Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.9

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С БИОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ: ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД И ПСЕВДОСПЕКТРЫ

О. Г. Авсянкин

Аннотация: Рассматриваются многомерные интегральные операторы с биоднородными и инвариантными относительно всех вращений ядрами. Для таких операторов получен критерий применимости проекционного метода в скалярном и матричном случаях и описано предельное поведение ε-псевдоспектров усеченных операторов A_{τ_1,τ_2} при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$.

Ключевые слова: интегральный оператор, усеченный оператор, проекционный метод, спектр, псевдоспектр, C^*-алгебра.

Введение

В современной теории интегральных операторов и в приложениях важную роль играют исследования, посвященные проекционным методам и изучению предельного поведения спектральных характеристик «усеченных» операторов [1–4]. Для многомерных интегральных операторов с однородными ядрами эти исследования отражены в работах [5–7].

В данной работе рассматриваются многомерные интегральные операторы с биоднородными ядрами. Эти операторы введены в работе [8], где для них построен операторнозначный символ, в терминах которого получены критерий нётеровости и топологическая формула для вычисления индекса. Основная цель данной работы — получить критерий применимости проекционного метода к интегральным операторам с биоднородными ядрами и исследовать связь между спектральными характеристиками исходного и «усеченных» операторов.

Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 собраны необходимые предварительные сведения. В § 2 приводится критерий применимости проекционного метода к многомерным интегральным операторам с биоднородными ядрами в матричном и скалярном случаях. Доказательство этого критерия дано в § 3. Отметим, что большинство утверждений этого параграфа являются этапами в доказательстве основного результата. В § 4 описывается предельное поведение псевдоспектров усеченных интегральных операторов с биоднородными ядрами.

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; $dx = dx_1 \dots dx_n$; $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1\}$; $\mathfrak{L}(X)$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X; $\mathrm{Sp}(A)$ — спектр оператора $A \in \mathfrak{L}(X)$; $L_2^s(E)$ — пространство s-мерных вектор-функций $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_s(x))$ с компонентами из $L_2(E)$ и нормой

$$\|\varphi\|_{L_2^s(E)} = \sum_{j=1}^{s} \|\varphi_j\|_{L_2(E)}.$$

§ 1. Предварительные сведения

1. Определение проекционного метода. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathfrak{L}(X)$, $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ $(0 < \tau_1, \tau_2 < 1)$ — семейство проекторов, действующих в X. Будем предполагать, что при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$ семейство $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ сходится в сильной операторной топологии к единичному оператору.

Определение 1.1. Будем говорить, что *к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов* $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to 0$ (и писать $A \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$), если

1) существуют такие числа $\delta_1, \delta_2 \in (0,1)$, что при всех $0 < \tau_1 < \delta_1$ и $0 < \tau_2 < \delta_2$ для любого $y \in X$ уравнение $P_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2} x = P_{\tau_1,\tau_2} y$ имеет единственное решение $x_{\tau_1,\tau_2} \in P_{\tau_1,\tau_2} X$;

2) при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to 0$ решение x_{τ_1,τ_2} стремится по норме пространства X к решению $x \in X$ уравнения $Ax = y$.

Определение 1.1 эквивалентно тому, что оператор A обратим, при $0 < \tau_1 < \delta_1$ и $0 < \tau_2 < \delta_2$ операторы $P_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2}$ как операторы, действующие в $P_{\tau_1,\tau_2} X$, обратимы и операторы $(P_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2})^{-1} P_{\tau_1,\tau_2}$ при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to 0$ сильно сходятся к A^{-1}.

2. Операторы K, P_τ, R_τ. В пространстве $L_2^s(\Omega_n)$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega_n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \Omega_n, \tag{1.1}$$

предполагая, что элементы матрицы-функции $k(x,y) = (k_{j\ell}(x,y))_{j,\ell=1}^s$ определены на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

1°) однородность степени $(-n)$, т. е.

$$k_{j\ell}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k_{j\ell}(x,y) \quad \forall \alpha > 0;$$

2°) инвариантность относительно группы $SO(n)$ вращений пространства $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$k_{j\ell}(\omega(x), \omega(y)) = k_{j\ell}(x,y) \quad \forall \omega \in SO(n);$$

3°) суммируемость, т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k_{j\ell}(e_1, y)| |y|^{-n/2}\,dy < \infty, \quad e_1 = (1, 0, \ldots, 0).$$

Теория таких операторов достаточно полно изложена в монографии [9]. В частности, показано, что оператор K ограничен в $L_2^s(\Omega_n)$.

Далее, определим в пространстве $L_2^s(\Omega_n)$ проектор P_τ $(0 < \tau < 1)$ формулой

$$(P_\tau\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau < |x| < 1, \\ 0, & |x| \leqslant \tau. \end{cases} \tag{1.2}$$

Нетрудно видеть, что $s\text{-}\lim\limits_{\tau\to 0} P_\tau = I$. Рассмотрим также оператор R_τ $(0 < \tau < 1)$, который зададим равенством

$$(R_\tau\varphi)(x) = \begin{cases} \left(\frac{\tau}{|x|^2}\right)^{n/2} \varphi\left(\tau \frac{x}{|x|^2}\right), & \tau < |x| < 1, \\ 0, & |x| \leqslant \tau. \end{cases} \tag{1.3}$$

В [7] установлены следующие свойства оператора R_τ:

1) $R_\tau^2 = P_\tau$, $P_\tau R_\tau = R_\tau P_\tau = R_\tau$;

2) $\|R_\tau\| = 1$;

3) операторы R_τ и R_τ^* слабо сходятся к нулю при $\tau \to 0$.

