Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.98.1

ЗАМЕТКА О ПРОСТРАНСТВАХ $CD_0(K)$

Ш. Алпай, З. Эрджан

Аннотация: В $[1, 2]$ дано представление пространства $CD_0(K)$ для компактного хаусдорфова пространства K без изолированных точек. В статье этот результат обобщается на произвольное счетно компактное пространство K без каких-либо предположений об изолированных точках.

Ключевые слова: решеточный изоморфизм, банахова решетка, $CD_0(K)$-пространство.

Пусть K — топологическое пространство и E — банахова решетка. Как обычно, через $C(K, E)$ обозначается векторная решетка всех непрерывных функций из K в E, а через $c_0(K, E)$ — векторная решетка всех функций f из K в E таких, что множество $\{k : \epsilon \leq \|f(k)\|\}$ конечно для любого $\epsilon > 0$. Если $E = \mathbb{R}$, то будем писать $C(K)$ и $c_0(K)$ вместо $C(K, \mathbb{R})$ и $c_0(K, \mathbb{R})$ соответственно. Мы будем также использовать обозначение

$$CD_0(K, E) = \{f + d : f \in C(K, E),\ d \in c_0(K, E)\}.$$

Если K — компактное хаусдорфово пространство без изолированных точек, то $CD_0(K, E)$ — банахова решетка относительно поточечных операций. Свойства нормы и порядка в $CD_0(K, E)$ изучались в [3–5].

Определение 1. Пусть K — топологическое пространство, $((k_\alpha, r_\alpha))$ — сеть в $K \times \{0, 1\}$ и $(k, r) \in K \times \{0, 1\}$. Будем говорить, что сеть $((k_\alpha, r_\alpha))$ *сходится к* (k, r) (и писать $(k_\alpha, r_\alpha) \to (k, r)$), если

$$f(k_\alpha) + r_\alpha d(k_\alpha) \to f(k) + rd(k)$$

для любых $f \in C(K)$ и $d \in c_0(K)$. Символом $K \odot \{0, 1\}$ обозначается множество $K \times \{0, 1\}$, снабженное этой сходимостью.

В $[1, 2]$ доказано, что $K \odot \{0, 1\}$ является компактным хаусдорфовым пространством для данного компактного хаусдорфова пространства K без изолированных точек. Напомним, что топологическое пространство X называют *счетно компактным*, если каждое счетное открытое покрытие X имеет конечное подпокрытие (или, равносильно, если каждая последовательность в K имеет сходящуюся подсеть).

Лемма 2. *Пусть K — топологическое пространство. Тогда*

(a) $K \odot \{0, 1\}$ *— топологическое пространство относительно указанной выше сходимости;*

(b) *если K — счетно компактное хаусдорфово пространство, то $K \odot \{0, 1\}$ также счетно компактно;*

(c) *если K — вполне регулярное хаусдорфово пространство, то K счетно компактно тогда и только тогда, когда $K \odot \{0,1\}$ счетно компактно.*

Доказательство. (a) Для каждой пары функций $f \in C(K)$ и $d \in c_0(K)$ определим $\varphi_{fd} : K \times \{0,1\} \to \mathbb{R}$ и полуметрику $\rho_{fd} : (K \times \{0,1\})^2 \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\varphi_{fd}(k,r) = f(k) + rd(k), \quad (k,r) \in K \times \{0,1\},$$

$$\rho_{fd}(x,y) = |\varphi_{fd}(x) - \varphi_{fd}(y)|, \quad x,y \in K \times \{0,1\}.$$

Легко видеть, что сходимость на $K \times \{0,1\}$ совпадает со сходимостью в мультиметрике $\{\rho_{fd} : f \in C(K),\ d \in c_0(K)\}$. Отсюда немедленно вытекает, что сходимость топологична и $K \odot \{0,1\}$ действительно топологическое пространство. Более того, оно равномеризуемо, последнее эквивалентно тому, что $K \odot \{0,1\}$ является $T_{3\frac{1}{2}}$-пространством. Вводимая на нем топология — это слабейшая топология на $K \times \{0,1\}$, в которой непрерывны все функции φ_{fd} (подробности см. в [6, гл. 9]).

