Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.518

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА СОБОЛЕВА — МОРРИ $S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G)$ С ДОМИНИРУЮЩИМИ СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. М. Наджафов

Аннотация: Построены пространства типа Соболева — Морри с доминирующими смешанными производными и с помощью полученного интегрального представления доказаны теоремы вложения в этих пространствах.

Ключевые слова: пространство типа Соболева — Морри с доминирующей смешанной производной, гибкий рог, интегральное представление, теорема вложения, условие Гёльдера.

В связи с тем, что некоторые смешанные производные $D^\nu f$ не могут быть оценены через производные функции f, входящие в нормы пространств W^l_p и H^l_p, возникла необходимость рассмотрения пространств функций другого типа, где доминирующую роль играют смешанные производные. Пространства S^l_pW ($l \in \mathbb{N}^n$) и S^l_pH функций с доминирующей смешанной производной введены и изучены С. М. Никольским [1], а позднее А. Д. Джабраиловым [2]; пространства S^l_pW были распространены на случай, когда $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, где $l_j \geq 0$ могут не быть целыми.

В работе вводится пространство $S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G)$ ($l \in \mathbb{N}^n$; $\mathbf{p} \in [1;\infty)^n$; $\mathbf{a} \in [0,1]^n$; $\varkappa \in (0,\infty)^n$; $\tau \in [1,\infty]$) типа Соболева — Морри с доминирующими смешанными производными. Это пространство построено на базе $S^l_{\mathbf{p}}W$ — пространства Соболева с доминирующей смешанной производной — и пространства типа Морри $L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$. В случае, когда область $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию гибкого рога, получены интегральные представления и с точки зрения теории вложения изучены некоторые свойства функций из рассматриваемого пространства.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область, $e_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $e \subseteq e_n$; $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, $l_j > 0$ целые ($j \in e_n$); $l^e = \left(l^e_1, l^e_2, \dots, l^e_n\right)$, где $l^e_j = l_j$ при $j \in e$ и $l^e_j = 0$ при $j \in e_n \backslash e = e'$. Пусть, далее,

$$\int\limits_{a^e}^{b^e} f(x)\,dx^e = \left(\prod_{j\in e}\int\limits_{a_j}^{b_j} dx_j\right) f(x),$$

т. е. интегрирование идет только по переменным x_j, индексы которых принадлежат множеству e.

В дальнейшем будем писать $\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$, где $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, если $p_j \leq q_j$ ($j \in e_n$); в частности, запись $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \infty$ означает, что $1 \leq p_j \leq \infty$ ($j \in e_n$), где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\infty = (\infty, \dots, \infty)$.

При $h \in (0,\infty)^n$ для каждого $x \in G$ рассмотрим вектор-функцию

$$\rho(v) = \rho(v,x) = (\rho_1(v_1,x), \rho_2(v_2,x), \dots, \rho_n(v_n,x)), \quad 0 \le v_j \le h_j \ (j \in e_n),$$

где $\rho_j(0,x) = 0$ при всех $j \in e_n$, функции $\rho_j(v_j,x)$ абсолютно непрерывны по u_j на $[0,h_j]$ и $|\rho_j'(v_j,x)| \le 1$ для почти всех $v_j \in [0,h_j]$, где $\rho_j' = \frac{\partial}{\partial v_j}\rho_j(v_j,x)$, $j \in e_n$. При $\theta \in (0,1]^n$ каждое из множеств $V(x,\theta) = \bigcup\limits_{\substack{0<v_j\le h_j,\\ j\in e_n}} [\rho(v,x) + v\theta I]$ и $x + V(x,\theta)$, где $I = [-1,1]^n$, $v\theta I = \{(v_1\theta_1 y_1, \dots, v_n\theta_n y_n) : y \in I\}$, будем называть *гибким рогом*, а точку x — *вершиной гибкого рога* $x + V(x,\theta)$. Будем предполагать, что $x + V(x,\theta) \subset G$. В случае $v_1 = \dots = v_n = v$, $\rho(v,x) = \rho(v^\lambda, x)$, $\theta = (\theta^{\lambda_1}, \dots, \theta^{\lambda_n})$, $\theta \in (0,1]^n$, множество

$$V(x,\theta) = V(x,\lambda,\theta) = \bigcup_{0<v\le h} [\rho(v^\lambda, x) + v^\lambda \theta^\lambda I]$$

является гибким λ-рогом, введенным О. В. Бесовым [3].

Обозначим через $S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G)$ пространство локально суммируемых на G функций f, имеющих на G обобщенные производные $D^{l^e} f$ $(e \subseteq e_n)$, с конечной нормой

$$\|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G)} = \sum_{e\subseteq e_n} \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;G},$$

где

$$\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;G} = \|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)} = \sup_{x\in G} \left\{ \int_0^{v_{01}} \cdots \int_0^{v_{0n}} \Big[\prod_{j\in e_n} [v_j]_1^{-\frac{\varkappa_j a_j}{p_j}} \|f\|_{\mathbf{p},G_{v^\varkappa}(x)} \Big]^\tau \prod_{j\in e_n} \frac{dv_j}{v_j} \right\}^{1/\tau},$$

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}(G)} = \|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;G} = \|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\infty;G} = \sup_{\substack{x\in G,\\ v_j>0}} \Big(\prod_{j\in e_n} [v_j]_1^{-\frac{\varkappa_j a_j}{p_j}}, \|f\|_{p,G_{v^\varkappa}(x)} \Big),$$

$$\|f\|_{p,G_{v^\varkappa}(x)} = \left\{ \int\limits_{G_{v_n^{\varkappa_n}}(x_n)} \left[\dots \left\{ \int\limits_{G_{v_2^{\varkappa_2}}(x_2)} \left(\int\limits_{G_{v_1^{\varkappa_1}}(x_1)} |f(y)|^{p_1} dy_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dy_2 \right\} \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dy_n \right\}^{\frac{1}{p_n}},$$

$G_{v^\varkappa}(x) = G \cap I_{v^\varkappa}(x)$, $I_{v^\varkappa}(x) = \big\{y : |y_j - x_j| < \frac12 v_j^{\varkappa_j},\ j \in e_n\big\}$, $[v_j]_1 = \min\{1, v_j\}$, $j \in e_n$, $(v_{01}, \dots, v_{0n}) = v_0$ — фиксированный положительный вектор. При $\tau = \infty$ пространство $S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G)$ совпадает с пространством $S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}W(G)$ Соболева — Морри с доминирующими смешанными производными, изученным в [4], т. е. $S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\infty}W(G) \equiv S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}W(G)$.

Отметим ряд свойств пространств $L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$ и $S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G)$.