Предложение 1.1. *Если K — оператор вида* (1.1), *то*

$$R_\tau K R_\tau = P_\tau \widetilde{K} P_\tau,$$

где оператор $\widetilde{K}$ определяется равенством

$$(\widetilde{K}\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega_n} k(y,x)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \Omega_n.$$

Из предложения 1.1, в частности, следует, что $s\text{-}\lim\limits_{\tau\to 0} R_\tau K R_\tau = \widetilde{K}$.

§ 2. Критерий применимости проекционного метода

В пространстве $L_2^s(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})$ рассмотрим оператор

$$(A\varphi)(x,y) = \lambda\varphi(x,y) + \lambda_1 \int\limits_{\Omega_{n_1}} k_1(x,t)\varphi(t,y)\,dt$$
$$+ \lambda_2 \int\limits_{\Omega_{n_2}} k_2(y,t)\varphi(x,t)\,dt + \int\limits_{\Omega_{n_1}} \int\limits_{\Omega_{n_2}} k_3(x,t)k_4(y,z)\varphi(t,z)\,dtdz,$$

где $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, а элементы матрицы-функции $k_j(x,y)$ $(j = 1,2,3,4)$ удовлетворяют условиям $1°$–$3°$ (степень однородности равна $(-n_1)$, если $j = 1,3$, и $(-n_2)$, если $j = 2,4$).

Используя тензорное произведение, запишем оператор A в виде

$$A = \lambda(I_1 \otimes I_2) + \lambda_1(K_1 \otimes I_2) + \lambda_2(I_1 \otimes K_2) + (K_3 \otimes K_4), \tag{2.1}$$

где K_j $(j = 1,2,3,4)$ — оператор вида (1.1), причем I_1, K_1, K_3 действуют в $L_2^s(\Omega_{n_1})$, а I_2, K_2, K_4 действуют в $L_2^s(\Omega_{n_2})$.

Наша задача — получить критерий применимости к оператору A проекционного метода по системе проекторов $\{P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}\}$, где P_{τ_j} — проектор (1.2), действующий в пространстве $L_2^s(\Omega_{n_j})$, $j = 1,2$.

В пространстве $L_2^s(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})$ рассмотрим три оператора:

$$A_1 = \lambda(I_1 \otimes I_2) + \lambda_1(\widetilde{K}_1 \otimes I_2) + \lambda_2(I_1 \otimes K_2) + (\widetilde{K}_3 \otimes K_4), \tag{2.2}$$

$$A_2 = \lambda(I_1 \otimes I_2) + \lambda_1(K_1 \otimes I_2) + \lambda_2(I_1 \otimes \widetilde{K}_2) + (K_3 \otimes \widetilde{K}_4), \tag{2.3}$$

$$A_{12} = \lambda(I_1 \otimes I_2) + \lambda_1(\widetilde{K}_1 \otimes I_2) + \lambda_2(I_1 \otimes \widetilde{K}_2) + (\widetilde{K}_3 \otimes \widetilde{K}_4), \tag{2.4}$$

где $\widetilde{K}_j$ — оператор вида (1.4). Учитывая, что $s\text{-}\lim\limits_{\tau_j\to 0} P_{\tau_j} = I_j$, и используя предложение 1.1, получим

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\, A\, (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) = A, \tag{2.5}$$

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\, A\, (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) = A_1, \tag{2.6}$$

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\, A\, (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) = A_2, \tag{2.7}$$

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\, A\, (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) = A_{12}, \tag{2.8}$$

где R_{τ_j} — оператор вида (1.3), действующий в $L_2^s(\Omega_{n_j})$.

Одним из основных результатов работы является следующая

Теорема 2.1. *Для того чтобы $A \in \Pi\{P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы операторы A, A_1, A_2, A_{12} были обратимы в $\mathfrak{L}\big(L_2^s(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})\big)$.*

Доказательство этой теоремы будет дано в § 3.

Установим теперь критерий применимости проекционного метода к скалярному оператору A, действующему в $L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})$.

Следствие 2.1. *Пусть A — скалярный оператор вида* (2.1). *Для того чтобы $A \in \Pi\{P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы операторы A и A_1 (или A_2) были обратимы в $\mathfrak{L}(L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2}))$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$U_j : L_2(\Omega_{n_j}) \to L_2(\Omega_{n_j}), \quad (U_j\varphi)(x) = \overline{\varphi(x)}, \tag{2.9}$$

где $j = 1, 2$. Очевидно, что $U_j^2 = I_j$ и $U_j\widetilde{K}U_j = K^*$. Тогда

$$(U_1 \otimes U_2)A_{12}(U_1 \otimes U_2) = A^*.$$

Отсюда следует, что оператор A_{12} обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор A. Далее, несложно проверяется равенство

$$((U_1 \otimes I_2)A_1(U_1 \otimes I_2))^* = (I_1 \otimes U_2)A_2(I_1 \otimes U_2),$$

