Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 517.9

ИСТИННО НЕЛИНЕЙНОЕ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ГРАТЦА — НУССЕЛЬТА

С. А. Саженков

Аннотация: Изучается квазилинейное ультрапараболическое уравнение 2-го порядка, у которого матрица коэффициентов при вторых производных неотрицательна, зависит от временно́й и пространственных переменных и в случае, когда она диагональна, может менять ранг, а коэффициенты при первых производных могут быть разрывными. Доказывается, что если уравнение априори допускает принцип максимума и удовлетворяет дополнительному условию «истинной нелинейности», то задача Коши с произвольными ограниченными начальными данными имеет по меньшей мере одно энтропийное решение и всякое равномерно ограниченное множество энтропийных решений относительно компактно в L^1_{loc}. Доказательства основаны на введении в рассмотрение и систематическом изучении кинетической формулировки для исследуемого уравнения и на применении модификации H-мер Тартара, предложенной Е. Ю. Пановым.

Ключевые слова: истинная нелинейность, ультрапараболическое уравнение, энтропийное решение, анизотропная диффузия.

§ 1. Введение

Рассматривается задача Коши для квазилинейного уравнения диффузии-конвекции вида

$$u_t + \partial_{x_i} a_i(\mathbf{x}, t, u) - \partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x}, t)\partial_{x_j} b(u)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ t \in (0, T), \tag{1a}$$

с начальными данными, принадлежащими пространству $L^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$u|_{t=0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{1b}$$

В (1) u — это искомая функция, а вектор потока $\mathbf{a} := (a_i)$, диффузионная матрица $A := (a_{ij})$ и диффузионная функция b заданы и удовлетворяют условиям

$$a_i, D_{x_i} a_i \in L^4_{\text{loc}}\big(\mathbb{R}^d_x \times (0, T); C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_u)\big), \quad a_{ij} \in C^2_{\text{loc}}\big(\mathbb{R}^d_x \times [0, T]\big), \tag{2}$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij}(\mathbf{x}, t)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \forall\, \xi, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ t \in [0, T], \tag{3}$$

$$b \in C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad b'(u) > 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00829) и гранта ФАО «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 8247).

Считается, что для уравнения (1) априори гарантируется принцип максимума, т. е. (см., например, [1, гл. I, теорема 2.9]) что для заданных функций выполняется неравенство

$$uD_{x_i}a_i(\mathbf{x},t,u) \geq -c_1u^2 - c_2 \quad \text{при п. в. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T]\ \forall\, u \in \mathbb{R} \tag{5}$$

с некоторыми положительными постоянными c_1 и c_2.

В (1)–(5) и далее в статье используется общепринятое правило суммирования по повторяющимся в произведении индексам. Производная D_{x_i} определена по формуле

$$D_{x_i}g(\mathbf{x},t,u) = (\partial_{x_i}g(\mathbf{x},t,\lambda))|_{\lambda=u(x,t)} \quad \forall\, g \in C^1\big(\mathbb{R}^d_x \times (0,T) \times \mathbb{R}_\lambda\big).$$

В частности, производные ∂_{x_i} и D_{x_i} связаны тождеством

$$\partial_{x_i}g(\mathbf{x},t,u) = D_{x_i}g(\mathbf{x},t,u) + \partial_u g(\mathbf{x},t,u)\partial_{x_i}u.$$

Предполагается, что ранг d_0 матрицы A в общем случае может быть меньше размерности пространства $\mathbb{R}^d_x$, а в случае, когда A — диагональная матрица, т. е. $A = \operatorname{diag}(a_{11}(\mathbf{x},t),\dots,a_{dd}(\mathbf{x},t))$, может меняться в зависимости от $\mathbf{x}$ и t. Таким образом, (1a) является ультрапараболическим уравнением. Такие уравнения возникают в динамике жидкости, теории горения и финансовой математике (см. обзор [2]). Они описывают, в частности, нестационарный перенос материи или тепла в случаях, когда эффект диффузии в некоторых пространственных направлениях пренебрежимо мал по отношению к конвекции [3]. Впервые такие уравнения были рассмотрены в работах Гратца [4] и Нуссельта [5].

В настоящей работе при выполнении дополнительного условия истинной нелинейности (см. ниже условие G) с помощью метода кинетического уравнения и понятия H-меры Тартара доказываются существование ограниченного энтропийного решения задачи Коши для уравнения (1a) и относительная компактность в L^1_{loc} всякого равномерно ограниченного в норме L^∞ множества энтропийных решений уравнения (1a).

Для того чтобы сформулировать понятие ограниченного энтропийного решения, введем обозначение $\Pi := \mathbb{R}^d_x \times (0,T)$ и заметим, что, поскольку уравнение (1a) вырожденное, градиент $\nabla_x u$ возможного решения $u \in L^\infty(\Pi)$ по пространственным переменным может пониматься только в смысле распределений. Однако также заметим, что так как матрица A симметрична и неотрицательна, у нее существует единственный квадратный корень $A^{1/2} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1,\dots,d}$, который также является симметричной и неотрицательной матрицей. Значит, следуя известным методам построения априорных оценок для параболических уравнений (см. [1, гл. III, § 2; гл. V, § 1]) и проводя формальный вывод первого энергетического неравенства для уравнения (1a), можно заключить, что при любой функции $\Phi \in C^\infty_0(\Pi)$ возможное решение u задачи (1) априори должно удовлетворять неравенству

$$\|A^{1/2}\nabla_x(\Phi u)\|_{L^2(\Pi)} \leq c(\Phi),$$

где постоянная $c = c(\Phi)$ не зависит от u. Это означает, что, хотя отдельная производная $\partial_{x_i}u$ при некоторых или даже при всех $i = 1,\dots,d$ может не являться локально суммируемой на Π функцией, линейные комбинации этих производных вида $\alpha_{ij}\partial_{x_j}u$ принадлежат $L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$. Поэтому в определение энтропийного решения следует внести соответствующее требование о частичной суммируемости $\nabla_x u$.

Теперь мы можем определить понятие ограниченного энтропийного решения задачи (1).

Определение 1. Функция $u = u(\mathbf{x}, t)$ называется *энтропийным решением задачи* (1), если она удовлетворяет условиям

$$u \in L^\infty(\Pi), \quad \alpha_{ij}\partial_{x_j} u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi), \quad i = 1, \dots, d, \tag{6}$$

и интегральному энтропийному неравенству

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Pi} (\zeta_t \varphi(u) + \zeta_{x_i} q_i(\mathbf{x}, t, u) - \zeta\varphi'(u) D_{x_i} a_i(\mathbf{x}, t, u) \\ + \zeta D_{x_i} q_i(\mathbf{x}, t, u) + w(u)\partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x}, t)\partial_{x_j}\zeta) \\ - \zeta\varphi''(u) b'(u)(\alpha_{il}(\mathbf{x}, t)\partial_{x_i} u)(\alpha_{lj}(\mathbf{x}, t)\partial_{x_j} u))\, d\mathbf{x}dt + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(u_0)\zeta(\mathbf{x}, 0)\, d\mathbf{x} \geq 0\end{aligned} \tag{7}$$

для любых функций φ, q_i и w таких, что

$$\varphi \in C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\ \varphi''(u) \geq 0,\ \partial_u q_i(\mathbf{x}, t, u) = \varphi'(u)\partial_u a_i(\mathbf{x}, t, u),\ w'(u) = \varphi'(u) b'(u), \tag{8}$$

и для любой неотрицательной функции $\zeta \in C^2(\Pi)$, обращающейся в нуль в окрестности плоскости $\{t = T\}$ и при больших значениях $|\mathbf{x}|$.