1. Имеют место вложения

$$L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{p}}(G), \quad S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G) \hookrightarrow S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}W(G) \hookrightarrow S^l_{\mathbf{p}}W(G),$$

т. е.

$$\|f\|_{\mathbf{p},G} \le \|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;G} \le C\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;G},$$

$$\|f\|_{S^l_{\mathbf{p}}W(G)} \le \|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa}W(G)} \le C\|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G)}.$$

2. $L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$ и $S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G)$ являются полными пространствами.

3. Для любого вещественного числа $c > 0$

$$\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},c\varkappa,\tau;G} = \frac{1}{c^{\frac{1}{\tau}}}\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;G} \quad \text{и} \quad \|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},c\varkappa,\tau}W(G)} = \frac{1}{c^{\frac{1}{\tau}}}\|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}W(G)}.$$

4. Имеют место соотношения

a) $\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{0},\varkappa,\infty;G} = \|f\|_{p,G}$; $\|f\|_{\mathbf{p},\mathbf{1},\varkappa,\tau;G} \ge \|f\|_{\infty,G}$;

b) $\|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{0},\varkappa,\infty}W(G)} = \|f\|_{S^l_pW(G)}$; $\|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{1},\varkappa,\tau}W(G)} \ge \|f\|_{S^l_\infty W(G)}$.

5. Если G — ограниченная область, $p_j \le q_j$, $\frac{1-b_j}{q_j} \le \frac{1-a_j}{p_j}$ $(j \in e_n)$, $1 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \infty$, то

$$L_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa,\tau_1}(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_2}(G).$$

Построим интегральное представление для исследования свойств функций из пространства $S^l_pW(G)$, определенных в n-мерных областях, удовлетворяющих условию гибкого рога. Пусть $1^e = \left(\delta^e_1, \delta^e_2, \dots, \delta^e_n\right)$, $\delta^e_j = 1$ при $j \in e$, $\delta^e_j = 0$ при $j \in e'$. Будем предполагать, что $f \in L^{\text{loc}}(G)$ имеет на G все обобщенные производные, которые потребуются. Введем усреднение функции f:

$$f_v(x) = \prod_{j\in e_n} v_j^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\Omega\left(\frac{y}{v}, \frac{\rho(v,x)}{v}\right) dy, \tag{1}$$

где $\Omega(y,z) = \prod\limits_{j\in e_n} \omega_j(y_j, z_j)$ введены О. В. Бесовым [3, с. 77], а ω_j определена в [3, с. 77, формула (23)]. Усреднение (1) построено по значениям f в точках $x + y \in x + V(x,\theta) \subset G$. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, $0 < \varepsilon_j < h_j$ $(j \in e_n)$. Тогда справедливо равенство

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{e\subseteq e_n} (-1)^{|1^e|} \int\limits_{\varepsilon^e}^{h^e} D^{1^e}_v f_{v^e+h^{e'}}(x)\, dv^e. \tag{2}$$

Дифференцируя по $v_j, j \in e$, в силу [3, с. 77, формулы (26), (27)] получаем

$$D^{1^e}_v f_{v^e+h^{e'}}(x) = \prod_{j\in e_n} \frac{\partial}{\partial v_j} f_{v^e+h^{e'}}(x) = (-1)^{|1^e|} \prod_{j\in e'} h_j^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{j\in e_n} v_j^{-2} K_e^{(k^e+1^e)}$$
$$\times\left(\frac{y}{v^e+h^{e'}}, \frac{\rho(v^e+h^{e'},x)}{v^e+h^{e'}}, \rho'(v^e+h^{e'},x)\right) f(x+y)\, dy, \tag{3}$$

где

$$K_e(x,y,z) = \prod_{j\in e'} \omega_j(x_j,y_j) \prod_{j\in e} \zeta_j(x_j,y_j,z_j) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n),$$

ζ_j определена в [3, с. 77, формула (27)] и

$$K_e^{(\alpha)}(x,y,z) = D_x^{(\alpha)} K_e(x,y,z), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_e^{(\alpha)}(x,y,z)\, dx = 0 \text{ для всех } y,z,\alpha \text{ при } |\alpha| > 0.$$

В силу (2) из (3) получаем

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{e\subseteq e_n} \prod_{j\in e'} h_j^{-1} \int\limits_{\varepsilon^e}^{h^e} \prod_{j\in e} v_j^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_e^{(k^e+1^e)}$$
$$\times\left(\frac{y}{v^e+h^{e'}}, \frac{\rho(v^e+h^{e'},x)}{v^e+h^{e'}}, \rho'(v^e+h^{e'},x)\right) f(x+y)\, dy dv^e. \tag{4}$$

Тогда с учетом замечания к лемме 5.2 из [3] будем иметь: если $f \in L^{\mathrm{loc}}(G)$, $1 \le p < \infty$, $\varepsilon_j \to 0$ $(j \in e_n)$, то $f_\varepsilon(x) \to f(x)$; кроме того, при $p > 1$ на основании замечания к теореме 1.7 из [3] $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ для почти всех $x \in G$. Тогда из (4) следует, что

$$f(x) = \sum_{e \subseteq e_n} (-1)^{|l^e|} \prod_{j \in e'} h_j^{-1} \int\limits_{0^e}^{h^e} \prod_{j \in e} v_j^{-2+l_j} \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} M_e\left(\frac{y}{v^e + h^{e'}}, \frac{\rho(v^e + h^{e'}, x)}{v^e + h^{e'}}, \rho'(v^e + h^{e'}, x)\right) D^{l^e} f(x+y)\, dy dv^e, \quad (5)$$

где $M_e(x,y,z) = D_x^{k^e + 1^e - l^e} K_e(x,y,z)$, причем $l_j \le k_j$ при $j \in e$, так как числа k_j, входящие в ядро Ω, мы можем выбрать сколь угодно большими. Предположим, что $\rho_j(v_j, x)$, $\rho'_j(v_j, x)$ как функции от (v_j, x) локально суммируемы на $(0, h_j] \times U$, $j \in e_n$, где $U \subset G$ — открытое множество. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in N_0^n$, причем $l_j \le \nu_j + k_j$ при $j \in e$, $l_j \le \nu_j$ при $j \in e'$. Применяя к обеим частям (4) операцию дифференцирования D_x^ν (причем в слагаемых, стоящих справа, дифференцирование переносим на ядро), получим

$$f_\varepsilon^{(\nu)}(x) = \sum_{e \subseteq e_n} (-1)^{|\nu| + |l^e|} \prod_{j \in e'} h_j^{-1} \int\limits_{\varepsilon^e}^{h^e} \prod_{j \in e} v_j^{-2-\nu_j+l_j} \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} M_e^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^e + h^{e'}}, \frac{\rho(v^e + h^{e'}, x)}{v^e + h^{e'}}, \rho'(v^e + h^{e'}, x)\right) D^{l^e} f(x+y)\, dy dv^e. \quad (6)$$

Покажем теперь, что если выполнены неравенства

$$\mu_j = l_j - \nu_j > 0, \quad j \in e_n, \quad (7)$$

то на G существует обобщенная производная $D^\nu f \in L_p(G)$. Установим сначала, что

$$f_\varepsilon^{(\nu)} - f_\eta^{(\nu)} \to 0 \quad \text{при } 0 < \varepsilon_j < \eta_j \to 0,\ j \in e_n, \quad (8)$$

в $L^{\mathrm{loc}}(U)$.

