Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 512.542

G–НАКРЫВАЮЩИЕ СИСТЕМЫ ПОДГРУПП ДЛЯ КЛАССОВ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Я. Ли

Аннотация: В классе конечных разрешимых групп G найдены системы подгрупп, которые являются G-накрывающими системами подгрупп для классов сверхразрешимых групп. Обобщаются некоторые результаты из [1–3].

Ключевые слова: силовская подгруппа, добавление к подгруппе, сверхразрешимая группа, накрывающая система подгрупп.

1. Введение

Пусть $\mathscr{F}$ — класс групп. Сопоставим всякой группе G некоторое множество ее подгрупп $\Sigma = \Sigma(G)$. Следуя [1, 4], будем говорить, что Σ — *G-накрывающая система подгрупп для класса $\mathscr{F}$* (или, иначе, *$\mathscr{F}$-накрывающая система подгрупп группы G*), если $G \in \mathscr{F}$, когда либо $\Sigma = \varnothing$, либо $\Sigma \neq \varnothing$ и каждая подгруппа из Σ принадлежит $\mathscr{F}$. Подгруппа H группы G называется *добавляемой в G*, если существует подгруппа K в G такая, что $HK = G$, при этом K называется *добавлением к H* в G. Очевидно, что каждая подгруппа группы G добавляема в G, так как G может служить одним из ее добавлений. Значит, следует ввести ограничивающие условия. Подгруппа H группы G называется *c-добавляемой в G*, если существует подгруппа K в G такая, что $HK = G$ и $H \cap K \leq H_G = \mathrm{Core}_G(H)$, при этом K называется *c-добавлением к H* в G [5]. Легко видеть, что нормальная подгруппа в G является c-добавляемой подгруппой в G, но обратное, вообще говоря, неверно.

Очевидно, что множество всех конечно-порожденных подгрупп группы G служит G-накрывающей системой подгрупп для класса всех абелевых групп. По локальной теореме Мальцева [6] множество всех конечно-порожденных подгрупп в G будет G-накрывающей системой подгрупп и для многих других важных классов групп. Однако в теории конечных групп известно значительно меньше примеров такого рода, и большинство из них связаны с классом нильпотентных и p-нильпотентных групп. Например, если P — силовская p-подгруппа конечной группы G, где p четно, то по известной J-теореме Томсона $\{N_G(J(P)), C_G(Z(P))\}$ является G-накрывающей системой подгрупп для класса p-нильпотентных групп. Согласно [7] множество нормализаторов всех силовских подгрупп конечной группы G будет $\mathscr{N}$-накрывающей системой для G. В [1] найдены некоторые системы подгрупп конечной группы G, являющиеся G-накрывающими системами для классов нильпотентных групп и для класса

Project supported in part by NSF of China(10571181), NSF of Guangdong Province (04300023) and Guangdong Institutions of Higher Learning, College and University (Z03095) and ARF(GDEI).

сверхразрешимых групп, затем те же авторы в [4] установили локальные аналоги результатов из [1]. Основная цель настоящей статьи состоит в обобщении результатов из [1]. Так, наши теоремы 3.1, 3.2 и 3.4 обобщают теоремы 3.7, 3.2 и 3.11 в [1] соответственно. Кроме того, эти же результаты можно рассматривать и как обобщения утверждений из [2, 3].

Всюду далее все группы конечны. Терминология и обозначения стандартны (см., например, [8] или [9]). В частности, если G — конечная группа, то $M \lessdot G$ означает, что M — максимальная подгруппа в G.

2. Предварительные сведения

Лемма 2.1. *Пусть G — группа.*

(1) *Если H c-добавляема в G, $H \leq K \leq G$, то H c-добавляема в K.*

(2) *Пусть $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$. Тогда H c-добавляема в G тогда и только тогда, когда H/N c-добавляема в G/N.*

(3) *Пусть π — множество простых чисел. Пусть N — нормальная π'-подгруппа и H — π-подгруппа в G. Если H c-добавляема в G, то HN/N c-добавляема в G/N.*

(4) *Пусть R — разрешимая минимальная нормальная подгруппа группы G и $R_1 \lessdot R$. Если R_1 c-добавляема в G, то R является циклической группой простого порядка.*

Доказательство. Утверждения (1)–(3) содержатся в [5, лемма 2.1], докажем (4).

