, где

$$P_n\{x_j\}_{j\in Z^1_+} = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots),$$

и $V_{n,j}$ $(j = 0, 1, 2, 12)$ — операторы вида

$$V_{n,0} = \mathscr{P}_n, \quad V_{n,1} = W_n \otimes P_n, \quad V_{n,2} = P_n \otimes W_n, \quad V_{n,12} = W_n \otimes W_n,$$

где

$$W_n\{x_j\}_{j\in Z^1_+} = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_0, 0, 0, \dots).$$

В $C^*$-алгебре — произведении $C^*$-алгебр $\mathscr{B}(\operatorname{Im}\mathscr{P}_n)$ (определение см., например, в [9]) — введем $C^*$-подалгебру $\mathscr{A}$ всех семейств $\{A_n\}$ $(A_n \in \mathscr{B}(\operatorname{Im}\mathscr{P}_n))$, для которых существуют $s^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} V_{n,j} A_n V_{n,j}$ $(j = 0, 1, 2, 12)$. (Здесь существование $s^*\text{-}\lim A_n$ означает, что существуют сильные пределы $s\text{-}\lim A_n\mathscr{P}_n = A$, $s\text{-}\lim A_n^*\mathscr{P}_n = A^*$, где операция $*$ есть переход к сопряженному оператору.) В $C^*$-алгебре $\mathscr{A}$ определим замкнутые двусторонние идеалы

$$\mathscr{I}_0 = \{\{\Delta_n\} \in \mathscr{A};\ \lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0\},$$

$$\mathscr{I}_k = \Big\{\{A_n\} \in \mathscr{A};\ A_n = \sum_j V_{n,j} K_j V_{n,j} + \Delta_n,$$
$$\{\Delta_n\} \in \mathscr{I}_0,\ K_j \in \mathscr{K}\big(l^2\big(Z^2_+\big)\big),\ j = 0, 1, 2, 12\Big\}.$$

Отметим, что для операторов Тёплица $T^{(2)}(a)$ $(a \in L_\infty(\Gamma^2))$ семейство операторов $\big\{T^{(2)}_n(a)\big\} = \{\mathscr{P}_n T^{(2)}(a)\mathscr{P}_n\}$ принадлежит алгебре $\mathscr{A}$, причем

$$s^*\text{-}\lim_{n\to\infty} V_{n,j} T^{(2)}_n(a) V_{n,j} = T^{(2)}(a^{(j)}),$$

где символы имеют вид

$$a^{(0)}(t,\tau) = a(t,\tau), \quad a^{(1)}(t,\tau) = a(1/t,\tau),$$
$$a^{(2)}(t,\tau) = a(t,1/\tau), \quad a^{(12)}(t,\tau) = a(1/t,1/\tau).$$

Имеет место (см. [2])

**Теорема 4.** *Для оператора Тёплица $T^{(2)}(a)$ ($a \in L_\infty(\Gamma^2)$) следующие условия эквивалентны:*

1) $T^{(2)}(a) \in \Pi\{\mathscr{P}_n\}$;

2) $T^{(2)}(a) \in \mathscr{G}\mathscr{B}\big(l^2\big(Z_+^2\big)\big)$; $\quad \sup\limits_{n>n_0} \big\| \big(T_n^{(2)}(a)\big)^{-1} \mathscr{P}_n \big\| < \infty$;

3) *фактор-класс* $\big\{T_n^{(2)}(a)\big\} + \mathscr{I}_0$ *обратим в фактор-алгебре* $\mathscr{A}/\mathscr{I}_0$;

4) (а) $T^{(2)}(a^{(j)}) \in \mathscr{G}\mathscr{B}\big(l^2\big(Z_+^2\big)\big)$, $j = 0, 1, 2$;

(б) *фактор-класс* $\big\{T_n^{(2)}(a)\big\} + \mathscr{I}_k$ *обратим в фактор-алгебре* $\mathscr{A}/\mathscr{I}_k$.