Пусть $F \subset U$ — компакт. Тогда $F + TI \subset U$ при некотором $T > 0$. Пусть $M^{(\nu)}(x) = \max\limits_{e \subseteq e_n} \max\limits_{y,z \in I} \left|M_e^{(\nu)}(x,y,z)\right|$. В силу неравенства Минковского при достаточно малых ε, $h = \eta$ имеем

$$\left\| f_\varepsilon^{(\nu)} - f_\eta^{(\nu)} \right\|_{1, F+TI} \le C \sum_{e \subseteq e_n} \prod_{j \in e} \eta_j^{\mu_j} \|D^{l^e} f\|_{1, F+TI}.$$

Отсюда ввиду (7) вытекает (8). Предположим, что производная $D^\nu f$ существует на G, т. е. имеет место

$$f_v^{(\nu)}(x) = D^\nu f(x)$$

при $x + cvI \subset G$ с некоторым $c = (c_1, \dots, c_n) > 0$. Перейдем в (6) к пределу при $\varepsilon_j \to 0$ $(j \in e_n)$, существующему в смысле $L^{\mathrm{loc}}(U)$ в силу (7) и почти всюду на U ввиду соотношения $f_v(x) \to f(x)$ при $v_j \to 0$ $(j \in e_n)$, примененного к $D^\nu f$. Тогда для почти всех $x \in U$ будем иметь равенство

$$D^\nu f(x) = \sum_{e \subseteq e_n} (-1)^{|\nu| + |l^e|} \prod_{j \in e'} h_j^{-1-\nu_j} \int\limits_{0^e}^{h^e} \prod_{j \in e} v_j^{-2-\nu_j+l_j} \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} M_e^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^e + h^{e'}}, \frac{\rho(v^e + h^{e'}, x)}{v^e + h^{e'}}, \rho'(v^e + h^{e'}, x)\right) D^{l^e} f(x+y)\, dy dv^e. \quad (9)$$

Напомним, что гибкий рог $x + V(x,\theta)$ является носителем представления (9) при $x \in U$. Для ядер M_e и $M_e^{(\nu)}$ можно считать, что при всех α, β имеют место соотношения

$$\int D_x^{\alpha} M_e(x,y,z)\,dx = 0, \quad \int D_x^{\beta} M_e^{(\nu)}(x,y,z)\,dx = 0$$

при всех $e \subseteq e_n$.

Для доказательства основных теорем нам понадобятся некоторые вспомогательные неравенства, приводимые в сформулированных ниже леммах. Выберем функцию $\varphi(\cdot,y,z) \in C_0^{\infty}$ таким образом, чтобы

$$S(\varphi) = \operatorname{supp}\varphi \subset I_1 = \{y : |y_j| < 1/2,\ j \in e_n\}.$$

Положим $V = \bigcup\limits_{\substack{0<v_j\le h_j,\\ j\in e_n}} \bigl\{y : \bigl(\frac{y}{v^e+h^{e'}}\bigr) \in S(\varphi)\bigr\}$; ясно, что $V \subset I_h = \{x : |x_j| < \frac{1}{2}h_j, j \in e_n\}$. Пусть U — открытое множество, содержащееся в области G; в дальнейшем всегда будем считать, что $U + V \subset G$. Пусть

$$G_{h^{\varkappa}}(U) = \bigcup_{x\in U} G_{h^{\varkappa}}(x) = (U + I_{h^{\varkappa}}) \cap G.$$

Очевидно, если $\mathbf{0} < \varkappa$, $h \le 1$, то $I_h \subset I_{h^{\varkappa}}$, и тем самым $U + V \subset G_{h^{\varkappa}}(U) = Q$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \mathbf{q} \le \mathbf{r} \le \infty$; $\mathbf{0} < \varkappa \le \mathbf{1}$; $\mathbf{0} < v$, $\boldsymbol{\eta} \le \mathbf{h} \le \mathbf{1}$; $\mathbf{0} < \boldsymbol{\gamma} < \infty$; $1 \le \tau \le \infty$; $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$, $\nu_j \ge 0$ *целые* ($j \in e_n$), $\Phi \in L_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}(G)$,

$$\varepsilon_j = l_j - \nu_j - (1 - \varkappa_j a_j)\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right),$$

$$A_\eta^e(x) = \prod_{j\in e'} h_j^{-1-\nu_j} \int\limits_{0^e}^{\eta^e} \prod_{j\in e} \frac{dv_j}{v_j^{2+\nu_j-l_j}} \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{y}{v^e+h^{e'}}, \frac{\rho(v^e+h^{e'},x)}{v^e+h^{e'}}, \rho'(v^e+h^{e'},x)\right)\Phi(x+y)\,dy, \quad (10)$$

$$A_{\eta,h}^e(x) = \prod_{j\in e'} h_j^{-1-\nu_j} \int\limits_{\eta^e}^{h^e} \prod_{j\in e} \frac{dv_j}{v_j^{2+\nu_j-l_j}} \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{y}{v^e+h^{e'}}, \frac{\rho(v^e+h^{e'},x)}{v^e+h^{e'}}, \rho'(v^e+h^{e'},x)\right)\Phi(x+y)\,dy. \quad (11)$$

Тогда

$$\sup_{\bar{x}\in U} \|A_\eta^e\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})} \le C_1 \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;Q} \prod_{j\in e'} h_j^{-\nu_j-(1-\varkappa_j a_j)(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})} \times \prod_{j\in e_n} [\gamma_j]_1^{\frac{\varkappa_j a_j}{q_j}} \prod_{j\in e} \eta_j^{\varepsilon_j} \quad (\varepsilon_j > 0); \quad (12)$$

$$\sup_{\bar{x}\in U}\|A^e_{\eta,h}\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})} \le C_2\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;Q}\prod_{j\in e'} h_j^{-\nu_j-(1-\varkappa_j a_j)(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}$$

$$\times\prod_{j\in e_n}[\gamma_j]_1^{\frac{\varkappa_j a_j}{q_j}}\begin{cases}\prod\limits_{j\in e} h_j^{\varepsilon_j} & \text{при } \varepsilon_j>0,\\ \prod\limits_{j\in e}\ln\frac{h_j}{\eta_j} & \text{при } \varepsilon_j=0,\\ \prod\limits_{j\in e}\eta_j^{\varepsilon_j} & \text{при } \varepsilon_j<0.\end{cases} \tag{13}$$

Здесь $U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})=\left\{x:|x_j-\bar{x}_j|<\frac{1}{2}\gamma_j^{\varkappa_j},\ j\in e_n\right\}$ *и* C_1, C_2 *— константы, не зависящие от* Φ, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\eta}$ *и* $\mathbf{h}$.