Так как R_1 c-добавляема в G, существует подгруппа K в G такая, что $G = R_1K$ и $R_1 \cap K = (R_1)_G = 1$. Имеем $R = R \cap G = R \cap R_1K = R_1(R \cap K)$ и $R_1 \cap (R \cap K) = 1$. Из разрешимости R вытекает, что R абелева, тем самым $R \cap K \trianglelefteq G$. Тогда $R \cap K = 1$ или $R \cap K = R$ ввиду минимальности R в G. Если $R \cap K = 1$, то $R = R_1$; противоречие. Так что $R \cap K = R$, т. е. $R \leq K$. Но $R_1 = R_1 \cap K = 1$, поэтому R — циклическая группа простого порядка.

Обобщенной фиттинговой подгруппой $F^*(G)$ в G называется единственная максимальная нормальная квазинильпотентная подгруппа в G. Это важная подгруппа в G, являющаяся обобщением $F(G)$. Ее определение и основные свойства можно найти в [10, X13]. В доказательстве наших основных результатов потребуются следующие утверждения.

Лемма 2.2 [10, X 13; 11, лемма 2.2]. *Пусть G — группа и M — подгруппа в G.*

(1) *Если M нормальна в G, то $F^*(M) \leq F^*(G)$;*

(2) *$F^*(G) \neq 1$, если $G \neq 1$; кроме того,*

$$F^*(G)/F(G) = \mathrm{soc}(F(G)C_G(F(G))/F(G));$$

(3) *$F^*(F^*(G)) = F^*(G) \geq F(G)$; если $F^*(G)$ разрешима, то $F^*(G) = F(G)$.*

Лемма 2.3 [2, лемма 2.4]. *Пусть N, L — нормальные подгруппы группы G.*

(1) *Если L нильпотентна, то $F(NL) = F(N)L$;*

(2) *Если $L \leq \Phi(G)$, то $F(NL/L) = F(N)L/L$.*

Согласно теореме Крамера конечная разрешимая группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M в G либо $F(G) \leq M$, либо $M \cap F(G) \lessdot F(G)$ [12, теорема 1.3.3]. Следующая лемма является некоторым обобщением теоремы Крамера.

Лемма 2.4. *Пусть G — разрешимая группа с нормальной подгруппой N такая, что G/N сверхразрешима. Если для любой максимальной подгруппы M в G либо $F(N) \leq M$, либо $F(N) \cap M \lessdot F(N)$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Если $\Phi(G) = 1$, то по [2, лемма 2.5] G сверхразрешима. Если $\Phi(G) \neq 1$, то рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/\Phi(G)$. Так как $\Phi(\overline{G}) = 1$, имеем $F^*(\overline{G}) = F(\overline{G})$, потому что $\overline{G}$ разрешима. Для любой максимальной подгруппы $M/\Phi(G)$ в $\overline{G}$, очевидно, M также максимальная подгруппа в G. Согласно условиям либо $F(N) \leq M$, либо $M \cap F(N)$ — максимальная подгруппа в $F(N)$. Если $F(N) \leq M$, то

$$F(\overline{N}) = F(N\Phi(G)/\Phi(G)) = F(N\Phi(G))/\Phi(G) = F(N)\Phi(G)/\Phi(G) \leq M/\Phi(G)$$

по лемме 2.3. Если $F(N) \cap M$ — максимальная подгруппа в $F(N)$, то $[F(N) : F(N) \cap M]$ простое. Поскольку

$$\begin{aligned}[F(\overline{N}) : F(\overline{N}) \cap \overline{M}] &= [F(N)\Phi(G) : F(N)\Phi(G) \cap M] \\ &= [F(N)\Phi(G) : (F(N) \cap M)\Phi(G)] = [F(N) : F(N) \cap M]\end{aligned}$$

простое, $F(\overline{N}) \cap \overline{M}$ является максимальной подгруппой в $F(\overline{N})$. Поэтому $\overline{G}$ удовлетворяет условиям леммы 2.5 из [2], тем самым $\overline{G}$ сверхразрешима. Отсюда G сверхразрешима.

Лемма 2.5 [2, лемма 2.3]. *Пусть G — группа. Пусть N — нормальная подгруппа в G ($N \neq 1$) и $N \cap \Phi(G) = 1$. Тогда фиттингова подгруппа $F(N)$ в N является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп в G, содержащихся в $F(N)$.*

3. Основные результаты

Сначала обобщим [1, теорема 3.7].