из которого вытекает одновременная обратимость операторов A_1 и A_2. $\square$

§ 3. Доказательство теоремы 2.1

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех семейств $\{B_{\tau_1,\tau_2}\}$ операторов B_{τ_1,τ_2}, действующих в $(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\big(L_2^s(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})\big)$, таких, что

$$\|\{B_{\tau_1,\tau_2}\}\| := \sup_{0<\tau_1,\tau_2<1} \|B_{\tau_1,\tau_2}\| < \infty. \tag{3.1}$$

Относительно операций

$$\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \{C_{\tau_1,\tau_2}\} := \{B_{\tau_1,\tau_2} + C_{\tau_1,\tau_2}\}, \quad \{B_{\tau_1,\tau_2}\}\{C_{\tau_1,\tau_2}\} := \{B_{\tau_1,\tau_2}C_{\tau_1,\tau_2}\},$$

$$\alpha\{B_{\tau_1,\tau_2}\} := \{\alpha B_{\tau_1,\tau_2}\}, \quad \{B_{\tau_1,\tau_2}\}^* := \{B^*_{\tau_1,\tau_2}\}$$

и нормы (3.1) множество $\mathfrak{F}$ образует C^*-алгебру. Нетрудно видеть, что множество

$$\mathfrak{F}_0 = \{\{C_{\tau_1,\tau_2}\} \in \mathfrak{F} : \lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \|C_{\tau_1,\tau_2}\| = 0\}$$

является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда фактор-алгебра $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$ является C^*-алгеброй, причем норма элемента $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ определяется равенством

$$\|\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0\|_{\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0} = \varlimsup_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \|B_{\tau_1,\tau_2}\|. \tag{3.2}$$

Пусть A — оператор вида (2.1). Положим

$$A_{\tau_1,\tau_2} = (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})A(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}). \tag{3.3}$$

Следующее предложение хорошо известно в теории проекционных методов (см., например, [2, с. 278]).

Лемма 3.1. *Для того чтобы $A \in \Pi\{P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был обратим в $\mathfrak{L}\big(L_2^s(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})\big)$, а элемент $\{A_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ был обратим в алгебре $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$.*

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую C^*-подалгебру C^*-алгебры $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$, содержащую все элементы вида $\{A_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$, где $\{A_{\tau_1,\tau_2}\}$ — семейство вида (2.1). Она представляет собой замыкание по норме (3.2) множества

$$\mathfrak{A}_0 = \Big\{\Big\{\sum_i \prod_j (A_{ij})_{\tau_1,\tau_2}\Big\} + \mathfrak{F}_0\Big\},$$

где суммы и произведения конечны. Поскольку C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ является наполненной подалгеброй C^*-алгебры $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$, лемму 3.1 можно переформулировать следующим образом.

Лемма 3.2. *Для того чтобы $A \in \Pi\{P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был обратим в $\mathfrak{L}\big(L_2^s(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})\big)$, а элемент $\{A_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ был обратим в алгебре $\mathfrak{A}$.*

Приступим к изучению условий обратимости в алгебре $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ наименьшую C^*-подалгебру C^*-алгебры $\mathfrak{L}\big(L_2^s(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})\big)$, содержащую все операторы A вида (2.1). Пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех компактных операторов, содержащихся в алгебре $\mathfrak{K}$. Очевидно, что $\mathfrak{T}$ — замкнутый двусторонний идеал алгебры $\mathfrak{K}$. Тогда фактор-алгебра $\mathfrak{K}/\mathfrak{T}$ является C^*-алгеброй.

Лемма 3.3. *Пусть $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A}$. Тогда пределы*

$$B = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\, B_{\tau_1,\tau_2} (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}), \tag{3.4}$$

$$B_1 = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\, B_{\tau_1,\tau_2} (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}), \tag{3.5}$$

$$B_2 = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\, B_{\tau_1,\tau_2} (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}), \tag{3.6}$$

$$B_{12} = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\, B_{\tau_1,\tau_2} (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) \tag{3.7}$$

существуют и принадлежат алгебре $\mathfrak{K}$.

Доказательство. Так как множество $\mathfrak{A}_0$ всюду плотно в алгебре $\mathfrak{A}$, то доказательство достаточно провести, полагая, что

$$B_{\tau_1,\tau_2} = \sum_i \prod_j (A_{ij})_{\tau_1,\tau_2},$$

где A_{ij} — операторы вида (2.1). Тогда, используя (2.8), имеем

$$\begin{aligned} B_{12} &= s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) \Big(\sum_i \prod_j (A_{ij})_{\tau_1,\tau_2}\Big) (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) \\ &= s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \Big(\sum_i \prod_j (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) A_{ij} (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\Big) = \sum_i \prod_j (A_{ij})_{12}. \end{aligned}$$

Аналогично с использованием (2.5)–(2.7) доказывается, что

$$B = \sum_i \prod_j A_{ij}, \quad B_1 = \sum_i \prod_j (A_{ij})_1, \quad B_2 = \sum_i \prod_j (A_{ij})_2.$$

Очевидно, что все четыре предела принадлежат алгебре $\mathfrak{K}$. $\square$

Далее, рассмотрим множество

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} = \{\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A} : B_{\tau_1,\tau_2} &= (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})T(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \\ &+ (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})T_1(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) + (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})T_2(P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) \\ &+ (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})T_{12}(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}),\ \text{где } T, T_1, T_2, T_{12} \in \mathfrak{T}\}.\end{aligned}$$

Лемма 3.4. *Множество $\mathfrak{I}$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 7.9 книги [2].