Определение 2. Функция u называется *энтропийным решением уравнения* (1a), если для нее справедливо интегральное неравенство (7) при любой функции $\zeta \in C^2_0(\Pi)$.

Кроме (2)–(5) также накладывается следующее требование на функции a_i, a_{ij} и b, называемое условием *истинной нелинейности.*

Условие G. *Для п. в.* $(\mathbf{x}, t) \in \Pi$ *выполнено требование: для любых* $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *таких, что* $|\xi|^2 + \tau^2 = 1$ *и* $a_{ij}(\mathbf{x}, t)\xi_i\xi_j = 0$, *множество*

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \tau + (a_{i\lambda}(\mathbf{x}, t, \lambda) + (1/2) b'(\lambda) a_{ijx_j}(\mathbf{x}, t))\xi_i = 0\}$$

имеет нулевую меру Лебега.

Здесь и далее $\zeta_\lambda = \partial_\lambda \zeta$, $\zeta_{x_i} = \partial_{x_i}\zeta\ \forall\, \zeta = \zeta(\mathbf{x}, t, \lambda)$. Через $\mathbb{S}^d$ будем обозначать единичную сферу в $\mathbb{R}^{d+1}$: $\mathbb{S}^d := \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid |\xi|^2 + \tau^2 = 1\}$.

Следующие две теоремы являются основными результатами настоящей статьи.

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1a) *истинно нелинейно в смысле условия* G. *Пусть для матрицы* A *коэффициентов при вторых производных выполняется одно из двух условий:* (1) *ранг* d_0 *этой матрицы постоянен или* (2) *эта матрица диагональна, т. е.* $A = \mathrm{diag}(a_{11}(\mathbf{x}, t), \dots, a_{dd}(\mathbf{x}, t))$.

Тогда задача (1) *имеет ограниченное энтропийное решение при любых начальных данных* $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1a) *истинно нелинейно в смысле условия G. Пусть для матрицы* A *коэффициентов при вторых производных выполняется одно из двух условий:* (1) *ранг* d_0 *этой матрицы постоянен или* (2) *эта матрица диагональна, т. е.* $A = \mathrm{diag}(a_{11}(\mathbf{x}, t), \dots, a_{dd}(\mathbf{x}, t))$.

Тогда любое ограниченное в $L^\infty(\Pi)$ *множество ограниченных энтропийных решений уравнения* (1a) *относительно компактно в* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$.

Замечание 1. Отметим, что условие (2) в формулировках теорем 1, 2 допускает случай, когда ранг матрицы $A = \mathrm{diag}(a_{11}(\mathbf{x}, t), \dots, a_{dd}(\mathbf{x}, t))$ является переменным.

Истинно нелинейным уравнениям, имеющим вид, схожий с (1a), посвящено множество работ. Один из первых результатов в этом направлении был получен Лаксом [6], который в 1957 г. доказал, что задача Коши для уравнения $u_t + a(u)_x = 0$ имеет энтропийное решение в случае, когда функция $a = a(u)$ выпукла или вогнута. Именно в работе Лакса уравнения, удовлетворяющие условиям типа условия G, были названы *истинно нелинейными* (в английском оригинале *genuinely nonlinear*).

Исследования, проводимые в настоящей работе, по своим целям близки к работам Тартара [7], Лионса, Пертама и Тэдмора [8] и Е. Ю. Панова [9]. В [7] было показано, что всякое ограниченное множество энтропийных решений уравнения $u_t + \partial_{x_i} a_i(\mathbf{x}, t, u) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, относительно компактно в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}^+)$. В [9] этот результат был обобщен на случай произвольной размерности d. В [8] изучались уравнения $u_t + \partial_{x_i} a_i(u) = 0$ и $u_t + \partial_{x_i} a_i(u) - \partial^2_{x_i x_j} a_{ij}(u) = 0$, где матрица (a'_{ij}) неотрицательна, и были доказаны аналогичные результаты об относительной компактности в L^1_{loc}. Заметим, что условие G в настоящей статье является обобщением условий истинной нелинейности, сформулированных в [7–9]. В этих работах условия истинной нелинейности также называются *условиями невырожденности* (в английском оригинале *nondegeneracy conditions*). Заметим еще, что для автономных уравнений, т. е. для таких, у которых диффузионная матрица $A = A(u)$ и вектор потока $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u)$ в явном виде не зависят от $\mathbf{x}$ и t, теория корректности задач Коши в классах ограниченных энтропийных решений в [10, 11] построена полностью, при этом ограничения типа условия истинной нелинейности не накладывались. Изучаемое в настоящей статье уравнение (1a) не автономно в общем случае, и в связи с этим теорема 1 является новым результатом о существовании решений для ультрапараболических уравнений.

Доказательства теорем 1, 2 основаны на применении метода кинетического уравнения, который позволяет сводить квазилинейные уравнения к линейным скалярным уравнениям, решениями которых являются функции «распределений», содержащие дополнительные «кинетические» переменные (см., например, [8, 11–13]). Наряду с этим методом применяется теория H-мер, изначально построенная Тартаром [14] и Жераром [15] и получившая дальнейшее развитие в работе Е. Ю. Панова [9].

§ 2. Кинетическая формулировка уравнения (1a)

Кинетическая формулировка для уравнения (1a) вводится в форме, аналогичной [11].

Задача K. *Требуется отыскать кинетическую функцию $f(\mathbf{x}, t, \lambda)$ и неотрицательные борелевские меры $m, n \in \mathbb{M}(\Pi \times \mathbb{R}_\lambda)$, удовлетворяющие уравнению*

$$f_t + a_{i\lambda}(\mathbf{x}, t, \lambda) f_{x_i} - a_{ix_i}(\mathbf{x}, t, \lambda) f_\lambda - b'(\lambda)\partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x}, t)\partial_{x_j} f) + (m + b'(\lambda)n)_\lambda = 0 \quad \text{(9a)}$$

и условиям

$$f(\mathbf{x}, t, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \geq u(\mathbf{x}, t), \\ 0 & \text{при } \lambda < u(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad \text{(9b)}$$

$$\operatorname{spt} m \subset \{(\mathbf{x}, t, \lambda) \in \Pi \times \mathbb{R}_\lambda : |\lambda| \leq \|u\|_{L^\infty}\}, \quad \text{(9c)}$$

$$dn(\mathbf{x}, t, \lambda) = |A^{1/2} \nabla_x u(\mathbf{x}, t)|^2 d\gamma_{u(x,t)}(\lambda) \, d\mathbf{x} dt \quad \text{(9d)}$$

с некоторой функцией $u \in L^\infty(\Pi)$ *такой, что* $A^{1/2}\nabla_x u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$.

Здесь через $\mathbb{M}(X)$ обозначено банахово пространство ограниченных мер Радона на некотором множестве X. В (9d) через $\gamma_{u(x,t)}$ обозначена параметризованная мера Дирака на $\mathbb{R}_\lambda$, сосредоточенная в точке $\lambda = u(\mathbf{x}, t)$.

Кинетическое уравнение (9a) понимается в смысле распределений, т. е. в смысле интегрального равенства

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} (\zeta_t + a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda)\zeta_{x_i} - a_{ix_i}(\mathbf{x},t,\lambda)\partial_\lambda\zeta + b'(\lambda)\partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x},t)\partial_{x_j}\zeta))f\,d\mathbf{x}dtd\lambda$$
$$+ \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} \zeta_\lambda b'(\lambda)\,dn(\mathbf{x},t,\lambda) + \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} \zeta_\lambda\,dm(\mathbf{x},t,\lambda) = 0, \quad (10)$$

в котором $\zeta \in C_0^2(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ — произвольная пробная функция.