Отметим, что в [2] для класса кусочно непрерывных символов $\Pi C \otimes \Pi C$ после применения билокального принципа из [4] установлено, что условие 4(б) является следствием условий 4(а). Ниже аналогичный результат устанавливается для локально секториальных символов класса $S_{\mathfrak{A}}$. Точнее, будет доказана

**Теорема 5.** *Для оператора Тёплица $T^{(2)}(a)$ с локально секториальным символом класса $S_{\mathfrak{A}}$ применúм проекционный метод по системе проекторов $\{\mathscr{P}_n\}$ тогда и только тогда, когда операторы $T^{(2)}(a^{(j)})$ ($j = 0, 1, 2$) обратимы в алгебре $\mathscr{B}\big(l^2\big(Z_+^2\big)\big)$.*

Теорема 5 устанавливается с помощью сильного локального принципа [7], краткая формулировка которого приводится ниже с некоторыми терминологическими изменениями.

Пусть $A$ — банахова алгебра с единицей $e$ и замкнутым двусторонним идеалом $K$, и пусть

1) в идеале $K$ существует аппроксимативная система проекторов $\{P_n\}_1^\infty$, т. е. для каждого $k \in K$

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n k - k\| = \lim_{n\to\infty} \|k P_n - k\| = 0;$$

2) в алгебре $A$ существует покрывающая система локализующих классов $\{M_\tau\}_{\tau\in\mathscr{T}}$ такая, что

а) для каждого $\tau \in \mathscr{T}$

$$\sup_{a\in M_\tau} \|a\| < \infty;$$

б) для любого $k \in K$ и любого $a \in \bigcup\limits_{\tau\in\mathscr{T}} M_\tau$

$$ak - ka = 0.$$

Элементы $x$, $y \in A$ называются *сильно $M_\tau$-эквивалентными*, если для любого $n$

$$\inf_{a\in M_\tau} \|(x-y)aP_n\| = \inf_{a\in M_\tau} \|aP_n(x-y)\| = 0.$$

Элемент $x \in A$ называется *аппроксимативно $M_\tau$-обратимым слева* (*справа*), если для любого $n$ существуют элементы $z_n \in A$, $a_n \in M_\tau$ такие, что

1) $\sup\limits_n \|z_n\| < \infty$;

2) $z_n x a_n P_n = a_n P_n$ ($a_n P_n x z_n = a_n P_n$).

Если элемент $x$ одновременно аппроксимативно $M_\tau$-обратим слева и справа, то он называется *аппроксимативно $M_\tau$-обратимым.*

**Теорема 6** [7] (сильный локальный принцип). *Пусть $x \in A$ и $\{x_\tau\}$ ($\tau \in \mathscr{T}$) — набор его сильных локальных представителей, т. е. для любого $\tau \in \mathscr{T}$ элемент $x$ сильно $M_\tau$-эквивалентен $x_\tau$.*

*Тогда элемент $x$ обратим в алгебре $A$ тогда и только тогда, когда*
1) *фактор-класс $x+K$ обратим в фактор-алгебре $A/K$;*
2) *для любого $\tau \in \mathscr{T}$ элемент $x_\tau$ аппроксимативно $M_\tau$-обратим.*

Определим $C^*$-подалгебру $\mathscr{B}$ в алгебре $\mathscr{A}$, к которой будет применяться теорема 6.

Пусть $\mathscr{B}^{(1)}$ — $C^*$-подалгебра в произведении $C^*$-алгебр $\mathscr{B}(\operatorname{Im} P_n)$, порожденная семействами операторов вида

$$\{P_n A P_n\}, \quad A \in TO\big(l^2\big(Z_+^1\big)\big), \tag{4}$$

где $TO\big(l^2\big(Z_+^1\big)\big)$ — $C^*$-алгебра, порожденная всеми операторами Тёплица с символами из $L_\infty(\Gamma)$, и семействами операторов вида

$$\{P_n K_1 P_n + W_n K_2 W_n + \Delta_n\}, \tag{5}$$

где $K_j \in \mathscr{K}\left(l^2\big(Z_+^1\big)\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$.