Из леммы 3.4 вытекает, что фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ является C^*-алгеброй. Это позволяет получить следующее условие обратимости в алгебре $\mathfrak{A}$.

Лемма 3.5. *Пусть $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A}$. Элемент $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда операторы B, B_1, B_2, B_{12}, определяемые формулами* (3.4)–(3.7), *обратимы в $\mathfrak{L}(L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2}))$ и элемент $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I}$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$.*

Доказательство. 1. Пусть элемент $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}$. Это означает, что существуют такие $\delta_1, \delta_2 \in (0,1)$, что для всех $0 < \tau_1 < \delta_1$ и $0 < \tau_2 < \delta_2$ операторы B_{τ_1,τ_2}, действующие в $(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\big(L_2^s(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})\big)$, обратимы и

$$M := \sup_{\substack{0<\tau_1<\delta_1 \\ 0<\tau_2<\delta_2}} \big\|B^{-1}_{\tau_1,\tau_2}\big\| < \infty.$$

Докажем, что операторы B, B_1, B_2 и B_{12} обратимы. Покажем, например, что обратим оператор B_{12}. Для всех $0 < \tau_1 < \delta_1$, $0 < \tau_2 < \delta_2$ и для любой функции $\varphi \in L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})$ имеем

$$(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\varphi = \big[(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})B^{-1}_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\big]\big[(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})B_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\varphi\big].$$

Отсюда следует, что

$$\|(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\varphi\|_2 \leqslant M\|(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})B_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\varphi\|_2.$$

Переходя к пределу при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$ и учитывая (3.7), получим неравенство $\|\varphi\|_2 \leqslant M\|B_{12}\varphi\|_2$. Аналогично устанавливается, что $\|\varphi\|_2 \leqslant M\|B^*_{12}\varphi\|_2$. Следовательно, оператор B_{12} обратим. Обратимость операторов B, B_1 и B_2 доказывается аналогично с учетом (3.4)–(3.6).

Наконец, из обратимости элемента $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ в алгебре $\mathfrak{A}$ сразу вытекает обратимость элемента $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I}$ в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$.

2. Обратно, пусть обратимы операторы B, B_1, B_2, B_{12} и элемент $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I}$. Тогда найдется такой элемент $\{D_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A}$, что

$$\begin{aligned}B_{\tau_1,\tau_2}D_{\tau_1,\tau_2} &= P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2} + (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})T(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \\ &+ (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})T_1(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) + (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})T_2(P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) \\ &+ (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})T_{12}(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) + C_{\tau_1,\tau_2}, \qquad (3.8)\end{aligned}$$

где $T, T_1, T_2, T_{12} \in \mathfrak{T}$, а $\{C_{\tau_1,\tau_2}\} \in \mathfrak{F}_0$. Так как операторы $R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}$, $P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}$ и $R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}$ слабо сходятся к нулю при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$, а T_1, T_2 и T_{12} — компактные операторы, то операторы $T_1(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})$, $T_2(P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})$ и $T_{12}(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})$ сильно сходятся к нулю. Поэтому, переходя в (3.8) к пределу в сильной операторной топологии при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$, получим $BD = I + T$, где $I = I_1 \otimes I_2$.

Далее, умножая равенство (3.8) слева и справа на $R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}$, учитывая, что $R^2_{\tau_j} = P_{\tau_j}$, и переходя к пределу при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$, получим $B_1 D_1 = I + T_1$. Аналогично доказывается, что $B_2 D_2 = I + T_2$, $B_{12} D_{12} = I + T_{12}$. Нетрудно видеть, что операторы

$$\begin{gathered} L := B^{-1} - D, \quad L_1 := B_1^{-1} - D_1, \\ L_2 := B_2^{-1} - D_2, \quad L_{12} := B_{12}^{-1} - D_{12} \end{gathered} \tag{3.9}$$

принадлежат $\mathfrak{T}$. Положим

$$\begin{aligned} D'_{\tau_1,\tau_2} = D_{\tau_1,\tau_2} &+ (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) L (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) + (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) L_1 (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \\ &+ (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) L_2 (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) + (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) L_{12} (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}). \end{aligned}$$

Учитывая формулу (3.8), имеем

$$\begin{aligned} B_{\tau_1,\tau_2} D'_{\tau_1,\tau_2} &= P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2} + (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})(T + B_{\tau_1,\tau_2} L)(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \\ &\quad + (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})(T_1 + (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) B_{\tau_1,\tau_2} (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) L_1)(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \\ &\quad + (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})(T_2 + (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) B_{\tau_1,\tau_2} (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) L_2)(P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) \\ &\quad + (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})(T_{12} + (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) B_{\tau_1,\tau_2} (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) L_{12})(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) + C_{\tau_1,\tau_2} \\ &= P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2} + (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})(T + BL)(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \\ &\quad + (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})(T_1 + B_1 L_1)(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \\ &\quad + (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})(T_2 + B_2 L_2)(P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) \\ &\quad + (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})(T_{12} + B_{12} L_{12})(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) + C'_{\tau_1,\tau_2} + C_{\tau_1,\tau_2}, \end{aligned}$$