Замечание 2. В силу очевидного представления

$$\varphi(u(\mathbf{x},t)) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(\lambda)f(\mathbf{x},t,\lambda)\,d\lambda \quad \forall\,\varphi\in C_0^1(\mathbb{R}), \quad (11)$$

тройка (f,m,n) является решением задачи K тогда и только тогда, когда функция u, фигурирующая в (9b)–(9d), является ограниченным энтропийным решением уравнения (1a).

Дальнейшее содержание статьи построено следующим образом. В § 3 вводится в рассмотрение семейство H-мер, соответствующих произвольной слабо сходящейся последовательности решений задачи K. В § 4 формулируется и в § 5–7 устанавливается принцип локализации для H-мер (теорема 3 и следствие 1). В § 8 с помощью этого принципа проводится доказательство теоремы 2. В § 9 доказывается теорема 1.

§ 3. *H*-меры Тартара

Пусть (f^k, m^k, n^k), $k\in\mathbb{N}$, — последовательность решений задачи K такая, что множество значений переменной λ, при которых функции f^k терпят скачки, равномерно ограничено в некотором интервале $[-u_*, u_*]$, $u_* = \mathrm{const} > 0$. Это означает, что соответствующая последовательность энтропийных решений $\{u^k\}$ уравнения (1a) равномерно ограничена в $L^\infty(\Pi)$ и что справедлива оценка $\|u^k\|_{L^\infty(\Pi)} \le u_*$. Выделяя, если необходимо, подпоследовательность из $k\in\mathbb{N}$, мы определяем слабо* сходящиеся подпоследовательности $\{f^k\}$, $\{u^k\}$ и предельные функции $f\in L^\infty(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$, $u\in L^\infty(\Pi)$ такие, что

$$f^k \to f \text{ слабо}^* \text{ в } L^\infty(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda) \quad \text{при } k\nearrow\infty, \quad (12)$$

$$u^k \to u \text{ слабо}^* \text{ в } L^\infty(\Pi) \quad \text{при } k\nearrow\infty. \quad (13)$$

Очевидно, что $f = 0$ при $\lambda < -u_*$ и $f = 1$ при $\lambda \ge u_*$. Из нижеследующей леммы вытекает, что f является монотонной неубывающей и непрерывной справа функцией по λ. Такая структура функции f позволяет воспользоваться теоремой Панова о модификации понятия H-мер Тартара [9, теорема 3] и ввести в рассмотрение семейство H-мер, ассоциированное с подпоследовательностью $f^k - f$.

Лемма 1. *Функция f в предельном соотношении* (12) *является функцией распределения меры Янга $\nu_{x,t} \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R}_\lambda)$, ассоциированной с подпоследовательностью $\{u^k\}$, т. е.*

$$f(\mathbf{x}, t, \lambda) = \int_{\mathbb{R}_s} 1_{\lambda \geq s} \, d\nu_{x,t}(s). \tag{14}$$

Здесь $\mathrm{Prob}(\mathbb{R}_\lambda)$ — это подмножество $\mathbb{M}(\mathbb{R}_\lambda)$, состоящее из всех неотрицательных мер с единичной нормой. Понятие мер Янга будет приведено в процессе доказательства леммы.

Доказательство. Пусть $\zeta \in C_0\big(\Pi; C_0^1(\mathbb{R}_\lambda)\big)$ — произвольная функция. Из (12) следует, что

$$\int_{\Pi \times \mathbb{R}_\lambda} f^k \zeta_\lambda \, d\mathbf{x} dt d\lambda \underset{k \nearrow \infty}{\longrightarrow} \int_{\Pi \times \mathbb{R}_\lambda} f \zeta_\lambda \, d\mathbf{x} dt d\lambda. \tag{15}$$

Из представления (11) вытекает равенство

$$\int_{\Pi \times \mathbb{R}_\lambda} f^k(\mathbf{x}, t, \lambda) \zeta_\lambda(\mathbf{x}, t, \lambda) \, d\mathbf{x} dt d\lambda = -\int_{\Pi} \zeta(\mathbf{x}, t, u^k(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} dt. \tag{16}$$

В силу теоремы Тартара о мерах Янга [16, гл. 3, теорема 2.3] существует ограниченное слабо измеримое отображение $(\mathbf{x}, t) \mapsto \nu_{x,t}$ из Π в $\mathrm{Prob}(\mathbb{R}_\lambda)$ такое, что $\operatorname{spt} \nu_{x,t} \subset \{\lambda : |\lambda| \leq u_*\}$ и

$$\lim_{k \nearrow \infty} \int_{\Pi} \zeta(\mathbf{x}, t, u^k(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} dt = \int_{\Pi} \left(\int_{\mathbb{R}_\lambda} \zeta(\mathbf{x}, t, \lambda) \, d\nu_{x,t}(\lambda) \right) d\mathbf{x} dt. \tag{17}$$

Мера $\nu_{x,t}$ определена при п. в. $\mathbf{x}$ и t и называется *мерой Янга, ассоциированной с выбранной подпоследовательностью u^k*.

Используя понятие интеграла Стильтьеса, порожденного функцией распределения

$$g(\mathbf{x}, t, \lambda) := \int_{\mathbb{R}_s} 1_{\lambda \geq s} d\nu_{x,t}(\lambda),$$

правую часть равенства (17) можно представить в виде

$$\int_{\Pi} \left(\int_{\mathbb{R}_\lambda} \zeta(\mathbf{x}, t, \lambda) \, d\nu_{x,t}(\lambda) \right) d\mathbf{x} dt = \int_{\Pi} \left(\int_{\mathbb{R}_\lambda} \zeta(\mathbf{x}, t, \lambda) d_\lambda g(\mathbf{x}, t, \lambda) \right) d\mathbf{x} dt, \tag{18}$$

где $d_\lambda g(\mathbf{x}, t, \cdot)$ — параметризованная мера Стильтьеса на $\mathbb{R}_\lambda$. В силу теории интеграла Стильтьеса для произвольной функции $\psi \in C_0(\mathbb{R}_\lambda)$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{R}_\lambda} \psi(\lambda) \, d_\lambda g(\mathbf{x}, t, \lambda) = -\int_{\mathbb{R}_\lambda} \psi'(\lambda) g(\mathbf{x}, t, \lambda) \, d\lambda \quad \text{при п. в. } (\mathbf{x}, t) \in \Pi.$$

Применяя его, правую часть равенства (18) можно переписать в виде

$$\int_{\Pi} \left(\int_{\mathbb{R}_\lambda} \zeta d_\lambda g \right) d\mathbf{x} dt = -\int_{\Pi \times \mathbb{R}_\lambda} \zeta_\lambda g \, d\mathbf{x} dt d\lambda. \tag{19}$$

Из формул (15)–(19) вытекает, что функции f и g совпадают при п. в. $(\mathbf{x}, t, \lambda) \in \Pi \times \mathbb{R}_\lambda$. $\square$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathscr{E} := \big\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid f(\cdot, \cdot, \lambda) \to f(\cdot, \cdot, \lambda_0) \text{ сильно в } L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi) \text{ при } \lambda \to \lambda_0\big\}.$$

Из [9, лемма 4] и теоремы Панова о модификации H-мер Тартара [9, теорема 3] непосредственно вытекают два следующих утверждения.