Теорема 3.1. *Пусть G — группа, имеющая нормальную подгруппу N такую, что G/N сверхразрешима. Предположим, что существует множество $\mathscr{F}$ подгрупп в G со следующим свойством: для любой максимальной подгруппы M любой силовской подгруппы в N, не c-добавляемой в G, множество $\mathscr{F}$ содержит добавление к M в G. Тогда $\mathscr{F}$ составляет G-накрывающую систему подгрупп для класса сверхразрешимых групп.*

Доказательство. Допустим противное, и пусть G — контрпример минимального порядка. Очевидно, что $N \neq 1$. Справедливы следующие утверждения.

(1) G разрешима.

Поскольку предположения остаются верными для N, можно считать, что $N = G$.

Пусть $O_p(G) \neq 1$ для некоторого простого p, делящего $|G|$. Проверим, что $\overline{G} = G/O_p(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Пусть $\overline{Q} = QO_p(G)/O_p(G)$ — силовская q-подгруппа в $G/O_p(G)$, где Q — силовская q-подгруппа в G. Если $q = p$, то $O_p(G) \leq Q$, поэтому каждая максимальная подгруппа в $\overline{Q}$ имеет вид $Q_1/O_p(G)$, где Q_1 — максимальная подгруппа в Q. Согласно предположениям Q_1 либо c-добавляема в G, либо имеет сверхразрешимое добавление в G. Если Q_1 c-добавляема в G, то $Q_1/O_p(G)$ c-добавляема в $G/O_p(G)$ по лемме 2.1(2). Пусть Q_1 имеет сверхразрешимое добавление в G, скажем K. Так как $KO_p(G)/O_p(G) \cong K/(K \cap O_p(G))$ сверхразрешима, $Q_1/O_p(G)$ имеет сверхразрешимое добавление к $KO_p(G)/O_p(G)$ в $G/O_p(G)$. Предположим теперь, что $q \neq p$. Пусть $\overline{Q}_1$ — максимальная подгруппа силовской q-подгруппы в $\overline{G}$. Тогда $\overline{Q}_1 = Q_1O_p(G)/O_p(G)$, где Q_1 — максимальная подгруппа силовской q-подгруппы Q в G. Если Q_1 c-добавляема в G, то согласно лемме 2.1(3) $Q_1O_p(G)/O_p(G)$ c-добавляема в $G/O_p(G)$. Если Q_1 имеет сверхразрешимое добавление в G, допустим K, то $Q_1O_p(G)/O_p(G)$ обладает сверхразрешимым добавлением $KO_p(G)/O_p(G)$ в $G/O_p(G)$. Из минимальности выбора G вытекает, что $G/O_p(G)$ сверхразрешима, так что G разрешима.

Предположим, что $O_p(G) = 1$ для любого простого p, делящего $|G|$. Тогда каждая не нормальная в G максимальная подгруппа P_1 каждой силовской подгруппы в G имеет сверхразрешимое добавление к T в G. Действительно, если P_1 имеет c-добавление в G, скажем T, то $G = P_1T$ и $T \cap P_1 \subseteq (P_1)_G = 1$, тем самым T является добавлением к P_1 в G. Следовательно, предположения остаются выполненными в T. Поскольку P_1 не нормальна в G, имеем $|T| < |G|$, поэтому T сверхразрешима ввиду минимальности выбора G. Используя [1, теорема 3.7], видим, что G сверхразрешима. Это доказывает (1).

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в N. Тогда L — элементарная абелева r-группа для некоторого простого $r \in \pi(N)$. Рассуждая, как при доказательстве (1), мы можем доказать, что $(G/L, N/L)$ удовлетворяет условиям теоремы, поэтому получаем

(2) G/L сверхразрешима, L — единственная минимальная нормальная подгруппа, содержащаяся в N, и $N \cap \Phi(G) = 1$. Кроме того, $L = F(N) = C_N(L)$ по лемме 2.5.

(3) L является силовской подгруппой в N.

Согласно (1) G разрешима. Пусть q — наибольшее простое, делящее $|N|$, и пусть Q — силовская q-подгруппа в N. Так как $N/L \leq G/L$ сверхразрешима согласно (2), LQ нормальна в G. Если $r = q$, то $L \leq Q \lhd G$. Поэтому $Q \leq F(N) = L$ и L — силовская q-подгруппа в N.