Доказательство. Пусть сначала $p_1=p_2=\dots=p_n=p$, $q_1=q_2=\dots=q_n=q$ и $r_1=r_2=\dots=r_n=r$. Применяя обобщенное неравенство Минковского, для любого $\bar{x}\in U$ получим

$$\left\|A^e_{\eta}\right\|_{q,U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})} \le C\prod_{j\in e'}h_j^{-1-\nu_j}\int\limits_{0^e}^{\eta^e}\|F(\cdot,v^e+h^{e'})\|_{q,U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})}\prod_{j\in e}\frac{dv_j}{v_j^{2+\nu_j-l_j}}, \tag{14}$$

где

$$F(x,v^e+h^{e'})=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{y}{v^e+h^{e'}},\frac{\rho(v^e+h^{e'},x)}{v^e+h^{e'}},\rho'(v^e+h^{e'},x)\right)\Phi(x+y)\,dy.$$

Оценим норму $\|F(\cdot,v^e+h^{e'})\|_{q,U_{\rho^{\varkappa}}(\bar{x})}$. В силу неравенства Гёльдера ($q\le r$) имеем

$$\|F(\cdot,v^e+h^{e'})\|_{q,U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})}\le\|F(\cdot,v^e+h^{e'})\|_{r,U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})}\prod_{j\in e_n}\gamma_j^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})\varkappa_j}. \tag{15}$$

Пусть χ — характеристическая функция множества $S(\varphi)$. Учитывая, что $1\le p\le r\le\infty$, $s\le r$ (так как $\frac{1}{s}=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$) и

$$|\Phi\varphi|=(|\Phi|^p|\varphi|^s)^{1/r}(|\Phi|^p\chi)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}(|\varphi|^s)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}},$$

и снова применяя неравенство Гёльдера, для $|F|$ (в силу $\frac{1}{r}+(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})+(\frac{1}{s}-\frac{1}{r})=1$) будем иметь

$$|F(x,v^e+h^{e'})|$$
$$\le\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Phi(x+y)|^p\left|\varphi\left(\frac{y}{v^e+h^{e'}},\frac{\rho(v^e+h^{e'},x)}{v^e+h^{e'}},\rho'(v^e+h^{e'},x)\right)\right|^s dy\right)^{1/r}$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Phi(x+y)|^p\chi(y:(v^e+h^{e'}))\,dy\right)^{1/p-1/r}$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\varphi\left(\frac{y}{v^e+h^{e'}},\frac{\rho(v^e+h^{e'},x)}{v^e+h^{e'}},\rho'(v^e+h^{e'},x)\right)\right|^s dy\right)^{1/s-1/r}.$$

Отсюда получаем

$$
\|F(\cdot, v^e + h^{e'})\|_{r,U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} \le \sup_{\bar{x}\in U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} \biggl(\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x+y)|^p \chi\biggl(\frac{y}{v^e + h^{e'}}\biggr)\, dy\biggr)^{1/p-1/r}
$$

$$
\times \sup_{y\in V} \biggl(\int_{U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} |\Phi(x+y)|^p\, dx\biggr)^{1/r}
$$

$$
\times \biggl(\int_{\mathbb{R}^n} \biggl|\varphi\biggl(\frac{y}{v^e + h^{e'}}, \frac{\rho(v^e + h^{e'}, x)}{v^e + h^{e'}}, \rho'(v^e + h^{e'}, x)\biggr)\biggr|^s\, dy\biggr)^{1/s}. \quad (16)
$$

Очевидно, если $\mathbf{0} < \varkappa$ и $v \le \mathbf{1}$, то $Q_{v^e + h^{e'}}(x) \subset Q_{(v^\varkappa)^e + (h^\varkappa)^{e'}}(x)$. Для любого $x \in U$ имеем

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x+y)|^p \chi\biggl(\frac{y}{v^e + h^{e'}}\biggr)\, dy \le \int_{Q_{(v^\varkappa)^e + (h^\varkappa)^{e'}}(x)} |\Phi(y)|^p\, dy
$$

$$
\le \|\Phi\|_{p,a,\varkappa;Q} \prod_{j\in e'} h_j^{\varkappa_j a_j} \prod_{j\in e} v_j^{\varkappa_j a_j}. \quad (17)
$$

При $y \in V$ выполняется

$$
\int_{U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} |\Phi(x+y)|^p\, dx \le \int_{Q_{\gamma^\varkappa}(\bar{x}+y)} |\Phi(x)|^p\, dx \le \|\Phi\|^p_{p,a,\varkappa;Q} \prod_{j\in e_n} [\gamma_j]_1^{\varkappa_j a_j}, \quad (18)
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \biggl|\varphi\biggl(\frac{y}{v^e + h^{e'}}, \frac{\rho(v^e + h^{e'}, x)}{v^e + h^{e'}}, \rho'(v^e + h^{e'}, x)\biggr)\biggr|^s\, dy = \prod_{j\in e'} h_j \prod_{j\in e} v_j \|\Phi\|_s^s. \quad (19)
$$

Из (15)–(19) следует, что

$$
\|F(\cdot, v^e + h^{e'})\|_{q,U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} \le C\|\Phi\|_{p,a,\varkappa;Q} \prod_{j\in e'} h_j^{1-(1-\varkappa_j a_j)(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}
$$

$$
\times \prod_{j\in e} v_j^{1-(1-\varkappa_j a_j)(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \prod_{j\in e_n} \gamma_j^{\varkappa_j(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \prod_{j\in e_n} [\gamma_j]_1^{\frac{\varkappa_j a_j}{r}}. \quad (20)
$$