где $\{C'_{\tau_1,\tau_2}\} \in \mathfrak{F}_0$. Используя равенства (3.9), получаем

$$B_{\tau_1,\tau_2} D'_{\tau_1,\tau_2} = P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2} + C'_{\tau_1,\tau_2} + C_{\tau_1,\tau_2}.$$

Последнее означает, что элемент $\{D'_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ является правым обратным для $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$. Аналогично доказывается обратимость слева. $\square$

Лемма 3.6. *Отображение*

$$\gamma : \mathfrak{A}/\mathfrak{I} \to \mathfrak{K}/\mathfrak{T}, \quad \{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I} \to B + \mathfrak{T},$$

где $B = s\text{-}\lim\limits_{\substack{\tau_1 \to 0 \\ \tau_2 \to 0}} B_{\tau_1,\tau_2}$, *является изометрическим* $*$*-изоморфизмом.*

Доказательство. Сначала покажем, что отображение γ определено корректно. Для этого предварительно докажем, что для любого элемента $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ справедливо неравенство

$$\|B + \mathfrak{T}\|_{\mathfrak{K}/\mathfrak{T}} \leqslant \|\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}}. \tag{3.10}$$

В самом деле, по определению фактор-нормы для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент

$$\begin{aligned} \{D_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 = \{&(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \widetilde{T} (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) + (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \widetilde{T}_1 (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \\ &+ (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) \widetilde{T}_2 (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) + (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}) \widetilde{T}_{12} (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\} + \mathfrak{F}_0, \end{aligned}$$

принадлежащий $\mathfrak{I}$, что

$$\|\{B_{\tau_1,\tau_2} + D_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0\|_{\mathfrak{A}} < \|\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} + \varepsilon.$$

Учитывая определение нормы в алгебре $\mathfrak{A}$ (см. (3.2)), имеем

$$\overline{\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}}}\|B_{\tau_1,\tau_2}+D_{\tau_1,\tau_2}\| < \|\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}}+\varepsilon. \tag{3.11}$$

Поскольку $B+\widetilde{T} = s\text{-}\lim\limits_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}}(B_{\tau_1,\tau_2}+D_{\tau_1,\tau_2})$, то

$$\|B+\widetilde{T}\| \leqslant \underline{\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}}}\|B_{\tau_1,\tau_2}+D_{\tau_1,\tau_2}\|. \tag{3.12}$$

Применяя (3.12) и (3.11), получаем

$$\|B+\mathfrak{T}\|_{\mathfrak{K}/\mathfrak{T}} \leqslant \|B+\widetilde{T}\| < \big\|\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I}\big\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}}+\varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε приходим к (3.10).

Пусть теперь $\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I} = \{B'_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I}$. В силу (3.10) имеем $\|B-B'+\mathfrak{T}\|_{\mathfrak{K}/\mathfrak{T}}=0$. Следовательно, $B-B'\in\mathfrak{T}$. Но тогда $B+\mathfrak{T}=B'+\mathfrak{T}$. Это и доказывает, что отображение γ определено корректно.

Непосредственно проверяется, что отображение γ — $*$-гомоморфизм.

Покажем, что γ — сюръективное отображение. Заметим, что множество

$$(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0 = \Big\{\Big\{\sum_i\prod_j (A_{ij})_{\tau_1,\tau_2}\Big\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I}\Big\},$$

где A_{ij} — оператор вида (2.1), а суммы и произведения конечны, всюду плотно в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$. Тогда справедливо вложение

$$\gamma((\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0)\subset\gamma(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})\subset\mathfrak{K}/\mathfrak{T}. \tag{3.13}$$

Поскольку множество

$$\gamma((\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0) = \Big\{\sum_i\prod_j A_{ij}+\mathfrak{T}\Big\}$$

всюду плотно в алгебре $\mathfrak{K}/\mathfrak{T}$, переходя в (3.13) к замыканию, получаем, что $\overline{\gamma(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})}=\mathfrak{K}/\mathfrak{T}$. Так как образ $*$-гомоморфизма всегда замкнут (см., например, [10, с. 106]), то $\gamma(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})=\mathfrak{K}/\mathfrak{T}$.

Докажем, что γ — инъективное отображение. Для этого покажем, что $\ker(\gamma)=\mathfrak{I}$. Предположим, что существует такой элемент $\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I}\neq\mathfrak{I}$, что $\gamma(\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I})=\mathfrak{T}$.

Пусть вначале $\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I}\in(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0$, т. е.

$$B_{\tau_1,\tau_2}=\sum_i\prod_j(A_{ij})_{\tau_1,\tau_2},$$

причем среди операторов A_{ij} есть хотя бы один ненулевой. Тогда

$$\gamma(\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I})=\sum_i\prod_j A_{ij}+\mathfrak{T}=\mathfrak{T}.$$

Следовательно, оператор $B=\sum\limits_i\prod\limits_j A_{ij}$ компактен, что невозможно.

Далее, пусть $\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I}\in(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})\setminus(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0$. Тогда найдется последовательность $\big\{\{B^{(m)}_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I}\big\}\subset(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0$ такая, что

$$\big\|\big(\{B^{(m)}_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I}\big)-(\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0+\mathfrak{I})\big\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}}\to 0 \quad \text{при } m\to\infty. \tag{3.14}$$

В силу неравенства (3.10) $\|B^{(m)}+\mathfrak{T}\|_{\mathfrak{K}/\mathfrak{T}} \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда легко следует, что $\|B^{(m)}\| \to 0$. Но тогда

$$\|\{(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})B^{(m)}(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Поскольку $\{B^{(m)}_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I} = \{(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})B^{(m)}(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I}$, имеем

$$\big\|\{B^{(m)}_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I}\big\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \tag{3.15}$$

Из (3.15) и (3.14) следует, что $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$, но это противоречит предположению. Таким образом, $\ker(\gamma) = \mathfrak{I}$.