Предположим теперь, что $r < q$. Пусть R — силовская r-подгруппа в N. Тогда $L \leq R$ и $RQ = RLQ$ — подгруппа в N. Если $RQ < G$, то ввиду минимальности выбора RQ сверхразрешима, в частности, $Q \lhd RQ$. Отсюда $LQ = L \times Q$ и $Q \leq C_N(L) \leq L$; противоречие. Поэтому далее считаем, что $G = RQ = N$ и $L < R$. Согласно (2) существует подгруппа M в G такая, что $G = LM$, $M = N_G(M_q)$ и $L \cap M = 1$. Не уменьшая общности, можно полагать, что $Q \leq M$. Отсюда $G = LM = LN_G(Q)$. Выберем максимальную подгруппу R_1 в R такую, что R_1 содержит $R \cap M$. Тогда $R = LR_1$. Согласно предположениям R_1 имеет либо c-добавление, либо сверхразрешимое добавление к K в G. Если K — c-добавление к R_1 в G, то $K \cap R_1 = (R_1)_G$. Очевидно, $L \not\leq R_1$, откуда $(R_1)_G = 1$. Теперь $|K|_r = |G : R_1|_r = r$, так что K имеет нормальное r-дополнение [13, теорема 6.3, с. 257], являющееся по существу силовской q-подгруппой Q_1 в G. Если K — сверхразрешимое добавление к R_1 в G, то силовская q-подгруппа, скажем Q_1, в K (фактически силовская q-подгруппа в G) нормальна в K. Так что в обоих случаях имеем $G = R_1K = R_1N_G(Q_1)$. По теореме Силова Q и Q_1 сопряжены в G. Поскольку $G = R_1N_G(Q_1)$, можно выбрать $g \in R_1$ так, что $Q_1^g = Q$. Тогда $G = (R_1N_G(Q_1))^g = R_1N_G(Q_1^g) = R_1N_G(Q) = R_1M$. Отсюда $R = R \cap G = R_1(R \cap M) \leq R_1$ при $R \cap M \leq R_1$; противоречие.

(4) Окончательное противоречие.

Пусть L_1 — максимальная подгруппа в L. Если L_1 — c-добавление в G, то L простого порядка по лемме 2.1(4), тем самым G сверхразрешима; противоречие.

Если L_1 обладает сверхразрешимым добавлением, скажем K, то $K < G$, $G = L_1K = LK$ и $L \cap K = 1$. Отсюда $[G : K] = |L|$. Но $[G : K] \leq |L_1| < |L|$; окончательное противоречие.

Теперь обобщим [1, теорема 3.2].

Теорема 3.2. *Пусть G — разрешимая группа с нормальной подгруппой N такой, что G/N сверхразрешима. Предположим, что существует множество $\mathscr{F}$ подгрупп в G, обладающих следующим свойством: для каждой максимальной подгруппы M любой силовской подгруппы в $F(N)$, не являющейся c-добавляемой в G, множество $\mathscr{F}$ содержит добавление к M в G. Тогда $\mathscr{F}$ образует G-накрывающую систему подгрупп для класса сверхразрешимых групп.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\Phi(G) \cap N \neq 1$.

Так как $\Phi(G) \cap N \neq 1$, существует простое p такое, что $p \mid |\Phi(G) \cap N|$. Пусть $P_0 \in \mathrm{Syl}_p(\Phi(G) \cap N)$. Тогда $P_1 \triangleleft G$. Поскольку $(G/P_0)/(N/P_0) \cong G/N$, то $(G/P_0)/(N/P_0)$ сверхразрешима. По лемме 2.3 $F(N/P_0) = F(N)/P_0$.

Пусть P_1/P_0 — максимальная подгруппа силовской p-подгруппы в $F(N)/P_0$. Тогда P_1 — максимальная подгруппа силовской p-группы в $F(N)$. Если P_1 c-добавляема в G, то P_1/P_0 c-добавляема в G/P_0 по лемме 2.1(2); если P_1 обладает сверхразрешимым добавлением K в G, то P_1/P_0 имеет сверхразрешимое добавление KP_0/P_0 в G/P_0. Пусть Q^*/P_0 — максимальная подгруппа силовской q-подгруппы в $F(N)/P_0$, где $q \neq p$. Ясно, что $Q^* = Q_1P_0$, где Q_1 — максимальная подгруппа силовской q-подгруппы в $F(N)$. Если Q_1 c-добавляема в G, то Q_1P_0/P_0 c-добавляема в G/P_0 по лемме 2.1(3). Если Q_1 имеет сверхразрешимое добавление в G, скажем K, то Q_1P_0/P_0 обладает сверхразрешимым добавлением KP_0/P_0 в G/P_0. Тем самым доказано, что G/P_0 удовлетворяет условиям теоремы. Отсюда G/P_0 сверхразрешима ввиду минимальности выбора G. Поскольку $P_0 \leq \Phi(G)$ и класс сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, G сверхразрешима; противоречие.