Учитывая неравенство $\|\cdot\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;G} \le C\|\cdot\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;G}$ и последовательно применяя неравенство (20) по каждой переменной в отдельности, получаем следующее неравенство для векторов $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$:

$$
\|F(\cdot, v^e + h^{e'})\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} \le C_1\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;Q} \prod_{j\in e'} h_j^{1-(1-\varkappa_j a_j)(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{r_j})}
$$

$$
\times \prod_{j\in e} v_j^{1-(1-\varkappa_j a_j)(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{r_j})} \prod_{j\in e_n} \gamma_j^{\varkappa_j(\frac{1}{q_j}-\frac{1}{r_j})} \prod_{j\in e_n} [\gamma_j]_1^{\frac{\varkappa_j a_j}{r_j}}.
$$

Подставляя это неравенство в (14), имеем

$$
\bigl\|A_\eta^e\bigr\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} \le C_2\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau;Q} \prod_{j\in e'} h_j^{-\nu_j-(1-\varkappa_j a_j)(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{r_j})}
$$

$$
\times \prod_{j\in e_n} \gamma_j^{\varkappa_j(\frac{1}{q_j}-\frac{1}{r_j})} \prod_{j\in e_n} [\gamma_j]_1^{\varkappa_j \frac{a_j}{r_j}} \prod_{j\in e} \eta_j^{l_j-\nu_j-(1-\varkappa_j)(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{r_j})}. \quad (21)
$$

Используя в неравенстве (21) $r_j = q_j$ $(j \in e_n)$, получаем неравенство (12). Аналогично доказывается неравенство (13).

Следствие 1. *Полагая в неравенстве* (20) $\mathbf{r} = \infty$ *при* $\mathbf{0} < \boldsymbol{\gamma} \leq \mathbf{1}$ *и* $\mathbf{r} = \mathbf{q}$ *при* $\boldsymbol{\gamma} > \mathbf{1}$, *получаем*

$$\sup_{\bar{x}\in U} \|F\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})} \leq C\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q} \prod_{j\in e_n} [\gamma_j]_1^{\varkappa_j \frac{1}{q}},$$

т. е.

$$\|F\|_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa;U} \leq C\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q},$$

где $b \in [0,1]^n$, *откуда при* $1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \infty$ *приходим к неравенству*

$$\|F\|_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa,\tau_2;U} \leq C\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;Q}. \tag{22}$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{q} < \infty; \mathbf{0} < \boldsymbol{\varkappa} \leq \mathbf{1}$; $\mathbf{0} < \mathbf{h} \leq \mathbf{1}$; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu_j \geq 0$ — *целые* ($j \in e_n$); $1 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \infty$, $\varepsilon_j > 0$ *и*

$$\varepsilon_{j,0} = l_j - \nu_j - (1 - \varkappa_j a_j)\frac{1}{p_j}.$$

Тогда для любой функции $A_h^e(x)$, *определенной равенством* (10), *справедлива оценка*

$$\left\|A_h^e\right\|_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa,\tau_2;U} \leq C\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;Q}, \tag{23}$$

где $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, b_j — *произвольное число, удовлетворяющее неравенствам:*

$$\begin{gathered} 0 \leq b_j \leq 1, \quad \text{если } \varepsilon_{j,0} > 0 \text{ при } j \in e, \\ 0 \leq b_j < 1, \quad \text{если } \varepsilon_{j,0} = 0 \text{ при } j \in e \text{ и } 0 \leq b_j \leq a_j \text{ при } j \in e'; \\ 0 \leq b_j < 1 + \frac{\varepsilon_{j,0} q_j (1-a_j)}{1-\varkappa_j a_j} = a_j + \frac{\varepsilon_j q_j (1-a_j)}{1-\varkappa_j a_j}, \quad \text{если } \varepsilon_j < 0 \text{ при } j \in e, \end{gathered} \tag{24}$$

где C — *константа, не зависящая от* Φ.

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathbf{0} < \gamma < \mathbf{h}$. Тогда

$$\left\|A_h^e\right\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})} \leq \left\|A_\gamma^e\right\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})} + \left\|A_{\gamma h}^e\right\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})}. \tag{25}$$

В силу неравенства (12) ($\eta_j = \gamma_j, j \in e_n, \tau = \infty$) выполняется

$$\left\|A_\gamma^e\right\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})} \leq C_1\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q} \prod_{j\in e'} \gamma_j^{\varkappa_j \frac{a_j}{q_j}} \prod_{j\in e} \gamma_j^{\varepsilon_j + \varkappa_j \frac{a_j}{q_j}}, \tag{26}$$

где C_1 — константа, не зависящая от Φ и $\boldsymbol{\gamma}$.

Далее, из (11) на основании обобщенного неравенства Минковского и неравенства (13) ($\eta_j = \gamma_j$, $j \in e_n$, $\tau = \infty$) имеем

$$\left\|A_{\gamma,h}^e\right\|_{\mathbf{q},U_{\gamma^{\varkappa}}(\bar{x})} \leq C_2\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q}\psi(\gamma,h;r); \tag{27}$$

здесь C_2 — константа, не зависящая от Φ и $\boldsymbol{\gamma}$,

$$\psi(\gamma,h;r) = \prod_{j\in e_n} \gamma_j^{\delta_j(r_j)} \int_{\gamma^e}^{h^e} \prod_{j\in e} v_j^{\varepsilon_j(r_j)-1} dv^e,$$

$$\delta_j(r_j) = \frac{\varkappa_j}{q_j} - \frac{\varkappa_j}{r_j}(1-a_j), \quad \varepsilon_j(r_j) = l_j - \nu_j - (1-\varkappa_j a_j)\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{r_j}\right).$$

После этого выберем r_j, $q_j \le r_j \le \infty$ $(j \in e_n)$ так, чтобы показатель степени γ_j в оценке (27) был максимальным. Для этого заметим, что $\delta_j(r_j)$ монотонно возрастает, а $\varepsilon_j(r_j)$ монотонно убывает на $[q_j, \infty]$, причем $\varepsilon_j(q_j) = \varepsilon_j$, $\varepsilon_j(\infty) = \varepsilon_{j,0}$ $(j \in e_n)$.