(b) Пусть $((k_n, r_n))$ — последовательность в $K \odot \{0,1\}$, не содержащая постоянной подпоследовательности. Достаточно показать, что существуют $(k,r) \in K \odot \{0,1\}$ и подсеть $((k_{n_\alpha}, r_{n_\alpha}))$ такие, что $(k_{n_\alpha}, r_{n_\alpha}) \to (k,r)$ и $(k_{n_\alpha}, r_{n_\alpha}) \neq (k,r)$. Можно предполагать, что $r_n = 0$ для каждого n или $r_n = 1$ для каждого n (иначе можно перейти к подпоследовательности в $((k_n, r_n))$). Допустим сначала, что $r_n = 0$ для любого n. Так как K счетно компактно, существует подсеть (k_{n_α}) в (k_n) такая, что $k_{n_\alpha} \to k$ и $k_{n_\alpha} \neq k$ для каждого α. Ясно, что $(k_{n_\alpha}, 0) \to (k, 0)$. Пусть теперь $r_n = 1$ для любого n. Вновь ввиду счетной компактности K существуют $k \in K$ и подсеть (k_{n_α}) в (k_n) такие, что $k_{n_\alpha} \to k$ и $k_{n_\alpha} \neq k$ для каждого α. Поскольку K хаусдорфово, любая подсеть сети (k_{n_α}) пробегает бесконечное множество значений, так что $d(k_{n_\alpha}) \to 0$ для любого $d \in c_0(K)$. Ясно теперь, что $(k_{n_\alpha}, 1) \to (k, 0)$. Это завершает доказательство п. (b).

(c) Пусть K — вполне регулярное хаусдорфово пространство такое, что $K \odot \{0,1\}$ счетно компактно. Пусть (k_n) — последовательность в K, не содержащая постоянной подпоследовательности. Тогда существует подсеть $((k_{n_\alpha}, 0))$ в $(k_n, 0)$ такая, что $(k_{n_\alpha}, 0) \to (k, r)$ и $(k_{n_\alpha}, 0) \neq (k, r)$ для любого α. Отсюда $r = 0$. Следовательно, $f(k_{n_\alpha}) \to f(k)$ для любой $f \in C(K)$. Так как K вполне регулярно, имеем $k_{n_\alpha} \to k$. Лемма доказана.

В [1, 2] доказана

Теорема 3. *Пусть K — компактное хаусдорфово пространство без изолированных точек. Тогда банаховы решетки $CD_0(K)$ и $C(K \odot \{0,1\})$ изометрически и порядково изоморфны.*

В настоящей работе мы обобщим теорему 3 в двух направлениях: компактность заменим счетной компактностью, а условие отсутствия изолированных точек опустим.

Для топологического пространства K и банаховой решетки E на $C(K,E) \times c_0(K,E)$ рассматриваются покоординатные алгебраические операции.

Определение 4. Пусть K — топологическое пространство и E — банахова решетка. Для $(f,d) \in C(K,E) \times c_0(K,E)$ положим

$$0 \leq (f,d) \Longleftrightarrow 0 \leq f(k) \quad \text{и} \quad 0 \leq f(k) + d(k) \quad \text{для всех } k \in K.$$

Символ $C(K,E)\odot c_0(K,E)$ используется для обозначения векторного пространства $C(K,E)\times c_0(K,E)$ с указанным порядком.

Пусть $C_b(K,E)$ — подпространство пространства $C(K,E)$, состоящее из всех непрерывных ограниченных функций из K в E.

Теорема 5. *Пусть K — топологическое пространство и E — банахова решетка. Тогда*

(a) $C(K,E)\odot c_0(K,E)$ *— архимедова векторная решетка; кроме того,*

$$|(f,d)| = (|f|, |f+d| - |f|)$$

для любого $(f,d)\in C(K,E)\odot c_0(K,E)$;

(b) $c_0(K,E)$ *может быть вложено в $C(K,E)\odot c_0(K,E)$ как идеал, а $C(K,E)\odot c_0(K,E)/c_0(K,E)$ и $C(K,E)$ являются изоморфными пространствами Рисса;*

(c) *векторная подрешетка $C_b(K,E)\odot c_0(K,E)$ $(= C_b(K,E)\times c_0(K,E))$ в $C(K,E)\odot c_0(K,E)$ является банаховой решеткой относительно нормы*

$$\|(f,d)\| = \sup\{\|f(k)+rd(k)\| : (k,r)\in K\times\{0,1\}\}.$$

Доказательство. (a) Ясно, что $C(K,E)\odot c_0(K,E)$ — упорядоченное векторное пространство. Пусть $(f,d)\in C(K,E)\odot c_0(K,E)$. Тогда $(|f|,|f+d|-|f|)$ — верхняя граница для $\{(f,d),-(f,d)\}$. Пусть (g,p) — другая верхняя граница для $\{(f,d),-(f,d)\}$. Тогда

$$0\le g-f,\quad 0\le g+p-f-d,\quad 0\le f+g,\quad 0\le f+g+p+d.$$

Отсюда $(|f|,|f+d|-|f|)\le(g,p)$, и п. (a) доказан.

(b) Очевидно, что $c_0(K,E)$ — идеал в $C(K,E)\odot c_0(K,E)$ и отображение $\pi : C(K,E)\odot c_0(K,E)/c_0(K,E)\to C(K,E)$, определенное равенством $\pi([(f,d)]) = f$, — решеточный изоморфизм.

(c) Вытекает непосредственно из определения порядка на $C(K,E)\odot c_0(K,E)$.