Случай 2. $\Phi(G) \cap N = 1$.

В силу выбора G имеем $N \neq 1$. Тогда $F(N) \neq 1$ согласно разрешимости N. По лемме 2.5 $F(N)$ представляет собой прямое произведение некоторых минимальных подгрупп в G. Обозначим $F(N) = R_1 \times \dots \times R_t$, где каждая R_i является минимальной нормальной подгруппой в G. Если каждая R_i простого порядка, то $G/C_G(R_i)$ абелева. Так как $C_G(F(N)) = \bigcap_{i=1}^{t} C_G(R_i)$, то $G/C_G(F(N))$ абелева. Поскольку

$$G/C_N(F(N)) = G/(N \cap C_G(F(N))) \leq G/N \times G/C_G(F(N)),$$

то $G/C_N(F(N))$ сверхразрешима. Ясно, что $C_N(F(N)) \leq F(N)$. Тем самым $G/F(N)$ сверхразрешима. Применяя теперь теорему 3.1, получаем, что G сверхразрешима; противоречие. Значит, будем считать, что существует индекс i такой, что R_i не простого порядка. Не уменьшая общности, предположим, что $i = 1$ и P — силовская подгруппа в $F(N)$, содержащая R_1. Обозначим $P = R_1 \times \dots \times R_s$, где все R_j $(j = 1, 2, \dots, s)$ суть минимальные нормальные подгруппы в G, для некоторого $s \leq t$. Предположим, что R_1^* — максимальная подгруппа в R_1. Тогда $P_1 = R_1^* \times R_2 \times \dots \times R_s$ — максимальная подгруппа в P. Легко видеть, что $(P_1)_G = R_2 \times \dots \times R_s$. Согласно предположениям P_1 либо c-добавляема в G, либо имеет сверхразрешимое добавление в G. Если P_1 c-добавляема в G, то существует подгруппа H такая, что $G = P_1H$ и $P_1 \cap H = (P_1)_G$. Значит, $G = P_1H = R_1^*(P_1)_GH = R_1^*H$, кроме того, $R_1^* \cap H = 1 = (R_1^*)_G$. Отсюда R_1^* c-добавляема в G по определению c-добавляемой подгруппы. По лемме 2.1(4) R_1 — циклическая группа простого порядка; противоречие. Тем самым каждая не нормальная в G максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы в $F(N)$ имеет сверхразрешимое добавление в G и G сверхразрешима ввиду [1, теорема 3.2]; окончательное противоречие.

Следствие 3.3. *Пусть G — группа, имеющая нормальную подгруппу N такую, что G/N сверхразрешима. Предположим, что существует множество $\mathscr{F}$ подгрупп в G, обладающее следующим свойством: для каждой минимальной подгруппы M любой силовской подгруппы в $F^*(N)$ обобщенная фиттингова подгруппа в N без c-добавления в G множество $\mathscr{F}$ содержит добавление к M в G. Тогда $\mathscr{F}$ является G-накрывающей системой подгрупп для класса сверхразрешимых групп.*

Доказательство. Для произвольной максимальной подгруппы P_1 любой силовской подгруппы в $F^*(N)$ если P_1 c-добавляема в G, то P_1 c-добавляема в $F^*(N)$ по лемме 2.1(1); если P_1 имеет сверхразрешимое добавление в G, скажем H, то

$$F^*(N) = F^*(N) \cap G = F^*(N) \cap (P_1H) = P_1(F^*(N) \cap H),$$

тем самым $F^*(N) \cap H$ — сверхразрешимое добавление к P_1 в $F^*(N)$. Отсюда $F^*(N)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Значит, $F^*(N)$ сверхразрешима. Тогда $F^*(N) = F(N)$ по лемме 2.2. Если все максимальные подгруппы произвольной силовской подгруппы в $F^*(N)$ c-добавляемы в G, то G сверхразрешима согласно [3, теорема 1.1]. Поэтому допустим, что существует максимальная подгруппа P_2 силовской p-подгруппы в $F^*(N) = F(N)$ для некоторого простого $p \in \pi(N)$ такая, что P_2 имеет сверхразрешимое добавление в G, пусть K. Отсюда $G = P_2K = O_p(N)K$. Следовательно, $G/O_p(N)$ сверхразрешима, так что G разрешима. Применяя теорему 3.2, получим, что G сверхразрешима.