Рассмотрим случаи $\varepsilon_{j,0} \ge 0$ и $\varepsilon_{j,0} < 0$. Если $\varepsilon_{j,0} \ge 0$, то максимальный показатель γ_j в оценке (27) мы получим при $r_j = \infty$ и $\delta_j(\infty) = \frac{\varkappa_j}{q_j}$. В этом случае

$$\psi(\gamma, h; r) = \begin{cases} \prod\limits_{j\in e_n} \gamma_j^{\frac{\varkappa_j}{q_j}} \prod\limits_{j\in e} \frac{1}{\varepsilon_{j,0}} (\prod\limits_{j\in e} h_j^{\varepsilon_{j,0}} - \prod\limits_{j\in e} \gamma_j^{\varepsilon_{j,0}}), & \text{если } \varepsilon_{j,0} > 0, \\ \prod\limits_{j\in e_n} \gamma_j^{\frac{\varkappa_j}{q_j}} \prod\limits_{j\in e} \ln \frac{h_j}{\gamma_j}, & \text{если } \varepsilon_{j,0} = 0. \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon_{j,0} < 0$. Так как $\varepsilon_j(q_j) = \varepsilon_j > 0$, $\varepsilon_j(\infty) < 0$, то при некотором $r_{j,0}$, $q_j < r_{j,0} < \infty$, выполняется $\varepsilon_j(r_{j,0}) = 0$. Вычислениями убеждаемся, что наилучшая оценка в этом случае получается, если в $\psi(\gamma, h; r)$ положить $r_j = r_{j,0}$. Тогда

$$\psi(\gamma, h; r_0) = \prod_{j\in e_n} \gamma_j^{\delta_j(r_{j,0})} \prod_{j\in e} \ln \frac{h_j}{\gamma_j}, \tag{28}$$

где

$$\delta_j(r_{j,0}) = \frac{\varkappa_j}{q_j}\left(1 + \frac{\varepsilon_{j,0} q_j (1 - a_j)}{1 - \varkappa_j a_j}\right) = \frac{\varkappa_j}{q_j}\left(a_j + \frac{\varepsilon_j q_j (1 - a_j)}{1 - \varkappa_j a_j}\right)$$

(здесь $1 - \varkappa_j a_j > 0$, поскольку $\varepsilon_j > 0$, $\varepsilon_{j,0} < 0$).

Заметив, что

$$\varepsilon_j + \frac{\varkappa_j a_j}{q_j} \ge \varkappa_j \frac{1}{q_j} \quad \text{при } \varepsilon_{j,0} \ge 0, \quad \varepsilon_j + \frac{\varkappa_j a_j}{q_j} \ge \delta_j(\varepsilon_{j,0}) \quad \text{при } \varepsilon_{j,0} < 0,$$

на основании (25)–(28) получаем

$$\left\|A_h^e\right\|_{\mathbf{q}, U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} \le C_3 \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q} \begin{cases} \prod\limits_{j\in e'} \gamma_j^{\varkappa_j \frac{a_j}{q_j}} \prod\limits_{j\in e} \gamma_j^{\varkappa_j \frac{1}{q_j}} \prod\limits_{j\in e} h_j^{\varepsilon_{j,0}} & \text{при } \varepsilon_{j,0} > 0, \\ \prod\limits_{j\in e'} \gamma_j^{\varkappa_j \frac{a_j}{q_j}} \prod\limits_{j\in e} \gamma_j^{\varkappa_j \frac{1}{q_j}} \prod\limits_{j\in e} \ln \frac{h_j}{\gamma_j} & \text{при } \varepsilon_{j,0} = 0, \\ \prod\limits_{j\in e'} \gamma_j^{\varkappa_j \frac{a_j}{q_j}} \prod\limits_{j\in e} \gamma_j^{\delta_j(r_{j,0})} \prod\limits_{j\in e} \ln \frac{h_j}{\gamma_j} & \text{при } \varepsilon_{j,0} < 0. \end{cases} \tag{29}$$

Пусть теперь $\gamma_j \ge h_j$ $(j \in e_n)$. Применяя снова оценку (12), имеем

$$\left\|A_h^e\right\|_{\mathbf{q}, U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} \le C_4 \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q} \begin{cases} \prod\limits_{j\in e'} \gamma_j^{\varkappa_j \frac{a_j}{q_j}} \prod\limits_{j\in e} \gamma_j^{\varepsilon_j + \varkappa_j \frac{a_j}{q_j}} & \text{при } h_j \le \gamma_j < 1, \\ \prod\limits_{j\in e} h_j^{\varepsilon_j} & \text{при } \gamma_j > 1. \end{cases} \tag{30}$$

Из неравенств (29) и (30) следует, что при любом $\bar{x} \in U$ и любом γ_j, $0 < \gamma_j < \infty$ $(j \in e_n)$, выполняется

$$\left\|A_h^e\right\|_{\mathbf{q}, U_{\gamma^\varkappa}(\bar{x})} \le C_5 \|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q} \prod_{j\in e_n} [\gamma_j]_1^{\varkappa_j \frac{b_j}{q_j}}, \tag{31}$$

где $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, b_j — любое число, удовлетворяющее неравенствам (24), а константа C_5 не зависит от Φ, $\boldsymbol{\gamma}$, $\bar{x}$.

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\left\|A_h^e\right\|_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa,U} \le C\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa;Q},$$

и, следовательно, при $1 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \infty$ имеем

$$\left\|A_h^e\right\|_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa,\tau_2;U} \le C\|\Phi\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;Q}.$$

Теорема 1. *Пусть открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию гибкого рога, $\mathbf{1} \le \mathbf{p} \le \mathbf{q} \le \infty$; $\bar{\varkappa} = c\varkappa$, где $\frac{1}{c} = \max\limits_{1\le j\le n} l_j \varkappa_j$; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu_j \ge 0$ целые $(j \in e_n)$; $1 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \infty$; $\varepsilon_j > 0$ $(j \in e_n)$; $f \in S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}W(G)$.*

Тогда

$$D^\nu : S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}W(G) \hookrightarrow L_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa,\tau_2}(G), \quad D^\nu : S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}W(G) \hookrightarrow S^{l^1}_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa,\tau_2}W(G)$$

и справедливы неравенства

$$\|D^\nu f\|_{\mathbf{q},G} \le C_1 \sum_{e\subseteq e_n} \prod_{j\in e_n} h_j^{s_{e,j}} \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;G}, \tag{32}$$

$$\|D^\nu f\|_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa,\tau_2;G} \le C_2 \|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}W(G)} \quad (\mathbf{p} \le \mathbf{q} < \infty), \tag{33}$$

где

$$s_{e,j} = \begin{cases} \varepsilon_j & \text{при } j \in e, \\ -\nu_j - (1 - \varkappa_j a_j)\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) & \text{при } j \in e'. \end{cases}$$

Если $\varepsilon_j - l_j^1 > 0$ $(j \in e_n)$, то

$$\|D^\nu f\|_{S^{l^1}_{\mathbf{q}}W(G)} \le C_3 \sum_{e\subseteq e_n} \prod_{j\in e'} h_j^{s_{e,j}} \prod_{j\in e} h_j^{s_{e,j}-l_j^1} \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;G}, \tag{34}$$

$$\|D^\nu f\|_{S^{l^1}_{\mathbf{q},\mathbf{b},\varkappa,\tau_2}W(G)} \le C_4 \|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}W(G)} \quad (p \le q < \infty), \tag{35}$$

причем $0 < \mathbf{h} \le \min(\mathbf{1}, \mathbf{h}_0)$, C_1–C_4 — константы, не зависящие от f, а C_1 и C_3 не зависят также от $\mathbf{h}$.