Так как γ — биективное отображение, то γ есть $*$-изоморфизм. А всякий $*$-изоморфизм является изометрией. $\square$

Следствие 3.1. *Элемент* $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{I}$ *обратим в алгебре* $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ *тогда и только тогда, когда оператор* B *нётеров.*

Доказательство сразу получается из леммы 3.6 с учетом результатов работы [8].

Лемма 3.5 и следствие 3.1 позволяют в удобной форме описать условия обратимости в алгебре $\mathfrak{A}$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A}$. *Для обратимости элемента* $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ *в алгебре* $\mathfrak{A}$ *необходимо и достаточно, чтобы операторы* B, B_1, B_2, B_{12}, *определяемые равенствами* (3.4)–(3.7), *были обратимы в* $\mathfrak{L}\big(L^s_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})\big)$.

Доказательство теоремы 2.1. По лемме 3.2 оператор A принадлежит $\Pi\{P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}\}$ тогда и только тогда, когда он обратим и элемент $\{A_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}$. Но в силу теоремы 3.1 последнее равносильно обратимости операторов A, A_1, A_2, A_{12}. $\square$

§ 4. Псевдоспектры

Нам потребуется одно вспомогательное утверждение из теории C^*-алгебр.

Предложение 4.1 [4]. *Пусть* $\mathfrak{B}_1$ *и* $\mathfrak{B}_2$ — C^**-алгебры с единицей и* $*$*-гомоморфизм* $\alpha\colon \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ *сохраняет спектры, т. е. для любого элемента* $b \in \mathfrak{B}_1$ *его спектр совпадает со спектром элемента* $\alpha(b)$. *Тогда* α *сохраняет нормы, т. е.* $\|b\|_{\mathfrak{B}_1} = \|\alpha(b)\|_{\mathfrak{B}_2}$.

Лемма 4.1. *Пусть* $\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A}$. *Тогда предел* $\lim\limits_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \|B_{\tau_1,\tau_2}\|$ *существует и справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \|B_{\tau_1,\tau_2}\| = \max\{\|B\|, \|B_1\|, \|B_2\|, \|B_{12}\|\},$$

где B, B_1, B_2 *и* B_{12} *определяются равенствами* (3.4)–(3.7).

Доказательство. Из соотношения (3.7) следует, что

$$\|B_{12}\| \leqslant \varliminf_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \|(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})B_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\| \leqslant \varliminf_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \|B_{\tau_1,\tau_2}\|.$$

Рассуждая аналогичным образом, из (3.4)–(3.6) получаем неравенство

$$\max\{\|B\|, \|B_1\|, \|B_2\|, \|B_{12}\|\} \leqslant \varliminf_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \|B_{\tau_1,\tau_2}\|.$$

Докажем, что

$$\max\{\|B\|,\|B_1\|,\|B_2\|,\|B_{12}\|\} = \varlimsup_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \|B_{\tau_1,\tau_2}\|. \tag{4.1}$$

Рассмотрим C^*-алгебру $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}\oplus\mathfrak{K}\oplus\mathfrak{K}\oplus\mathfrak{K}$ с нормой

$$\|(C_1,C_2,C_3,C_4)\|_{\overline{\mathfrak{K}}} = \max\{\|C_1\|,\|C_2\|,\|C_3\|,\|C_4\|\}.$$

Нетрудно видеть, что отображение

$$\delta:\mathfrak{A}\to\overline{\mathfrak{K}},\quad \{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0 \to (B,B_1,B_2,B_{12})$$

является $*$-гомоморфизмом. Кроме того, из теоремы 3.1 следует, что спектр элемента $\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0$ в алгебре $\mathfrak{A}$ совпадает со спектром элемента (B,B_1,B_2,B_{12}) в алгебре $\overline{\mathfrak{K}}$. Применяя предложение 4.1, получаем

$$\|\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0\|_{\mathfrak{A}} = \|(B,B_1,B_2,B_{12})\|_{\overline{\mathfrak{K}}}.$$

А это с учетом (3.2) и есть равенство (4.1). □

Теорема 4.1. *Пусть A, A_1, A_2, A_{12} — операторы вида* (2.1)–(2.4) *соответственно. Если операторы A, A_1, A_2, A_{12} обратимы, то найдутся такие числа $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$, что для всех $0<\tau_1<\delta_1$ и $0<\tau_2<\delta_2$ операторы A_{τ_1,τ_2} обратимы в $(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})\big(L_2^s(\Omega_{n_1}\times\Omega_{n_2})\big)$, причем*