Теорема 3.4. *Пусть G — группа и $G^{\mathscr{U}}$ — сверхразрешимый корадикал G. Предположим, что существует множество $\mathscr{F}$ подгрупп в G, обладающих следующим свойством: для каждой циклической подгруппы L в $G^{\mathscr{U}}$ простого порядка или порядка 4, не c-добавляемой в G, множество $\mathscr{F}$ содержит добавление к L в G. Тогда $\mathscr{F}$ является G-накрывающей системой подгрупп для класса сверхразрешимых групп.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть H — подгруппа в G и $\langle x\rangle$ — циклическая подгруппа в $H^{\mathscr{U}}$ простого порядка или порядка 4. Так как $H^{\mathscr{U}} \le G^{\mathscr{U}}$, то $\langle x\rangle$ либо c-добавляема в G, либо имеет сверхразрешимое добавление в G согласно предположению. Если $\langle x\rangle$ c-добавляема в G, то $\langle x\rangle$ c-добавляема в H по лемме 2.1(1); если $\langle x\rangle$ имеет сверхразрешимое добавление в G, скажем K, то $H \cap K$ — сверхразрешимое добавление к $\langle x\rangle$ в H. Тем самым мы доказали, что предположения относительно G наследуются всеми подгруппами в G. Ввиду минимальности выбора G группа G не сверхразрешима, но все собственные подгруппы в G сверхразрешимы. Согласно [14] G имеет нормальную силовскую p-подгруппу P, обладающую следующими свойствами.

(1) (i) P — наименьшая нормальная подгруппа в G со сверхразрешимой фактор-группой;

(ii) $P/\Phi(P)$ — главный фактор в G;

(iii) $\exp(P) = p$, когда p нечетно, и $\exp(P)$ не более 4 при $p = 2$; кроме того, $P' = \Phi(P) = P \cap \Phi(G)$, и либо P элементарная абелева, либо $P' = Z(P)$.

(2) $G^{\mathscr{U}} = P$. Легко вытекает из (1)(i).

(3) Окончательное противоречие.

Пусть теперь $x \in P \setminus \Phi(P)$. Тогда $\langle x \rangle$ либо c-добавляема в G, либо имеет сверхразрешимое добавление в G по предположению. Допустим, что $\langle x \rangle$ c-добавляема в G и K — c-добавление к $\langle x \rangle$ в G. Тогда $G = \langle x \rangle K$ и $\langle x \rangle \cap K = \langle x \rangle_G$. Отсюда $P = \langle x \rangle (P \cap K)$. Заметим, что $x^2 \in \Phi(P)$, тем самым $\langle x^2 \rangle (K \cap P)$ — максимальная подгруппа в P, так что x нормализует $\langle x^2 \rangle (K \cap P)$. Поскольку $[x^2, K] \leq \Phi(P) \leq \langle x^2 \rangle (K \cap P)$, получаем, что $\langle x^2 \rangle (K \cap P)$ — нормальная подгруппа в G. Отсюда $\langle x^2 \rangle (K \cap P) \leq \Phi(P)$ или $\langle x^2 \rangle (K \cap P) = P$ ввиду (1)(ii). Если $\langle x^2 \rangle (K \cap P) \leq \Phi(P)$, то $P = \langle x \rangle$. Если $\langle x^2 \rangle (K \cap P) = P$, то $P = K \cap P$, т. е. $P \leq K$. Итак, $\langle x \rangle = \langle x \rangle \cap K = \langle x \rangle_G$ нормальна в G, и вновь $P = \langle x \rangle$. Следовательно, $P/\Phi(P)$ должна быть циклической группой. Так как $(G/\Phi(P))/(P/\Phi(P)) \cong G/P$ сверхразрешима, $G/\Phi(P)$ сверхразрешима. Поэтому G сверхразрешима; противоречие. Предположим, что $\langle x \rangle$ имеет сверхразрешимое добавление в G, пусть K. Тогда $G = \langle x \rangle K$ и $P = \langle x \rangle (P \cap K)$. Рассуждая, как и выше, мы можем доказать, что $\langle x^2 \rangle (K \cap P)$ нормальна в G и $\langle x^2 \rangle (K \cap P) = P$ или $\langle x^2 \rangle (K \cap P) \leq \Phi(P)$. Если $\langle x^2 \rangle (K \cap P) = P$, то $P \leq K$ и, значит, $G = K$ сверхразрешима; противоречие. Если $\langle x^2 \rangle (K \cap P) \leq \Phi(P)$, то $P = \langle x \rangle$, и вновь $P/\Phi(P)$ — циклическая группа и $(G/\Phi(P))/(P/\Phi(P)) \cong G/P$ сверхразрешима, так что G сверхразрешима; окончательное противоречие.