В частности, если $\varepsilon_{j,0} > 0$ $(j \in e_n)$, то $D^\nu f$ непрерывна на G и

$$\sup_{x\in G} |D^\nu f| \le C_1 \sum_{e\subseteq e_n} \prod_{j\in e_n} h_j^{s^0_{e,j}} \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1;G},$$

где

$$s^0_{e,j} = \begin{cases} \varepsilon_{j,0} & \text{при } j \in e, \\ -\nu_j - (1 - \varkappa_j a_j)\frac{1}{p_j} & \text{при } j \in e'. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $\bar{\varkappa} = c\varkappa$, $c > 0$, мы можем считать, что $f \in S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\bar{\varkappa},\tau_1}W(G)$, и всюду в неравенствах (32)–(35) и в выражениях для ε_j, $s_{e,j}$ при $j \in e_n$ заменить $\varkappa$ на $\bar{\varkappa}$. Именно такие неравенства мы и будем доказывать (чем больше $\varkappa$, тем больше $\boldsymbol{\varepsilon}$).

В условиях теоремы существует обобщенная производная $D^\nu f$. Действительно, пусть $\varepsilon_j > 0$ и поэтому $l_j - \nu_j > 0$ $(j \in e_n)$; так как $\mathbf{p} \le \mathbf{q}$, $0 \le \mathbf{a} \le \mathbf{1}$ и $\bar{\varkappa} \le \mathbf{1}$, $f \in S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\bar{\varkappa},\tau_1}W(G) \hookrightarrow S^l_{\mathbf{p}}W(G)$, то на G существует $D^\nu f$, принадлежащая

$L_p(G)$. Тогда для почти каждой точки $x \in G$ справедливо интегральное тождество (9) с теми же ядрами. Отсюда на основании неравенства Минковского имеем

$$\|D^{\nu} f\|_{\mathbf{q},G} \leq C \sum_{e \subseteq e_n} \|A_h^e\|_{\mathbf{q},G}.$$

С помощью неравенства (12) при $U = G$, $\varphi = M_e^{(\nu)}$, $\Phi = D^{l^e} f$, $\boldsymbol{\gamma} \to \infty$ получим неравенство (32).

Для доказательства неравенства (34) в тождестве (9) вместо ν возьмем $\nu + l_j^{1e}$. Снова с учетом неравенства (12) при $U = G$, $\varphi = M_e^{(\nu + l_j^1)}$, $\Phi = D^{l^e} f$, $\boldsymbol{\gamma} \to \infty$ получим

$$\|D^{\nu + l^{1e}} f\|_{\mathbf{q},G} \leq C_1 \sum_{e \subseteq e_n} \prod_{j \in e'} h_j^{-\nu_j - (1 - \varkappa_j a_j)(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \prod_{j \in e} h_j^{\varepsilon_j - l_j^1} \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\bar{\boldsymbol{\varkappa}},\tau_1;G},$$

следовательно,

$$\|D^{\nu} f\|_{S_{\mathbf{q}}^{l^1} W(G)} \leq C_2 \sum_{e \subseteq e_n} \prod_{j \in e'} h_j^{s_{e,j}} \prod_{j \in e} h_j^{s_{e,j} - l_j^1} \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\bar{\boldsymbol{\varkappa}},\tau_1;G}.$$

Аналогичным образом на основании неравенств (22) и (23) устанавливаются оценки (33) и (35).

Пусть теперь $\varepsilon_{j,0} > 0$ $(j \in e_n)$. Покажем, что $D^{\nu} f$ непрерывна на G. На основании тождества (9) с учетом неравенства (32) при $\mathbf{q} = \infty$, $\varepsilon_j = \varepsilon_{j,0} > 0$ $(j \in e_n)$ имеем

$$\|D^{\nu} f - D^{\nu} f_h\|_{\infty,G} \leq \sum_{\substack{e \subseteq e_n, \\ e \neq \varnothing}} \|A_h^e\|_{\infty,G} \leq C \sum_{\substack{e \subseteq e_n, \\ e \neq \varnothing}} \prod_{j \in e} h_j^{\varepsilon_{j,0}} \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p},\mathbf{a},\bar{\boldsymbol{\varkappa}},\tau_1;G},$$

$$\lim_{\substack{h_j \to 0, \\ j \in e}} \|D^{\nu} f - D^{\nu} f_h\|_{\infty,G} = 0.$$

Так как $D^{\nu} f_h$ непрерывна на G, сходимость в $L_{\infty}(G)$ совпадает в данном случае с равномерной сходимостью и, следовательно, $D^{\nu} f$ непрерывна на G.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть область G, векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\varkappa$ и параметры τ_1, τ_2 удовлетворяют условиям теоремы 1 и $f \in S_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}^{l} W(G)$.*

Если $\varepsilon_j > 0$ $(j \in e_n)$, то производная $D^{\nu} f$ удовлетворяет на G в метрике L_q условию Гёльдера с показателем β_j^1, точнее

$$\|\Delta(t,G) D^{\nu} f\|_{\mathbf{q},G} \leq C \|f\|_{S_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau}^{l} W(G)} \prod_{j \in e_n} |t_j|^{\beta_j^1}, \tag{36}$$

где β_j^1 $(j \in e_n)$ — любое число, удовлетворяющее неравенствам:

$$\begin{cases} 0 \leq \beta_j^1 \leq 1, & \text{если } \varepsilon_j > 1 \text{ при } j \in e, \\ 0 \leq \beta_j^1 < 1, & \text{если } \varepsilon_j = 1 \text{ при } j \in e \text{ и } 0 \leq \beta_j^1 \leq 1 \text{ при } j \in e', \\ 0 \leq \beta_j^1 \leq \varepsilon_j, & \text{если } \varepsilon_j < 1 \text{ при } j \in e. \end{cases} \tag{37}$$

Если $\varepsilon_{j,0} > 0$ $(j \in e_n)$, то

$$\sup_{x \in G} |\Delta(t,G) D^{\nu} f| \leq C \|f\|_{S_{\mathbf{p},\mathbf{a},\varkappa,\tau_1}^{l} W(G)} \prod_{j \in e_n} |t_j|^{\beta_{j,0}^1}, \tag{38}$$

где $\beta^1_{j,0}$ удовлетворяют тем же условиям, что β^1_j, но с заменой ε_j на $\varepsilon_{j,0}$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, мы можем в дальнейшем заменить вектор $\varkappa$ на $\bar{\varkappa}$. Пусть t — n-мерный вектор. Согласно лемме 8.6 в [3, с. 102] существует область $G_\sigma \subset G$ ($\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_j = \xi_j r(x)$, $\xi_j > 0$, $r(x) = \operatorname{dist}(x, \partial G)$, $x \in G$).