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \big\|A^{-1}_{\tau_1,\tau_2}\big\| = \max\big\{\|A^{-1}\|,\big\|A_1^{-1}\big\|,\big\|A_2^{-1}\big\|,\big\|A_{12}^{-1}\big\|\big\}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Так как операторы A, A_1, A_2, A_{12} обратимы, по теореме 2.1 $A\in\Pi\{P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}\}$. Тогда найдутся такие числа $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$, что для всех $0<\tau_1<\delta_1$ и $0<\tau_2<\delta_2$ операторы A_{τ_1,τ_2} обратимы в $(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})\big(L_2^s(\Omega_{n_1}\times\Omega_{n_2})\big)$ и элемент $\{A_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}$. Рассмотрим $\big\{A^{-1}_{\tau_1,\tau_2}\big\}+\mathfrak{F}_0\in\mathfrak{A}$. Поскольку $A\in\Pi\{P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}\}$, по определению проекционного метода

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} A^{-1}_{\tau_1,\tau_2}(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}) = A^{-1}.$$

Далее, заметим, что оператор $(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})A_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})$ обратим, причем

$$((R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})A_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}))^{-1} = (R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})A^{-1}_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}).$$

Используя (2.6), получим

$$\begin{aligned}
&s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})A^{-1}_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})\\
&\qquad = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} ((R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})A_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}))^{-1}(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}) = A_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Аналогично с учетом (2.7), (2.8) доказывается, что

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (P_{\tau_1}\otimes R_{\tau_2})A^{-1}_{\tau_1,\tau_2}(P_{\tau_1}\otimes R_{\tau_2}) = A_2^{-1},$$

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1}\otimes R_{\tau_2})A^{-1}_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes R_{\tau_2}) = A_{12}^{-1}.$$

Применяя к элементу $\big\{A^{-1}_{\tau_1,\tau_2}\big\}+\mathfrak{F}_0$ лемму 4.1, получаем (4.2). □

Прежде чем доказать основную теорему данного параграфа, сформулируем два определения.

Определение 4.1. Пусть $\{E_{\tau_1,\tau_2}\}$ — семейство множеств $E_{\tau_1,\tau_2} \subset \mathbb{C}$ ($0 < \tau_1, \tau_2 < 1$). *Пределом* семейства множеств $\{E_{\tau_1,\tau_2}\}$ при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$ назовем множество E, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для каждого из которых найдутся убывающие последовательности $\{\tau_{1s}\}$ и $\{\tau_{2s}\}$ такие, что $\lim\limits_{s\to\infty} \tau_{1s} = \lim\limits_{s\to\infty} \tau_{2s} = 0$, и последовательность $\{\lambda_s\} \subset \mathbb{C}$ такая, что $\lambda_s \in E_{\tau_{1s},\tau_{2s}}$ и $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda_s = \lambda$ (обозначается $E = \lim\limits_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} E_s$).

Определение 4.2. Пусть X — банахово пространство, $B \in \mathfrak{L}(X)$ и $\varepsilon > 0$. *ε-Псевдоспектром оператора B* называется множество

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \mathrm{Sp}(B) \text{ или } \|(B - \lambda I)^{-1}\| \geqslant 1/\varepsilon\}. \tag{4.3}$$

Полагая $\|(B - \lambda I)^{-1}\| = \infty$, если оператор $B - \lambda I$ необратим, перепишем (4.3) в виде

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \|(B - \lambda I)^{-1}\| \geqslant 1/\varepsilon\}.$$

Теорема 4.2. *Пусть A — оператор вида* (2.1). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2}) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(A) \cup \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_1) \cup \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_2) \cup \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{12}), \tag{4.4}$$

где операторы A_1, A_2 и A_{12} определяются равенствами (2.2)–(2.4).

Доказательство. Известно (см. [4, 11]), что

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(A) \subset \lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2}).$$

(В [4, 11] этот факт доказан в общем виде.) Тогда из (2.6) следует, что

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_1) \subset \lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}_\varepsilon((R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})A_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})). \tag{4.5}$$

Так как

$$\begin{aligned}(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})A_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) &- \lambda(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) \\ &= (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})(A_{\tau_1,\tau_2} - \lambda(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}),\end{aligned}$$

оператор $(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})A_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) - \lambda(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $A_{\tau_1,\tau_2} - \lambda(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})$, причем

$$\|((R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})A_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}) - \lambda(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))^{-1}\| = \|(A_{\tau_1,\tau_2} - \lambda(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))^{-1}\|.$$

Следовательно, $\mathrm{Sp}_\varepsilon((R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})A_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2})$. Тогда (4.5) принимает вид

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_1) \subset \lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2}).$$

Аналогично доказываются вложения

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_2) \subset \lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2}), \quad \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{12}) \subset \lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2}).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(A)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_1)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_2)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{12})\subset\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}}\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2}).\tag{4.6}$$

Докажем обратное вложение. Пусть $\lambda_0\notin\mathrm{Sp}_\varepsilon(A)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_1)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_2)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{12})$. Тогда операторы λ_0I-A, λ_0I-A_1, λ_0I-A_2 и λ_0I-A_{12}, где $I=I_1\otimes I_2$, обратимы и

$$\max\{\|(\lambda_0I-A)^{-1}\|,\|(\lambda_0I-A_1)^{-1}\|,\|(\lambda_0I-A_2)^{-1}\|,\|(\lambda_0I-A_{12})^{-1}\|\}=\frac{1}{\varepsilon}-2\delta,$$