Уменьшим число минимальных подгрупп группы G в теореме 3.4, добавив некоторые ограничения.

Теорема 3.5. *Пусть G — разрешимая группа с нормальной подгруппой N такая, что G/N сверхразрешима. Допустим, что существует множество $\mathscr{F}$ подгрупп в G, обладающих следующим свойством: для каждой циклической подгруппы L в $F(N)$ простого порядка или порядка 4, не c-добавляемой в G, множество $\mathscr{F}$ содержит добавление к L в G. Тогда $\mathscr{F}$ является G-накрывающей системой подгрупп для класса сверхразрешимых групп.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка.

Отметим сначала, что для максимальной подгруппы M в G соотношение $F(N) \cap M \lessdot F(N)$ равносильно тому факту, что $[G : M]$ простое, когда $F(N) \not\leq M$.

Предположим, что M — максимальная подгруппа в G такая, что $F(N) \not\leq M$. Тогда существует простое p такое, что $O_p(N) \not\leq M$. Поэтому $G = O_p(N)M$. Рассмотрим два случая.

(i) p простое нечетное.

Пусть x_1 — элемент в $O_p(N)$ порядка p такой, что $\langle x_1 \rangle$ не нормальна в G. Согласно предположениям $\langle x_1 \rangle$ либо c-добавляема в G, либо имеет сверхразрешимое добавление в G. Если $\langle x_1 \rangle$ c-добавляема в G, то существует подгруппа в G, скажем M_1, такая, что $G = \langle x_1 \rangle M_1$ и $\langle x_1 \rangle \cap M_1 = \langle x_1 \rangle_G = 1$. Если $\langle x_1 \rangle$ имеет сверхразрешимое добавление в G, то существует сверхразрешимая подгруппа в G, пусть M_1, такая, что $G = \langle x_1 \rangle M_1$. Поскольку G сверхразрешима, $G \neq M_1$.

Поэтому $\langle x_1 \rangle \not\leq M_1$, т. е. $\langle x_1 \rangle \cap M_1 = 1$. В обоих случаях существует подгруппа M_1 группы G такая, что $G = \langle x_1 \rangle M_1$ и $\langle x_1 \rangle \cap M_1 = 1$. Оказалось, что мы находимся в рамках доказательства леммы 2.8 в [2], следовательно, мы можем использовать аналогичные рассуждения и получить, что $[G : M]$ простое.

(ii) $p = 2$.

Предположим, что M_2 — силовская 2-подгруппа в M. Тогда $O_2(N)M_2$ — силовская 2-подгруппа в G. Допустим, что H — минимальная подгруппа в $O_2(N)M_2$, содержащая M_2. Тогда $H = H \cap (O_2(N)M_2) = (H \cap O_2(N))M_2$.

Для любых $q \neq 2$ и $M_q \in S_q(M)$ ввиду того, что $O_2(N)M_q/O_2(G)$ сверхразрешима, каждая циклическая подгруппа в $O_2(N)$ порядка 2 или 4 либо c-добавляема в G, либо имеет сверхразрешимое добавление в G согласно предположениям, тем самым является либо c-добавляемой в $O_2(N)M_q$, либо имеет сверхразрешимое добавление в $O_2(N)M_q$. По теореме 3.4 $O_2(N)M_q$ сверхразрешима. Мы попали в ситуацию доказательства леммы 2.8 из [2], и, используя соответствующие рассуждения, можно получить, что $[G : M] = 2$ простое.