Предположим, что $|t_j| < \sigma_j$ ($j \in e_n$). Тогда для любых $x \in G_\sigma$ отрезок, соединяющий точки x и $x + t$, содержится в G. Для всех точек этого отрезка справедливо тождество (9) с одними и теми же ядрами. После несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned}
|\Delta(t, G) D^\nu f| &\le C_1 \sum_{e \subseteq e_n} \prod_{j \in e'} h_j^{-1-\nu_j} \int_0^{|t_1^e|} \cdots \int_0^{|t_n^e|} \prod_{j \in e} \frac{dv_j}{v_j^{2+\nu_j - l_j}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}^n} \left| M_e^{(\nu)}\left(\frac{y}{v^e + h^{e'}}, \frac{\rho(v^e + h^{e'}, x)}{v^e + h^{e'}}, \rho'(v^e + h^{e'}, x) \right) \right| |\Delta(t, G) D^{l^e} f(x+y)|\, dy \\
&+ C_2 \sum_{e \subseteq e_n} \prod_{j \in e'} h_j^{-2-\nu_j} \prod_{j \in e_n} |t_j| \int_{|t_1^e|}^{h_1^e} \cdots \int_{|t_n^e|}^{h_n^e} \prod_{j \in e} \frac{dv_j}{v_j^{3+\nu_j - l_j}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}^n} \left| M_e^{(\nu+1)}\left(\frac{y}{v^e + h^{e'}}, \frac{\rho(v^e + h^{e'}, x)}{v^e + h^{e'}}, \rho'(v^e + h^{e'}, x) \right) \right| \\
&\times \int_0^1 |D^{l^e} f(x + y + t_1 u_1 + \dots + t_n u_n)|\, du dy \\
&= C_1 \sum_{e \subseteq e_n} A_t^e(x, t) + C_2 \sum_{e \subseteq e_n} A_{t,h}^e(x, t),
\end{aligned} \tag{39}$$

где $\mathbf{0} < \mathbf{h} \le \min(\mathbf{1}, \mathbf{h}_0)$. Считаем также, что $|t_j| < h_j$ ($j \in e_n$) и, следовательно, $|t_j| < \min(\sigma_j, h_j)$ ($j \in e_n$). Если $x \in G \backslash G_\sigma$, то по определению

$$\Delta(t, G) D^\nu f(x) = 0.$$

На основании (39)

$$\begin{aligned}
\|\Delta(t, G) D^\nu f\|_{\mathbf{q}, G} &= \|\Delta(t, G) D^\nu f\|_{\mathbf{q}, G_\sigma} \\
&\le C_1 \sum_{e \subseteq e_n} \left\| A_t^e(\cdot, t) \right\|_{\mathbf{q}, G_\sigma} + C_2 \sum_{e \subseteq e_n} \left\| A_{th}^e(\cdot, t) \right\|_{\mathbf{q}, G_\sigma}.
\end{aligned} \tag{40}$$

С помощью неравенства (12) при $U = G$, $\eta_j = |t_j|$ ($j \in e_n$), $\boldsymbol{\gamma} \to \infty$ имеем

$$\left\| A_t^e \right\|_{\mathbf{q}, G_\sigma} \le C_1 \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p}, \mathbf{a}, \bar{\varkappa}, \tau; G} \prod_{j \in e} |t_j|^{\varepsilon_j}, \tag{41}$$

а согласно неравенству (13) при $U = G$, $\eta_j = |t_j|$ ($j \in e_n$), $\boldsymbol{\gamma} \to \infty$ —

$$\begin{aligned}
&\left\| A_{th}^e \right\|_{\mathbf{q}, G_\sigma} \le C_2 \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p}, \mathbf{a}, \bar{\varkappa}, \infty; G} \prod_{j \in e'} |t_j| \prod_{j \in e} |t_j|^{\varepsilon_j - 1} \\
&\le C_3 \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p}, \mathbf{a}, \bar{\varkappa}, \infty; G} \prod_{j \in e'} |t_j| \prod_{j \in e} |t_j|^{\beta_j} = C_3 \|D^{l^e} f\|_{\mathbf{p}, \mathbf{a}, \bar{\varkappa}, \tau; G} \prod_{j \in e'} |t_j| \prod_{j \in e} |t_j|^{\beta_j^1},
\end{aligned} \tag{42}$$

где $\beta_j^1 > \beta_j$ $(j \in e_n)$ и β_j^1 — число, удовлетворяющее неравенствам (37).

Из неравенств (40)–(42) вытекает, что

$$\|\Delta(t,G)D^\nu f\|_{\mathbf{q},G} \le C\|f\|_{S^l_{\mathbf{p},\mathbf{a},\bar{\varkappa},\tau}W(G)} \prod_{j\in e} |t_j|^{\beta_j^1}.$$

Предположим теперь, что $|t_j| \ge \min(\sigma_j, h_j)$ для всех $j \in e_n$. Тогда

$$\|\Delta(t,G)D^\nu f\|_{\mathbf{q},G} \le 2\|D^\nu f\|_{\mathbf{q},G} \le C(\sigma,h)\|D^\nu f\|_{\mathbf{q},G} \prod_{j\in e_n} |t_j|^{\beta_j^1}.$$

Оценивая $\|D^\nu f\|_{\mathbf{q},G}$ с помощью неравенства (32), и в этом случае получаем требуемое неравенство.

Теорема доказана.

Статья обсуждена и одобрена на заседаниях семинара отдела математического анализа Института математики и механики НАН Азербайджана под руководством академика А. Д. Гаджиева.

Автор также выражает глубокую благодарность профессорам А. Д. Джабраилову и В. С. Гулиеву за ценные замечания по работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 6. С. 1342–1364.
2. *Джабраилов А. Д.* Семейства пространств функций, смешанные производные которых удовлетворяют кратному интегральному условию Гёльдера // Тр. МИАН СССР. 1972. Т. 117. С. 139–158.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
4. *Наджафов А. М.* Пространства с параметрами функций со смешанной производной. Деп. АзНИИНТИ. 1987. N 680. 30 с.

Статья поступила 30 марта 2005 г.

Наджафов Алик Малик оглы
Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики,
ул. А. Султанова 5, Баку AZ 1073, Азербайджан
nadjafov@rambler.ru