Необходимые сведения об алгебре $\mathscr{B}^{(1)}$ содержит следующая

**Лемма 4** [2]. *Справедливы следующие утверждения:*
1) *для любого семейства $\{A_n\} \in \mathscr{B}^{(1)}$ существуют пределы*

$$s^*\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n, \quad s^*\text{-}\lim_{n\to\infty} W_n A_n W_n;$$

2) *множество элементов вида* (5) *образует замкнутый двусторонний идеал $\mathscr{J}$ в $\mathscr{B}^{(1)}$;*
3) *если $b \in C(\Gamma^1)$, то для любого семейства $\{A_n\} \in \mathscr{B}^{(1)}$*

$$\big\{A_n T_n^{(1)}(b) - T_n^{(1)}(b) A_n\big\} \in \mathscr{J},$$

4) *если $a \in L_\infty(\Gamma)$, $b \in C(\Gamma^1)$, то*

$$\big\{T_n^{(1)}(a) T_n^{(1)}(b) - T_n^{(1)}(ab)\big\} \in \mathscr{J}.$$

Отметим, например, что свойство 4 вытекает из представления

$$T_n^{(1)}(ab) = T_n^{(1)}(a) T_n^{(1)}(b) + P_n H(a) H(\tilde{b}) P_n + W_n H(\tilde{a}) H(b) W_n \tag{6}$$

ввиду компактности операторов Ганкеля $H(\tilde{b})$, $H(b)$ с непрерывными символами $b$, $\tilde{b}$. Здесь $\tilde{a}$ — символ: $\tilde{a}(t) = a(1/t)$, $H(a) : l^2\big(Z_+^1\big) \to l^2\big(Z_+^1\big)$ — оператор Ганкеля,

$$H(a)\{x_j\}_{j\in Z_+^1} = \left\{\sum_{j=0}^{\infty} a_{k+j+1} x_j\right\}_{k\in Z_+^1},$$

где $a_n$ — коэффициенты Фурье символа $a$.

Обозначим через $\mathscr{B}^{(1)}\widehat{\otimes}\mathscr{B}^{(1)}$; $\mathscr{I}_k^1 = \mathscr{J}\widehat{\otimes}\mathscr{B}^{(1)}$; $\mathscr{I}_k^2 = \mathscr{B}^{(1)}\widehat{\otimes}\mathscr{J}$ замыкания в норме алгебры $\mathscr{A}$ множеств всех линейных комбинаций элементов вида $\big\{A_n^{(1)} \otimes A_n^{(2)} + \Delta_n\big\}$, где соответственно $\big\{A_n^{(i)}\big\} \in \mathscr{B}^{(1)}$ $(i=1,2)$; $\big\{A_n^{(1)}\big\} \in \mathscr{J}$, $\big\{A_n^{(2)}\big\} \in \mathscr{B}^{(1)}$; $\big\{A_n^{(1)}\big\} \in \mathscr{B}^{(1)}$, $\big\{A_n^{(2)}\big\} \in \mathscr{J}$, $\Delta_n \in \mathscr{I}_0$.

Ясно, что $\mathscr{B}^{(1)}\widehat{\otimes}\mathscr{B}^{(1)}$ — $C^*$-подалгебра в $\mathscr{A}$ с замкнутыми двусторонними идеалами $\mathscr{I}_k^1$ и $\mathscr{I}_k^2$, причем

$$\mathscr{I}_k^1 \cdot \mathscr{I}_k^2 \subset \mathscr{I}_k \subset \mathscr{I}_k^1 \cap \mathscr{I}_k^2.$$

Наконец, обозначим через $\mathscr{B}$ наибольшую $C^*$-подалгебру в $\mathscr{A}$, в которой $\mathscr{I}_k^1$ и $\mathscr{I}_k^2$ являются замкнутыми двусторонними идеалами.