Лемма 2. *Дополнение к $\mathscr{E}$ в $\mathbb{R}$ не более чем счетно, и для любого $\lambda \in \mathscr{E}$ справедливо предельное соотношение $f^k(\cdot, \cdot, \lambda) \underset{k \nearrow \infty}{\longrightarrow} f(\cdot, \cdot, \lambda)$ слабо* в $L^\infty(\Pi)$.*

Теорема Н. *Существуют семейство локально-конечных мер Радона $\{\mu^{pq}\}_{p,q \in \mathscr{E}}$ на $\Pi \times \mathbb{S}^d$ и подпоследовательность из $\{f^k(\lambda) - f(\lambda)\}$, $\lambda \in \mathscr{E}$, такие, что для любых $\Phi_1, \Phi_2 \in C_0(\Pi)$ и $\psi \in C(\mathbb{S}^d)$ выполняется равенство*

$$\int\limits_{\Pi \times \mathbb{S}^d} \Phi_1(\mathbf{x}, t)\overline{\Phi_2(\mathbf{x}, t)}\psi(\mathbf{y})\, d\mu^{pq}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \lim_{k \nearrow \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathscr{F}[\Phi_1(f^k(p) - f(p))](\xi)$$

$$\times \overline{\mathscr{F}[\Phi_2(f^k(q) - f(q))](\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \quad \forall\, p, q \in \mathscr{E}. \quad (20)$$

В формулировке теоремы Н и далее через $\overline{\varphi}$ обозначается комплексное сопряжение к φ. Через $\mathscr{F}$ обозначается преобразование Фурье по $\mathbf{x}$ и t:

$$\mathscr{F}[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(\mathbf{x}, t)e^{2\pi i(\xi_0 t + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_d x_d)}\, d\mathbf{x}dt$$

для любой интегрируемой функции φ. Считается, что если изначально функция определена только при $t \in [0, T]$, то за пределами $[0, T]$ она также определена и тождественно равна нулю. Также для удобства иногда используется обозначение $x_0 := t$.

Определение 3. Семейство мер $\{\mu^{pq}\}_{p,q \in \mathscr{E}}$ называется *H-мерой, ассоциированной с выбранной подпоследовательностью* $\{f^k - f\}$.

Из общей теории H-мер вытекают следующие ее свойства.

Лемма 3. 1. *Для любого конечного множества $E := \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathscr{E}$ множество мер $(\mu^{p_i p_j})_{i,j=1,\dots,n}$ является эрмитовым неотрицательным, т. е.*

$$\mu^{p_i p_j} = \bar{\mu}^{p_j p_i}, \quad \langle \mu^{p_i p_j}, \Phi_i \overline{\Phi}_j \psi\rangle \geq 0 \quad (21)$$

для любых $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in C_0(\Pi)$ и $\psi \in C(\mathbb{S}^d)$, $\psi \geq 0$ [14, следствие 1.2].

2. *Отображение $(p, q) \mapsto \mu^{pq}$ непрерывно из $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ в $\mathbb{M}(\Pi \times \mathbb{S}^d)$* [9, *теорема* 3].

3. *Для любых $p, q \in \mathscr{E}$ мера μ^{pq} абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на Π. Как функционал, определенный на $C(\Pi \times \mathbb{S}^d)$, она допускает естественное продолжение на $L^2(\Pi, C(\mathbb{S}^d))$, и поэтому имеет место разложение $d\mu^{pq}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = d\sigma^{pq}_{x,t}(\mathbf{y})d\mathbf{x}dt$. Здесь отображение $(\mathbf{x}, t) \mapsto \sigma^{pq}_{x,t}$ принадлежит $L^2_w(\Pi, \mathbb{M}(S^d))$ и однозначно определяется по μ^{pq}* [17, 18].

4. *$f^k(\cdot, \cdot, \lambda) \underset{k \nearrow \infty}{\to} f(\cdot, \cdot, \lambda)$ сильно в $L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$ при $\lambda \in \mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда $\mu^{\lambda\lambda} \equiv 0$* [14].

В п. 3 через $L^2_w(\Pi, \mathbb{M}(\mathbb{S}^d))$ обозначено пространство слабо измеримых относительно меры Лебега на Π отображений $\mathbf{x} \mapsto \sigma_x$ из Π в $\mathbb{M}(\mathbb{S}^d)$ с нормой

$$\|\sigma\|_{L^2_w(\Pi, \mathbb{M}(\mathbb{S}^d))} = \left(\int\limits_{\Pi} \|\sigma_{x,t}\|^2_{\mathbb{M}(\mathbb{S}^d)}\, d\mathbf{x}dt\right)^{1/2} \quad \forall \sigma \in L^2_w(\Pi, \mathbb{M}(\mathbb{S}^d)).$$

§ 4. Формулировка принципа локализации для $\boldsymbol{H}$-мер

Теорема 3. *Пусть для матрицы A коэффициентов при вторых производных уравнения (1a) выполняется одно из двух условий: (1) ранг d_0 этой матрицы постоянен или (2) эта матрица диагональна, т. е. $A = \operatorname{diag}(a_{11}(\mathbf{x},t),\dots,a_{dd}(\mathbf{x},t))$.*

Тогда H-мера $\mu^{\lambda\lambda}$, ассоциированная с выбранной подпоследовательностью $\{f^k - f\}$, удовлетворяет интегральному равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\Biggl(\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d}\sum_{i,j=1}^{d} b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)y_iy_j\zeta(\mathbf{x},t,\lambda,\mathbf{y})\,d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\Biggr)d\lambda = 0 \tag{22}$$

для любой функции $\zeta \in C_0\bigl(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda; C\bigl(\mathbb{S}^d_y\bigr)\bigr)$ и интегральному равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\Biggl(\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d}\Biggl(y_0 + \sum_{i,j=1}^{d}\Bigl(a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda) + \frac{1}{2}b'(\lambda)a_{ijx_j}(\mathbf{x},t,\lambda)\Bigr)y_i\Biggr) \times \beta(\mathbf{x},t,\lambda,\mathbf{y})\,d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\Biggr)d\lambda = 0 \tag{23}$$

для любой функции $\beta \in C_0(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda; C(\mathbb{S}^d_y))$, которая является нечетной по $\mathbf{y}$, т. е. $\beta(\mathbf{x},t,\lambda,-\mathbf{y}) = -\beta(\mathbf{x},t,\lambda,\mathbf{y})$.

Следствие 1 (принцип локализации). *Носитель H-меры $\mu^{\lambda\lambda}$ при п. в. $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит пересечению множеств*

$$\Biggl\{(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \in \Pi\times\mathbb{S}^d \mid \sum_{i,j=1}^{d} b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)y_iy_j = 0\Biggr\}$$

и

$$\Biggl\{(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \in \Pi\times\mathbb{S}^d \mid y_0 + \sum_{i,j=1}^{d}\Bigl(a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda) + \frac{1}{2}b'(\lambda)a_{ijx_j}(\mathbf{x},t,\lambda)\Bigr)y_i = 0\Biggr\}.$$

Доказательство следствия 1. Во-первых, в силу произвольности функции ζ и неотрицательности выражения $\sum\limits_{i,j=1}^{d} b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)y_iy_j$ и меры $\mu^{\lambda\lambda}$ из (22) вытекает, что носитель меры $\mu^{\lambda\lambda}$ лежит в множестве

$$\Biggl\{(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \in \Pi\times\mathbb{S}^d \mid \sum_{i,j=1}^{d} b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)y_iy_j = 0\Biggr\}.$$

Во-вторых, заметим, что в интегральном равенстве (23) ввиду утверждения 3 леммы 3 и условия (2) требование на гладкость пробной функции β по переменным $\mathbf{x}$ и t можно ослабить, а именно достаточно потребовать от β финитности на Π (при всех λ и $\mathbf{y}$) и принадлежности классу $L^4\bigl(\Pi; C_0\bigl(\mathbb{R}_\lambda; C\bigl(\mathbb{S}^d_y\bigr)\bigr)\bigr)$. Вследствие этого законно в качестве β взять (нечетную по $\mathbf{y}$) функцию

$$\beta(\mathbf{x},t,\lambda,\mathbf{y}) = \Biggl(y_0 + \sum_{i,j=1}^{d}\Bigl(a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda) + \frac{1}{2}b'(\lambda)a_{ijx_j}(\mathbf{x},t,\lambda)\Bigr)y_i\Biggr)\beta_1^2(\mathbf{x},t,\lambda), \tag{24}$$