где δ — некоторое положительное число. Так как оператор λ_0I-A имеет ту же структуру, что и оператор A, то по теореме 4.1 найдутся такие числа $\delta_1,\delta_2\in(0,1)$, что для всех $0<\tau_1<\delta_1$, $0<\tau_2<\delta_2$ операторы $\lambda_0(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})-A_{\tau_1,\tau_2}$ обратимы и $\|(\lambda_0(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})-A_{\tau_1,\tau_2})^{-1}\|<1/\varepsilon-\delta$. Если теперь $\mu\in\mathbb{C}$ таково, что $|\mu-\lambda_0|<\varepsilon\delta(1/\varepsilon-\delta)^{-1}$, то

$$\|(A_{\tau_1,\tau_2}-\mu(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}))^{-1}\|=\|((\lambda_0-\mu)(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})-(\lambda_0(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})-A_{\tau_1,\tau_2}))^{-1}\|$$
$$\leqslant\frac{\|(\lambda_0(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})-A_{\tau_1,\tau_2})^{-1}\|}{1-|\lambda_0-\mu|\|(\lambda_0(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})-A_{\tau_1,\tau_2})^{-1}\|}<\frac{1/\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon\delta(1/\varepsilon-\delta)^{-1}(1/\varepsilon-\delta)}=\frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно, $\mu\notin\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2})$. Тогда $\lambda_0\notin\lim\limits_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}}\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2})$. Таким образом, доказано вложение

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}}\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2})\subset\mathrm{Sp}_\varepsilon(A)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_1)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_2)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{12}).\tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) следует (4.4). Теорема доказана. $\square$

В заключение рассмотрим скалярный оператор A, действующий в пространстве $L_2(\Omega_{n_1}\times\Omega_{n_2})$.

Следствие 4.1. *Пусть A — скалярный оператор вида* (2.1). *Тогда для любого $\varepsilon>0$ справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}}\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{\tau_1,\tau_2})=\mathrm{Sp}_\varepsilon(A)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_1)=\mathrm{Sp}_\varepsilon(A)\cup\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_2).\tag{4.8}$$

Доказательство. Рассмотрим изометрический оператор U_j вида (2.9). Так как $\mu I-A_{12}=(U_1\otimes U_2)(\bar\mu I-A^*)(U_1\otimes U_2)$, где $I=I_1\otimes I_2$, то операторы $\mu I-A_{12}$ и $\bar\mu I-A^*$ одновременно обратимы, причем

$$(\mu I-A_{12})^{-1}=(U_1\otimes U_2)(\bar\mu I-A^*)^{-1}(U_1\otimes U_2).$$

Тогда

$$\|(\mu I-A_{12})^{-1}\|=\|(\bar\mu I-A^*)^{-1}\|=\|(\mu I-A)^{-1}\|.$$

Следовательно, $\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_{12})=\mathrm{Sp}_\varepsilon(A)$.

Аналогично с использованием равенства

$$\mu I-A_1=(U_1\otimes I_2)((I_1\otimes U_2)(\mu I-A_2)(I_1\otimes U_2))^*(U_1\otimes I_2)$$

доказывается, что $\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_1)=\mathrm{Sp}_\varepsilon(A_2)$. Тогда из (4.4) следует (4.8). $\square$

Замечание. Отметим, что для спектра аналогичный результат, вообще говоря, не имеет места. В самом деле, в пространстве $L_2(\Omega_{n_1}\times\Omega_{n_2})$ рассмотрим оператор $A=I_1\otimes K$, где K — скалярный оператор вида (1.1). Будем предполагать, что помимо условий 1°–3° ядро $k(x,y)$ оператора K удовлетворяет еще условию

$$k(x,y)=0,\ |y|<|x| \quad (k(x,y)=0,\ |y|>|x|).$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Sp}(K)$ и $\mathrm{Sp}(A_{\tau_1,\tau_2})=\mathrm{Sp}(K_{\tau_2})$. В [7] показано, что $\mathrm{Sp}(K_{\tau_2})=\{0\}$, значит,

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(A_{\tau_1,\tau_2})=\lim_{\tau_2\to 0}\mathrm{Sp}(K_{\tau_2})=\{0\}.$$

Поскольку $\mathrm{Sp}(K)\neq\{0\}$ (см. [7]), имеем $\lim\limits_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(A_{\tau_1,\tau_2})\neq \mathrm{Sp}(A)\cup\mathrm{Sp}(A_1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.

2. *Böttcher A., Silbermann B.* Analysis of Toeplitz operators. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1990.

3. *Hagen R., Roch S., Silbermann B.* Spectral theory of approximation methods for convolution equations. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1995.

4. *Böttcher A.* Pseudospectra and singular values of large convolution operators // J. Integral Equations Appl. 1994. V. 6. P. 267–301.

5. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* Проекционный метод в теории интегральных операторов с однородными ядрами // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 2. С. 163–172.

6. *Авсянкин О. Г.* О применении проекционного метода к парным интегральным операторам с однородными ядрами // Изв. вузов. Математика. 2002. Т. 8. С. 3–7.

7. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* О псевдоспектрах многомерных интегральных операторов с однородными степени $-n$ ядрами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1199–1216.

8. *Авсянкин О. Г., Деундяк В. М.* О вычислении индекса многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами // Докл. РАН. 2003. Т. 391, № 1. С. 7–9.

9. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with involutive operators. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2001.

10. *Мёрфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.

11. *Böttcher A., Grudsky S. M.* Toeplitz matrices, asymptotic linear algebra and functional analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2000.

Статья поступила 17 марта 2005 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
avsyanki@math.rsu.ru