**Лемма 5.** *Если $a \in S_{\mathfrak{A}}$, то $\{T_n^{(2)}(a)\} \in \mathscr{B}$.*

Доказательство. Так как выполняются соотношения

$$T_n^{(2)}(a)(P_n \otimes W_n) = (P_n \otimes W_n)T_n^{(2)}(a^{(2)}),$$

$$T_n^{(2)}(a)(W_n \otimes P_n) = (W_n \otimes P_n)T_n^{(2)}(a^{(1)}),$$

а для любого компактного оператора $K$ из $\operatorname{End} l^2(Z_+)$ имеем $\|(I - P_m)K\|$, $\|K(I - P_m)\| \to 0$ при $m \to \infty$, то достаточно установить, что при всех $m$ элементы $\{T_n^{(2)}(a)(P_n \otimes P_m)\}$, $\{(P_n \otimes P_m)T^{(2)}(a)\}$ принадлежат идеалу $\mathscr{I}_k^2$, а элементы $\{T_n^{(2)}(a)(P_m \otimes P_n)\}$, $\{(P_m \otimes P_n)T_n^{(2)}(a)\}$ — идеалу $\mathscr{I}_k^1$. Но это очевидным образом следует из определения класса символов $S_{\mathfrak{A}}$.

Применение леммы 2 к алгебре $\mathscr{B}$ и ее идеалам $\mathscr{I}_k^1$, $\mathscr{I}_k^2$ приводит к следующему утверждению.

**Лемма 6.** *Фактор-класс $\{A_n\} + \mathscr{I}_k$ обратим в фактор-алгебре $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k$ тогда и только тогда, когда фактор-классы $\{A_n\} + \mathscr{I}_k^j$ $(j = 1, 2)$ обратимы в фактор-алгебрах $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^j$.*

Основной результат (теорема 5) вытекает из теоремы 4, леммы 6 и следующего утверждения.

**Теорема 7.** *Пусть $a \in S_{\mathfrak{A}}$ — локально секториальный символ. Если операторы $T^{(2)}(a^{(0)})$, $T^{(2)}(a^{(2)})$ $(T^{(2)}(a^{(0)}), T^{(2)}(a^{(1)}))$ обратимы в $\mathscr{B}(l^2(Z_+^2))$, то фактор-класс $\{T_n^{(2)}(a)\} + \mathscr{I}_k^1$ $(\{T_n^{(2)}(a)\} + \mathscr{I}_k^2)$ обратим в фактор-алгебре $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^1$ $(\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^2)$.*

Ниже приводится доказательство теоремы 7 для фактор-алгебры $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^1$, случай фактор-алгебры $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^2$ исследуется аналогично.

Пусть $\mathscr{I}_k^{12} = \mathscr{I}_k^1 + \mathscr{I}_k^2$, тогда $\mathscr{I}_k^{12}$ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathscr{B}$ [9, с. 30]. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^1$ с идеалом $\mathscr{I}_k^{12}/\mathscr{I}_k^1$.

**Лемма 7.** *Фактор-классы*

$$\{P_n \otimes (P_m P_n + W_n P_m W_n)\} + \mathscr{I}_k^1, \quad m = 0, 1, \dots,$$

*образуют аппроксимативную систему проекторов в идеале $\mathscr{I}_k^{12}/\mathscr{I}_k^1$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$s^*\text{-}\lim_{n\to\infty} W_n P_m W_n = s^*\text{-}\lim_{n\to\infty} (P_n - P_{n-m-1}) = 0.$$

Поэтому для любого компактного оператора $K$ элементы

$$\{P_n \otimes (P_n K W_n P_m W_n)\}, \quad \{P_n \otimes (W_n K W_n P_m)\}$$

принадлежат идеалу $\mathscr{I}_0$.