где $\beta_1 \in C_0(\Pi \times \mathbb{R}_\lambda)$ произвольна. Таким образом, из (23) выводим, что справедливо интегральное равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\Bigg(\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d}\bigg(y_0 + \sum_{i,j=1}^{d}(a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda) + \frac{1}{2}b'(\lambda)a_{ijx_j}(\mathbf{x},t,\lambda))y_i\bigg)^2 \times \beta_1^2(\mathbf{x},t,\lambda)\,d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\Bigg)d\lambda = 0,$$

из которого в силу неотрицательности подынтегрального выражения и меры $\mu^{\lambda\lambda}$ вытекает, что носитель меры $\mu^{\lambda\lambda}$ лежит в множестве

$$\left\{(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \in \Pi \times \mathbb{S}^d \mid y_0 + \sum_{i,j=1}^{d}(a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda) + \frac{1}{2}b'(\lambda)a_{ijx_j}(\mathbf{x},t,\lambda))y_i = 0\right\}. \quad \square$$

§ 5. Доказательство теоремы 3. Часть I: предварительные сведения

Мы начинаем доказательство обоснованием следующей вспомогательной леммы.

Лемма 4. *Существует борелевская мера $H \in \mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ с носителем, принадлежащим множеству $\mathbb{I}_* = \{(\mathbf{x},t,\lambda) \in \Pi \times \mathbb{R}_\lambda : |\lambda| \le u_*\}$, такая, что при подходящем выборе подпоследовательности $\{k\} \subset \mathbb{N}$ имеет место предельное соотношение*

$$m^k + b'(\lambda)n^k \to H \text{ слабо}^* \text{ в } \mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda) \quad \text{при } k \nearrow \infty. \tag{25}$$

Доказательство. В силу формул (9а), (12) и (13) справедлива равномерная оценка

$$\|m^k + b'n^k\|_{(C^2(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda))^*} \le c_*, \tag{26}$$

в которой постоянная c_* не зависит от $k \in \mathbb{N}$. Поскольку мера $m^k + b'n^k$ неотрицательна при любых $k \in \mathbb{N}$, заключаем, что существует единственное естественное продолжение этой меры на $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ и что множество $\{m^k + b'n^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничено по норме $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ постоянной c_* [19, гл. III, § 3, предложение 2]. Из этой оценки вытекает, что предельное соотношение (25) справедливо для некоторой подпоследовательности $k \in \mathbb{N}$. Носитель меры H целиком лежит в $\mathbb{I}_*$, поскольку носители мер m^k и n^k лежат в $\mathbb{I}_*$ при всех $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Кроме этой леммы для доказательства теоремы 3 мы будем систематически использовать теорию потенциалов Рисса и псевдодифференциальных операторов (п.д.о.) нулевого порядка, в частности преобразований Рисса.

Напомним [20, гл. 5, § 1], что потенциал Рисса $\mathscr{I}_\alpha$ $(0 < \alpha < d+1)$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ определяется формулой

$$\mathscr{F}[\mathscr{I}_\alpha[\varphi]](\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\alpha}\mathscr{F}[\varphi](\xi).$$

Теорема Харди — Литтлвуда — Соболева [20, гл. 5, § 1] утверждает, что потенциалы Рисса определены на $L^p(\mathbb{R}^{d+1})$ при любых $p \in (1,+\infty)$ и являются ограниченными отображениями $L^p(\mathbb{R}^{d+1})$ в $L^q(\mathbb{R}^{d+1})$ при $q^{-1} = p^{-1} - \alpha(d+1)^{-1}$, т. е.

$$\|\mathscr{I}_\alpha[\varphi]\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})} \le c_{p,q}\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} \quad \forall\varphi \in L^p(\mathbb{R}^{d+1}). \tag{27}$$

П.д.о. нулевого порядка $\mathscr{A}$ с символом $\psi \in C(\mathbb{S}^d)$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ определяется по формуле

$$\mathscr{F}[\mathscr{A}[\varphi]](\xi) = \psi(\xi/|\xi|)\mathscr{F}[\varphi](\xi).$$

П.д.о. нулевого порядка $\mathscr{R}_j$ $(j = 0, \dots, d)$ с символом $-i\xi_j/|\xi|$ называется *преобразованием Рисса* [20, гл. 3]. П.д.о. нулевого порядка определены и ограничены на $L^p(\mathbb{R}^{d+1})$ при любых $p \in (1, +\infty)$, и справедлива оценка [20, гл. 3, теорема 3]

$$\|\mathscr{A}[\varphi]\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} \le c_p \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} \quad \forall \varphi \in L^p(\mathbb{R}^{d+1}). \tag{28}$$

В силу теории п.д.о. потенциалы Рисса и п.д.о. нулевого порядка коммутируют друг с другом и с операторами дифференцирования и удовлетворяют следующим равенствам при всех допустимых функциях (например, при $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$):

$$(\mathscr{I}_\alpha \circ \mathscr{I}_\beta)[\varphi] = \mathscr{I}_{\alpha+\beta}[\varphi] \quad \forall\, \alpha, \beta, \alpha + \beta \in (1, d+1), \tag{29}$$

$$\mathscr{I}_1[\partial_{x_j}\varphi] = \mathscr{R}_j[\varphi], \quad j = 0, \dots, d, \ x_0 := t. \tag{30}$$

Также заметим, что если символ п.д.о. нулевого порядка $\mathscr{A} : L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \mapsto L_2(\mathbb{R}^{d+1})$ — нечетная функция, т. е. если $\psi(-\xi/|\xi|) = -\psi(\xi/|\xi|)$, то $\mathscr{A}$ является антисамосопряженным оператором, иначе говоря, при произвольных $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2\big(\mathbb{R}^{d+1}_{x,t}\big)$ справедлива формула вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}_{x,t}} \varphi_1 \cdot \mathscr{A}[\varphi_2]\, d\mathbf{x}dt = -\int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}_{x,t}} \mathscr{A}[\varphi_1] \cdot \varphi_2\, d\mathbf{x}dt. \tag{31}$$

Из теоремы вложения Соболева и из изложенных выше свойств потенциалов Рисса вытекает следующее утверждение [20, гл. 5, теорема 2].

Лемма 5. *Если $p > d+1$, то потенциал Рисса $\mathscr{I}_1$ является компактным оператором, действующим из $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d+1})$ в $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d+1})$. Если $1 < p \le d+1$, то потенциал Рисса $\mathscr{I}_1$ является компактным оператором, действующим из $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d+1})$ в $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d+1})$ для любых $q \in [1, p(d+1)(d+1-p)^{-1})$.*

Заметим, что, применяя теорему Планшереля к равенству (20), H-меры $\{\mu^{pq}\}$ можно эквивалентно определить по формуле

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d} \Phi_1\overline{\Phi}_2\psi\, d\mu^{pq}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \lim_{k\nearrow\infty} \int\limits_{\Pi} \Phi_1(f^k(p) - f(p))\overline{\mathscr{A}[\Phi_2(f^k(q) - f(q))]}\, d\mathbf{x}dt, \tag{32}$$

где $\mathscr{A}$ — п.д.о. нулевого порядка в $\mathbb{R}^{d+1}$ с символом ψ.