Итак, мы доказали, что либо $F(N) \leq M$, либо $F(N) \cap M \lessdot F(N)$ для любой максимальной подгруппы M в G. Из леммы 2.4 вытекает, что G сверхразрешима; окончательное противоречие.

Доказательство теоремы закончено.

Следствие 3.6. *Пусть G — группа, имеющая нормальную подгруппу N такую, что G/N сверхразрешима. Допустим, что существует множество $\mathscr{F}$ подгрупп в G, обладающее следующим свойством: для каждой циклической подгруппы L в $F^*(N)$ простого порядка или порядка 4, которая не является c-добавляемой в G, множество $\mathscr{F}$ содержит добавление к L в G. Тогда $\mathscr{F}$ является G-накрывающей системой подгрупп для класса сверхразрешимых групп.*

Доказательство. Для произвольной циклической подгруппы L в $F^*(N)$ простого порядка или порядка 4 если L c-добавляема в G, то L c-добавляема в $F^*(N)$ по лемме 2.1(1); если L имеет сверхразрешимое добавление в G, скажем H, то

$$F^*(N) = F^*(N) \cap G = F^*(N) \cap (LH) = L(F^*(N) \cap H),$$

тем самым $F^*(N) \cap H$ — сверхразрешимое добавление к L в $F^*(N)$. Отсюда $F^*(N)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.4. Поэтому $F^*(N)$ сверхразрешима. Тем самым $F^*(N) = F(N)$ по лемме 2.2. Если все циклические подгруппы в $F^*(N)$ простого порядка или порядка 4 c-добавляемы в G, то G сверхразрешима согласно [2, теорема 3.1]. Предположим, что существует циклическая подгруппа L в $F^*(N) = F(N)$ простого порядка для некоторого простого $p \in \pi(N)$ (или порядка 4, когда $p = 2$) такая, что L имеет сверхразрешимое добавление, скажем K. Тогда $G = LK = O_p(N)K$. Отсюда $G/O_p(N)$ сверхразрешима, так что G разрешима. Применяя теорему 3.5, получаем, что G сверхразрешима.

Благодарности. Автор весьма признателен рецензенту, внимательно прочитавшему работу и сделавшему много существенных пожеланий и замечаний. Особенно значительна помощь рецензента в упрощении доказательств теорем 3.1 и 3.2 и в исключении использования классификации простых групп и теоремы о разрешимости групп нечетного порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guo W., Shum K. P., Skiba A.* G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Israel J. Math. 2003. V. 138, N 1. P. 125–138.

2. *Wang Y., Li Y., Wang J.* Finite groups with c-supplemented minimal subgroups // Algebra Colloq. 2003. V. 10, N 3. P. 413–425.
3. *Wei H., Wang Y., Li Y.* On c-supplemented maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132, N 8. P. 2197–2204.
4. *Guo W., Shum K. P., Skiba A.* G-covering subgroup for the classes of p-supersoluble and p-nilpotent finite groups // Siberian Math. J. 2004. V. 45, N 3. P. 433–442.
5. *Ballester-Bolinches A., Wang Y., Xiuyun G.* C-supplemented subgroups of finite groups // Glasgow Math. J. 2000. V. 42, N 3. P. 383–389.
6. *Мальцев А. И.* Модельные соответствия // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 3. С. 313–336.
7. *Bianchi M., Mauri A. G. B., Hauck P.* On finite groups with nilpotent Sylow normalizers // Arch Math. 1986. V. 47, N 3. P. 193–197.
8. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York; Berlin: Springer-Verl., 1993.
9. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin, New York: Springer-Verl., 1982.
10. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1968.
11. *Li Y., Wang Y.* The influence of minimal subgroups on the structure of a finite group // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 131, N 2. P. 337–341.
12. *Weinstein M. (editor)* Between nilpotent and solvable. Passaic, 1982.
13. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea, 1968.
14. *Doerk K.* Minimal nicht über auflösbarer endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Bd 91. S. 198–205.

Статья поступила 7 января 2005 г.

Yangming Li (Ли Янмин)
Dept. of Math., Nanchang University, Nanchang, Jiangxi, 330047, China
Dept. of Math., Guangdong Institute of Education, Guangzhou, 510310, China
liyangming@gdei.edu.cn