Легко видеть, что норма в предыдущей теореме является нормой, порожденной порядковой единицей на пространстве $C_b(K)\odot c_0(K)$, где $(\mathbf{1},0)$ — порядковая единица пространства $C_b(K)\odot c_0(K)$. Вообще говоря, $(\mathbf{1},0)$ — это слабая порядковая единица в пространстве $C(K)\odot c_0(K)$, но в векторной решетке (с покоординатным порядком) $C(K)\times c_0(K)$ нет слабой порядковой единицы. Это показывает, что векторные решетки $C(K)\odot c_0(K)$ и $C(K)\times c_0(K)$ в общем случае могут не быть решеточно изоморфными.

Если K — топологическое пространство, в котором нет конечных открытых подмножеств, то легко видеть, что $C(K)\cap c_0(K)=\{0\}$ и

$$f\in C(K),\quad d\in c_0(K)\quad \text{и}\quad 0\le f+d \text{ в } CD_0(K)\quad \Longrightarrow\quad 0\le f \text{ в } C(K).$$

Отсюда вытекает

Теорема 6. *Если K — топологическое пространство, в котором нет конечных открытых множеств, то упорядоченные векторные пространства $CD_0(K)$ и $C(K)\odot c_0(K)$ порядково изоморфны и изоморфизм $\pi : C(K)\odot c_0(K)\to CD_0(K)$ определяется так: $\pi(f,d)=f+d$.*

Сформулируем результат, аналогичный теореме 3.

Теорема 7. *Пусть K — счетно компактное пространство (необязательно хаусдорфово или без изолированных точек). Тогда $C(K,E)\odot c_0(K,E)$ и $C(K\odot\{0,1\},E)$ являются изоморфными векторными решетками.*

Доказательство. Пусть $\pi : C(K,E)\odot c_0(K,E)\to C(K\odot\{0,1\},E)$ определяется формулой $\pi(f,d)(k,r) = f(k)+rd(k)$. Очевидно, что π — взаимно однозначное отображение и $0\le\pi(f,d)$ тогда и только тогда, когда $0\le(f,d)$. Остается показать, что π накрывающее. Пусть дано $g\in C(K\odot\{0,1\},E)$. Определим $f,d : K\to E$ равенствами

$$f(k)=g(k,0)\quad\text{и}\quad d(k)=g(k,1)-g(k,0).$$

Если $k_\alpha\to k$ в K, то $(k_\alpha,0)\to(k,0)$ в $K\odot\{0,1\}$, и мы имеем

$$f(k_\alpha)=g(k_\alpha,0)\to g(k,0)=f(k).$$

Отсюда $f\in C(K,E)$. Докажем, что $d\in c_0(K,E)$. Действительно, пусть $d\notin c_0(K,E)$. Тогда существуют последовательность (k_n) в K и число $\varepsilon>0$ такие, что $k_n\ne k_m$ для всех $n\ne m$ и $\varepsilon<\|d(k_n)\|=\|g(k_n,1)-g(k_n,0)\|$. Поскольку K счетно компактно, найдется подсеть (k_{n_α}) в (k_n), для которой $k_{n_\alpha}\to k$ в K при некотором k. Так как каждая подсеть в (k_{n_α}) пробегает бесконечное множество значений, легко проверить, что $(k_{n_\alpha},1)\to(k,0)$ в $K\odot\{0,1\}$ (или см. [1]). Ясно также, что $(k_{n_\alpha},0)\to(k,0)$ в $K\odot\{0,1\}$. Тогда

$$\varepsilon<\|d(k_{n_\alpha})\|=\|g(k_{n_\alpha},1)-g(k_{n_\alpha},0)\|\to\|g(k,0)-g(k,0)\|=0.$$

Полученное противоречие показывает, что $d\in c_0(K,E)$. Очевидно, что $\pi(f,d)=g$. Теорема доказана.

Авторы признательны рецензенту за полезные предложения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ercan Z.* A concrete description of $CD_0(K)$-spaces as $C(X)$-spaces and its applications // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. P. 1761–1763.
2. *Troitsky V. G.* On $CD_0(K)$-spaces // Владикавказский мат. журн. 2004. V. 6, N 1. P. 71–73.
3. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* Remarkable classes of unital AM-spaces // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 180. P. 398–411.
4. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* A Banach–Stone theorem for a new class of Banach spaces // Indiana Univ. Math. J. 1996. V. 45, N 3. P. 709–720.
5. *Alpay S., Ercan Z.* $CD_0(K,E)$ and $CD_w(K,E)$ spaces as Banach lattices // Positivity. 2000. V. 3. P. 213–225.
6. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2001.

Статья поступила 17 сентября 2004 г., окончательный вариант — 2 марта 2005 г.

Safak Alpay (Алпай Шафак), Zafer Ercan (Эрджан Зафер)
Middle East Technical University,
Department of Mathematics,
06531 Ankara, Turkey.
zercan@metu.edu.tr