§ 6. Доказательство теоремы 3. Часть II: вывод равенства (22)

Обозначим $U_k^\lambda(\mathbf{x}, t) := f^k(\mathbf{x}, t, \lambda) - f(\mathbf{x}, t, \lambda)$. В силу предельных соотношений (12), (13) и (25) из (10) следует равенство

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} (\zeta_t + a_{i\lambda}(\mathbf{x}, t, \lambda)\zeta_{x_i} - a_{ix_i}(\mathbf{x}, t, \lambda)\zeta_\lambda + b'(\lambda)\partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x}, t)\zeta_{x_j}))U_k^\lambda\, d\mathbf{x}dtd\lambda + \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} \zeta_\lambda\, dH_k = 0, \tag{33}$$

где $H_k := m^k + b'(\lambda)n^k - H$ и $\zeta \in C_0^2(\Pi \times \mathbb{R}_\lambda)$ — произвольная пробная функция.

Умножим полученное равенство на $\int\limits_{\mathbb{R}_p} \zeta_0(p)\,dp$, где функция $\zeta_0 \in C_0^2(\mathbb{R})$ произвольна. Так как линейная оболочка множества $\{\zeta(\mathbf{x},t,\lambda)\zeta_0(p)\}$ плотна в $C_0^2\big(\Pi \times \mathbb{R}^2_{\lambda,p}\big)$, из (33) вытекает равенство

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} (\zeta_t + a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda)\zeta_{x_i} - a_{ix_i}(\mathbf{x},t,\lambda)\zeta_\lambda + b'(\lambda)\partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_{x_j}))U_k^\lambda\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\ + \int\limits_{\mathbb{R}_p}\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} \zeta_\lambda\,dH_k dp = 0, \quad (34)$$

где $\zeta = \zeta(\mathbf{x},t,\lambda,p)$ — гладкая финитная пробная функция.

Дальнейшее обоснование равенства (22) основано на специальном выборе пробных функций в (34) и на предельном переходе при $k \nearrow +\infty$.

Возьмем ζ в виде

$$\zeta(\mathbf{x},t,\lambda,p) = \zeta_1(\mathbf{x},t)\zeta_2(\lambda)(\mathscr{I}_2\circ\mathscr{A})\big[\zeta_3(\cdot,\cdot,p)U_k^p\big](\mathbf{x},t), \quad (35)$$

где функции $\zeta_1 \in C_0^2(\Pi)$, $\zeta_2 \in C_0^2(\mathbb{R})$ и $\zeta_3 \in C_0^2(\Pi\times\mathbb{R}_p)$ произвольны и $\mathscr{A}$ — п.д.о. нулевого порядка с произвольным символом $\psi \in C^1(\mathbb{S}^d)$. В силу изложенных в § 5 свойств п.д.о. такой выбор пробной функции законен, поскольку все интегралы в (34) корректно определены.

Применяя формулы (29) и (30), приходим к равенству

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \big(\zeta_{1t}\zeta_2(\mathscr{I}_2\circ\mathscr{A})\big[\zeta_3U_k^p\big] + \zeta_1\zeta_2(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_0)\big[\zeta_3U_k^p\big] \\ + a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda)\zeta_{1x_i}\zeta_2(\mathscr{I}_2\circ\mathscr{A})\big[\zeta_3U_k^p\big] \\ + a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda)\zeta_1\zeta_2(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_i)\big[\zeta_3U_k^p\big] - a_{ix_i}(\mathbf{x},t,\lambda)\zeta_1\zeta_{2\lambda}(\mathscr{I}_2\circ\mathscr{A})\big[\zeta_3U_k^p\big] \\ + b'(\lambda)a_{ijx_i}(\mathbf{x},t)\zeta_{1x_j}\zeta_2(\mathscr{I}_2\circ\mathscr{A})\big[\zeta_3U_k^p\big] + b'(\lambda)a_{ijx_i}(\mathbf{x},t)\zeta_1\zeta_2(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_3U_k^p\big] \\ + b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_{1x_ix_j}\zeta_2(\mathscr{I}_2\circ\mathscr{A})\big[\zeta_3U_k^p\big] + 2b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_{1x_i}\zeta_2(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_3U_k^p\big] \\ + b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_1\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_i\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_3U_k^p\big]\big)U_k^\lambda\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\ + \int\limits_{\mathbb{R}_p}\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} \zeta_1\zeta_{2\lambda}(\mathscr{I}_2\circ\mathscr{A})\big[\zeta_3U_k^p\big]\,dH_k(\mathbf{x},t,\lambda)dp = 0. \quad (36)$$

В силу леммы 2 $U_k^p \underset{k\nearrow\infty}{\longrightarrow} 0$ слабо* в $L^\infty(\Pi)$ для любых $p \in \mathscr{E}$. Используя это предельное соотношение, применяя теорему Лебега о сходимости под знаком интеграла, леммы 4 и 5 и выбирая при необходимости подпоследовательность из $\{k\} \subset \mathbb{N}$, приходим к равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \lim_{k\nearrow+\infty} \int\limits_{\Pi} b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_1\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_i\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_3U_k^p\big]U_k^\lambda\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp = 0. \quad (37)$$

На основании теоремы H и того факта, что $\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_i\circ\mathscr{R}_j$ — это п.д.о. нулевого порядка с символом $-\psi(\mathbf{y})y_iy_j$ ($\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$), из (37) выводим, что для произвольных функций ζ_1, ζ_2, ζ_3 и ψ, определенных в формуле (35), выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2_{\lambda,p}}\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d} b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_1(\mathbf{x},t)\zeta_2(\lambda)\zeta_3(\mathbf{x},t,p)\psi(\mathbf{y})y_iy_j\,d\mu^{p\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\,d\lambda dp = 0. \quad (38)$$

Заметим, что линейная оболочка множества $\{\zeta_4(\mathbf{x},t,\lambda,p)=\zeta_2(\lambda)\zeta_3(\mathbf{x},t,p)\}$ плотна в пространстве $C_0^2\big(\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}\big)$ и в качестве пробной функции $\zeta_4\in C_0^2\big(\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}\big)$ возьмем пробную функцию С. Н. Кружкова [10]:

$$\zeta_4^{\varepsilon}(\mathbf{x},t,\lambda,p):=\frac{1}{\varepsilon}\zeta_5(\mathbf{x},t)\zeta_6\left(\frac{\lambda-p}{\varepsilon}\right)\zeta_7\left(\frac{\lambda+p}{2}\right),\quad \varepsilon>0, \tag{39}$$

где ζ_5 — гладкая финитная функция в Π, ζ_6 – неотрицательная четная гладкая функция с компактным носителем, принадлежащим отрезку $[-1,1]$, и со средним значением, равным единице, т. е. $\int\zeta_6(\lambda)\,d\lambda=1$, и ζ_7 — гладкая финитная функция на $\mathbb{R}$.

Производя замену переменной p на $\kappa=(p-\lambda)/\varepsilon$, из (38) выводим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2_{\lambda,\kappa}}\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d} b'(\lambda)a_{ij}\zeta_1\zeta_5\zeta_6(\kappa)\zeta_7\left(\frac{2\lambda+\kappa\varepsilon}{2}\right)\psi(\mathbf{y})y_iy_j\,d\mu^{\lambda(\lambda+\kappa\varepsilon)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\,d\lambda d\kappa=0. \tag{40}$$

В силу выбора пробных функций ζ_6 и ζ_7, леммы 2, утверждения 2 леммы 3 и теоремы Лебега, переходя к пределу при $\varepsilon\searrow 0$, находим из (40) равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d} b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_1(\mathbf{x},t)\zeta_5(\mathbf{x},t)\zeta_7(\lambda)\psi(\mathbf{y})y_iy_j\,d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda=0, \tag{41}$$

откуда ввиду произвольности ζ_1, ζ_5, ζ_7 и ψ немедленно вытекает равенство (22).