**Лемма 8.** *Пусть $\widetilde{M}_\tau^1$ $(\tau \in \Gamma^1)$ — множество фактор-классов $\{T_n^{(1)}(a) \otimes P_n\} + \mathscr{I}_k^1$, где $a \in M_\tau$.*

*Тогда $\{\widetilde{M}_\tau^1\}_{\tau\in\Gamma^1}$ образуют покрывающую систему локализующих классов в фактор-алгебре $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^1$, причем алгебра $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^1$ с идеалом $\mathscr{I}_k^{12}/\mathscr{I}_k^1$ и системой $\{\widetilde{M}_\tau^1\}_{\tau\in\Gamma^1}$ удовлетворяет предположениям сильного локального принципа.*

Доказательство. Утверждение очевидно ввиду свойств элементов алгебры $\mathscr{B}^{(1)}$, приведенных в лемме 4, и определения идеала $\mathscr{I}_k^1$.

**Лемма 9.** *Пусть операторы $T^{(2)}(a^{(0)})$, $T^{(2)}(a^{(2)})$ обратимы. Тогда для каждого $\tau \in \Gamma^1$ класс $\{T_n^{(2)}(a)\} + \mathscr{I}_k^1$ аппроксимативно $\widetilde{M}_\tau^1$-обратим.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3 символ $a$ допускает факторизацию $a = bs$, где $b \in C(\Gamma^2)$ не обращается в нуль и имеет нулевые частные индексы, а $s \in S_{\mathfrak{A}}$ — секториальный символ. Фактор-класс $\{T_n^{(2)}(a)\} + \mathscr{I}_k^1$ является сильно $\widetilde{M}_\tau^1$-эквивалентным фактор-классу $\{T_n^{(2)}(a_\tau)\} + \mathscr{I}_k^1$, где $a_\tau = b_\tau s$. Используя факторизацию символа $b_\tau$ (см. доказательство теоремы 3), устанавливаем, что операторы $(P_n \otimes P)a_\tau^{(0)}(P_n \otimes P)$ обратимы соответственно в пространствах $\operatorname{Im}(P_n \otimes P)$, причем нормы их обратных равномерно ограничены по $n$. Аналогичным образом устанавливается подобное свойство для операторов $(P_n \otimes P)a_\tau^{(2)}(P_n \otimes P)$. Обозначим обратные к этим операторам через $R_{n,0}$ и $R_{n,2}$. Введем операторы

$$R_n^{(m)} = (P_n \otimes P_n P_m) R_{n,0} (P_n \otimes P_n) + (P_n \otimes W_n P_m) R_{n,2} (P_n \otimes W_n).$$

Ясно, что семейства операторов $\{R_n^{(m)}\}$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$ принадлежат идеалу $\mathscr{I}_k^2$. Учитывая, что при любом $m$ семейства

$$\{(P_n \otimes P_n P_m) R_{n,j} (P_n \otimes (P - P_n)) T^{(2)}(a_\tau^{(j)})(P_n \otimes P_n)\} \quad (j = 0, 2)$$

принадлежат идеалу $\mathscr{I}_0$, получаем, что

$$R_n^{(m)} T_n^{(2)}(a_\tau) = P_n \otimes P_n P_m + P_n \otimes W_n P_m W_n + \Delta_n^{(m)},$$

где $\{\Delta_n^{(m)}\} \in \mathscr{I}_0$. Поэтому выполняется соотношение

$$\{R_n^{(m)} T_n^{(2)}(a_\tau) - P_n \otimes P_n\}\{P_n \otimes (P_m P_n + W_n P_m W_n)\} \in \mathscr{I}_0,$$

которое и влечет аппроксимативную $\widetilde{M}_\tau^1$-обратимость слева фактор-класса $\{T_n^{(2)}(a)\} + \mathscr{I}_k^1$.

Аналогично рассматривается случай аппроксимативной $\widetilde{M}_\tau^1$-обратимости справа.