§ 7. Доказательство теоремы 3. Часть III: вывод равенства (23)

Введем в рассмотрение регуляризующее ядро $\omega\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, имеющее такие же свойства, как и функция ζ_6, определенная в предыдущем параграфе. Обозначим

$$\omega_h(\mathbf{x}):=\frac{1}{h^d}\omega\left(\frac{x_1}{h}\right)\dots\omega\left(\frac{x_d}{h}\right),\quad (\dots)_h:=(\dots)*\omega_h,$$

и

$$U^p_{k,h}(\mathbf{x},t):=\big(U^p_k*\omega_h\big)(\mathbf{x},t)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\omega_h(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}})U^p_k(\tilde{\mathbf{x}},t)\,d\tilde{\mathbf{x}}.$$

Вывод равенства (23) основан на специальном выборе пробных функций в интегральном равенстве (34). Возьмем в качестве пробной функции в равенстве (34) функцию вида

$$\zeta(\mathbf{x},t,\lambda,p)=b'(p)\big(\zeta_1(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[\zeta_2U^p_{k,h}\big]\big)*\omega_h, \tag{42}$$

где $\zeta_1=\zeta_1(\mathbf{x},t,p,\lambda)$ и $\zeta_2=\zeta_2(\mathbf{x},t)$ — произвольные гладкие финитные функции, при этом ζ_1 симметрична по переменным λ и p, т. е. $\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)=\zeta_1(\mathbf{x},t,p,\lambda)$ для любых λ и p, а $\mathscr{A}$ — произвольный п.д.о. нулевого порядка, символ которого $\psi\in C^1(\mathbb{S}^d)$ является нечетной функцией.

В силу того, что $U^p_{k,h}$ является бесконечно гладкой по $\mathbf{x}$ функцией, выбранная функция ζ будет законной пробной функцией для интегрального равенства (34). Подставляя ее в (34) и используя формулы (29), (30) и свойство $\langle\varphi_{1h},\varphi_2\rangle=\langle\varphi_1,\varphi_{2h}\rangle$, выводим, что справедливо равенство

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} b'(p)\big(U^\lambda_{k,h}\zeta_{1t}(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[\zeta_2U^p_{k,h}\big]+U^\lambda_{k,h}\zeta_1(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_0)\big[\zeta_2U^p_{k,h}\big]$$

$$+ \left(U_k^\lambda a_{i\lambda}\right)_h \zeta_{1x_i}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_{k,h}^p\right] + \left(U_k^\lambda a_{i\lambda}\right)_h \zeta_1(\mathscr{A} \circ \mathscr{R}_i)\left[\zeta_2 U_{k,h}^p\right]$$
$$- \left(U_k^\lambda a_{ix_i}\right)_h \zeta_{1\lambda}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_k^p\right] + b'(\lambda)\left(U_k^\lambda a_{ijx_i}\right)_h \zeta_{1x_j}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_{k,h}^p\right]$$
$$+ b'(\lambda)\left(U_k^\lambda a_{ijx_i}\right)_h \zeta_1(\mathscr{A} \circ \mathscr{R}_j)\left[\zeta_2 U_{k,h}^p\right] + b'(\lambda)\left(U_k^\lambda a_{ij}\right)_h \zeta_1 \partial_{x_i}(\mathscr{A} \circ \mathscr{R}_j)\left[\zeta_2 U_{k,h}^p\right]$$
$$+ 2b'(\lambda)\left(U_k^\lambda a_{ij}\right)_h \zeta_{1x_i}(\mathscr{A} \circ \mathscr{R}_j)\left[\zeta_2 U_{k,h}^p\right]$$
$$+ b'(\lambda)(U_k^\lambda a_{ij})_h \zeta_{1x_ix_j}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_{k,h}^p\right]\Big) \, d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}_p} \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} b'(p)\left(\zeta_{1\lambda}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_{k,h}^p\right]\right)_h dH_k(\mathbf{x},t,\lambda)dp = 0. \quad (43)$$

Во всех интегралах в (43), за исключением одного, имеющего вид

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} b'(p)b'(\lambda)\left(U_k^\lambda a_{ij}\right)_h \zeta_1 \partial_{x_i}(\mathscr{A} \circ \mathscr{R}_j)\left[\zeta_2 U_{k,h}^p\right] d\mathbf{x}dtd\lambda dp, \quad (44)$$

переход к пределу при $h \searrow 0$ не вызывает трудностей в силу того, что $U_{k,h}^p \underset{h\searrow 0}{\to} U_k^p$ сильно в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$. Соответствующее предельное выражение имеет вид

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} b'(p)\Big(U_k^\lambda \zeta_{1t}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_k^p\right] + U_k^\lambda \zeta_1(\mathscr{A} \circ \mathscr{R}_0)\left[\zeta_2 U_k^p\right]$$
$$+ U_k^\lambda a_{i\lambda} \zeta_{1x_i}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_k^p\right] + U_k^\lambda a_{i\lambda} \zeta_1(\mathscr{A} \circ \mathscr{R}_i)\left[\zeta_2 U_k^p\right]$$
$$- U_k^\lambda a_{ix_i} \zeta_{1\lambda}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_k^p\right] + b'(\lambda) U_k^\lambda a_{ijx_i} \zeta_{1x_j}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_k^p\right]$$
$$+ b'(\lambda) U_k^\lambda a_{ijx_i} \zeta_1(\mathscr{A} \circ \mathscr{R}_j)\left[\zeta_2 U_k^p\right] + 2b'(\lambda) U_k^\lambda a_{ij} \zeta_{1x_i}(\mathscr{A} \circ \mathscr{R}_j)\left[\zeta_2 U_k^p\right]$$
$$+ b'(\lambda) U_k^\lambda a_{ij} \zeta_{1x_ix_j}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_k^p\right]\Big) \, d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}_p} \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} b'(p) \zeta_{1\lambda}(\mathscr{I}_1 \circ \mathscr{A})\left[\zeta_2 U_k^p\right] dH_k(\mathbf{x},t,\lambda)dp. \quad (45)$$

Предельный переход в интеграле (44) при $h \searrow 0$ (а затем и при $k \nearrow +\infty$) основан на следующих трех леммах.

Лемма 6. *Пусть $\mathscr{A}$ — п.д.о. нулевого порядка с символом $\psi \in C^1(\mathbb{S}^d)$ и $\mathscr{B}$: $L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \mapsto L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ — оператор умножения на функцию $B \in C_0^2\left(\mathbb{R}^{d+1}_{x,t}\right)$, т. е. $\mathscr{B}[\varphi](\mathbf{x},t) = B(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)$ $\forall\, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$.*

Тогда коммутатор $[\mathscr{A},\mathscr{B}] := \mathscr{A}\circ\mathscr{B} - \mathscr{B}\circ\mathscr{A}$ является непрерывным оператором, действующим из пространства $L^2\left(\mathbb{R}^{d+1}_{x,t}\right)$ в $W_2^1\left(\mathbb{R}^{d+1}_{x,t}\right)$, и оператор $\varphi \mapsto \partial_{x_i}[\mathscr{A},\mathscr{B}][\varphi]$ $(i = 0,\dots,d)$ имеет структуру

$$\partial_{x_i}[\mathscr{A},\mathscr{B}][\varphi] = \sum_{j=0}^{d} (\mathscr{A}_{ij} \circ \mathscr{B}_j)[\varphi] + \mathscr{C}_i[\varphi] \quad \forall\, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^{d+1}), \quad (46)$$

где $\mathscr{A}_{ij}$ — п.д.о. нулевого порядка с символом $\psi_{ij} \in C(\mathbb{S}^d)$, определенным по формуле

$$\psi_{ij}(\xi/|\xi|) = \xi_i \frac{\partial\psi(\xi/|\xi|)}{\partial\xi_j}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad (47)$$

$\mathscr{B}_j$ — оператор умножения на функцию $\partial_{x_j}B$ (здесь $x_0 := t$) и $\mathscr{C}_i$: $L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \mapsto L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ — некоторый компактный оператор.