Для завершения доказательства теоремы 7 в силу теоремы 6 следует рассмотреть вопрос об обратимости в фактор-алгебре $(\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^1)/(\mathscr{I}_k^{12}/\mathscr{I}_k^1)$. Ввиду изоморфности этой алгебры алгебре $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^{12}$ достаточно исследовать обратимость фактор-класса $\{T_n^{(2)}(a)\} + \mathscr{I}_k^{12}$.

**Лемма 10.** *Пусть $a$ — локально секториальный символ из $S_{\mathfrak{A}}$, тогда фактор-класс $\{T_n^{(2)}(a)\} + \mathscr{I}_k^{12}$ обратим в фактор-алгебре $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^{12}$.*

Доказательство этого факта основывается на следующем утверждении.

**Лемма 11.** *Пусть $b_1$ и $b_2$ — функции из классов $M_t$ и $M_\tau$ соответственно и $\widetilde{M}_{t,\tau}^{12}$ — множество всех фактор-классов $\{T_n(b_1) \otimes T_n(b_2)\} + \mathscr{I}_k^{12}$. Тогда $\{\widetilde{M}_{t,\tau}^{12}\}_{(t,\tau)\in\Gamma^2}$ образуют покрывающую систему локализующих классов в алгебре $\mathscr{B}/\mathscr{I}_k^{12}$, причем элементы этих классов коммутируют со всеми элементами вида*

$$\{T_n^{(2)}(a)\} + \mathscr{I}_k^{12}, \quad a \in S_{\mathfrak{A}}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\{T_n^{(2)}(a)(T_n(b_1) \otimes P_n) - T_n^{(2)}(ab_1)\}, \{(T_n(b_1) \otimes P_n) T_n^{(2)}(a) - T_n^{(2)}(ab_1)\} \in \mathscr{I}_k^1,$$

$$\left\{T_n^{(2)}(a)(P_n \otimes T_n(b_2)) - T_n^{(2)}(ab_2)\right\}, \left\{(P_n \otimes T_n(b_2))T_n^{(2)}(a) - T_n^{(2)}(ab_2)\right\} \in \mathscr{I}_k^2.$$

Доказательство этих соотношений аналогично свойству 4 леммы 4.

Перейдем к доказательству леммы 10. Пусть $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \Gamma^2$ и $U$ — окрестность точки $\tau$, на которой функция $a$ секториальна. Тогда существует число $\lambda \neq 0$ такое, что в этой окрестности $\left|1 - \frac{a|_U}{\lambda}\right| < 1$. Положим

$$a_\tau = \begin{cases} a, & t \in U, \\ \lambda, & t \in CU. \end{cases}$$

Тогда элемент $\left\{T_n^{(2)}(a)\right\} + \mathscr{I}_k^{12}$ $\widetilde{M}_\tau^{12}$-эквивалентен элементу $\left\{T_n^{(2)}(a_\tau)\right\} + \mathscr{I}_k^{12}$. Остается заметить, что оператор $T_n^{(2)}(a_\tau)$ обратим, так как символ $a_\tau$ секториален.

Поэтому лемма справедлива в силу локального принципа Гохберга — Крупника.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 3. С. 567–586.
2. *Böttcher A., Silbermann B.* Analysis of Toeplitz operators. Berlin: Akad.-Verl., 1989.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973.
4. *Пилиди В. С.* О многомерных бисингулярных операторах // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201, № 4. С. 1723–1726.
5. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212, № 6. С. 1287–1289.
6. *Сазонов Л. И.* Бисингулярные характеристические операторы с разрывными коэффициентами в пространстве $L_2(R^2)$ // Функцион. анализ и его прил. 1985. Т. 12, № 2. С. 90–91.
7. *Сазонов Л. И.* О бисингулярных операторах с измеримыми коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 389–398.
8. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
9. *Диксмье Ж.* $C^*$-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.


*Статья поступила 16 июля 2002 г.*

*Сазонов Леонид Иванович*
*Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,*
*ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090*
sazonov@math.rsu.ru