Замечание 3. В терминах переменных $y_i := (\xi_i/|\xi|) \in \mathbb{S}^d$ формула (47) принимает вид

$$\psi_{ij}(\mathbf{y}) = \sum_{l=0}^{d} y_i(\delta_{jl} + y_j y_l)\partial_{y_l}\psi(\mathbf{y}).$$

Лемма 6 установлена в [14]. $\square$

Лемма 7. *Пусть $\zeta_1 = \zeta_1(\mathbf{x}, t, p, \lambda)$ и $\zeta_2 = \zeta_2(\mathbf{x}, t)$ — произвольные гладкие финитные функции, при этом ζ_1 симметрична по переменным λ и p, т. е. $\zeta_1(\mathbf{x}, t, \lambda, p) = \zeta_1(\mathbf{x}, t, p, \lambda)$ для любых λ и p, а $\mathscr{A}$ — произвольный п.д.о. нулевого порядка, символ которого $\psi \in C^1(\mathbb{S}^d)$ является нечетной функцией. Тогда справедливо равенство*

$$\begin{aligned} 2 \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} & b'(\lambda)b'(p)U^\lambda_{k,h} a_{ij}\zeta_1 \partial_{x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_2 U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\ &= \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^\lambda_{k,h} b'(\lambda)\big(a_{ij}\zeta_1\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j, \mathscr{Z}_2]\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big] \\ &\quad + a_{ij}\zeta_1\zeta_{2x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big] - (a_{ij}\zeta_1)_{x_i}\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big] \\ &\quad - \zeta_2\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j, \mathscr{Z}_{1ij}]\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\big)\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp. \qquad (48) \end{aligned}$$

Здесь $\mathscr{Z}_{1ij}$ и $\mathscr{Z}_2$ — это операторы умножения на функции $a_{ij}\zeta_1$ и ζ_2 соответственно и $\chi(\mathbf{x}, t) = \chi^{\lambda,p}(\mathbf{x}, t) = 1_{(\operatorname{supp}\zeta_1 \bigcup \operatorname{supp}\zeta_2)}(\mathbf{x}, t)$. Заметим, что $\chi\zeta_1 = \zeta_1$ и $\chi\zeta_2 = \zeta_2$.

Доказательство. Применяя интегрирование по частям по переменной x_i $(i = 1, \dots, d)$ в интеграле (44) (разделенном на 2) и группируя слагаемые так, чтобы в явном виде сформировался коммутатор п.д.о. нулевого порядка $\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j$ и оператора умножения на функцию ζ_2, получаем равенство

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} & b'(\lambda)b'(p)U^\lambda_{k,h} a_{ij}\zeta_1 \partial_{x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_2 U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\ &= -\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}\big(U^\lambda_{k,h} b'(\lambda) a_{ij}\zeta_1\big)[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j, \mathscr{Z}_2]\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\ &\quad - \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}\big(U^\lambda_{k,h} b'(\lambda) a_{ij}\zeta_1\big)\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp. \qquad (49) \end{aligned}$$

Интегрируя по частям по переменной x_i $(i = 1, \dots, d)$ первый из интегралов в правой части равенства (49) и используя правило дифференцирования произведения функций во втором интеграле, устанавливаем, что для этих двух интегралов справедливо представление

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} & \partial_{x_i}\big(U^\lambda_{k,h} b'(\lambda) a_{ij}\zeta_1\big)[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j, \mathscr{Z}_2]\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\ &- \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}\big(U^\lambda_{k,h} b'(\lambda) a_{ij}\zeta_1\big)\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda) a_{ij}\zeta_1 \partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j, \mathscr{L}_2]\big[b'(p)\chi U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\
&- \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}\big(U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda) a_{ij}\zeta_1\zeta_2\big)(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\
&\qquad + \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda) a_{ij}\zeta_1\zeta_{2x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp. \qquad (50)
\end{aligned}
$$

Учитывая правило дифференцирования произведения функций и группируя слагаемые так, чтобы в явном виде сформировался коммутатор п.д.о. нулевого порядка $\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j$ и оператора умножения на произведение функций $a_{ij}\zeta_1$, получаем, что второй интеграл в правой части равенства (50) имеет представление в виде

$$
\begin{aligned}
&- \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}\big(U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda) a_{ij}\zeta_1\zeta_2\big)(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\
&\qquad = - \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda) a_{ijx_i}\zeta_1\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\
&\qquad - \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda) a_{ij}\zeta_{1x_i}\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\
&\qquad + \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}\big(U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda)\zeta_2\big)[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j, \mathscr{L}_{1ij}]\big[b'(p)\chi U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\
&\qquad\qquad - \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}\big(U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda)\zeta_2\big)(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)a_{ij}\zeta_1 U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

Используя интегрирование по частям по переменной x_i $(i=1,\dots,d)$ в третьем интеграле в правой части равенства (51), выводим, что этот интеграл представляется в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}\big(U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda)\zeta_2\big)[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j, \mathscr{L}_{1ij}]\big[b'(p)\chi U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp \\
&\qquad = - \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda)\zeta_2 \partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j, \mathscr{L}_{1ij}]\big[b'(p)\chi U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Используя формулу (31) и тот факт, что п.д.о. нулевого порядка и потенциалы Рисса коммутируют друг с другом и с операторами дифференцирования по x_i, получаем следующее представление для последнего интеграла в правой части равенства (51):

$$
- \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}\big(U^{\lambda}_{k,h} b'(\lambda)\zeta_2\big)(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)a_{ij}\zeta_1 U^{p}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp
$$

$$= - \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} (\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\partial_{x_i}\big(U^{\lambda}_{k,h}b'(\lambda)\zeta_2\big)\big]\big(b'(p)a_{ij}\zeta_1U^p_{k,h}\big)\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$

$$= - \int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} \partial_{x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[U^{\lambda}_{k,h}b'(\lambda)\zeta_2\big]\big(b'(p)a_{ij}\zeta_1U^p_{k,h}\big)\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp. \quad (53)$$

Подставим представление (53) в правую часть представления (51). Получившееся после этих подстановок представление подставим в правую часть представления (50) и результат — в правую часть формулы (49).

Таким образом заключаем, что интеграл (44) может быть представлен в виде

$$2\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} b'(\lambda)b'(p)U^{\lambda}_{k,h}a_{ij}\zeta_1\partial_{x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_2U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$

$$= 2\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h}b'(\lambda)a_{ij}\zeta_1\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j,\mathscr{Z}_2]\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$

$$+ 2\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h}b'(\lambda)a_{ij}\zeta_1\zeta_{2x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$

$$- 2\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h}b'(\lambda)a_{ijx_i}\zeta_1\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$

$$- 2\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h}b'(\lambda)a_{ij}\zeta_{1x_i}\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$

$$- 2\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{\lambda}_{k,h}b'(\lambda)\zeta_2\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j,\mathscr{Z}_{1ij}]\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$

$$- 2\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^{p}_{k,h}b'(p)a_{ij}\zeta_1\partial_{x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(\lambda)\zeta_2U^{\lambda}_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp. \quad (54)$$

Переобозначая переменные p и λ в последнем интеграле в правой части равенства (54), заметим, что этот интеграл и интеграл (44) совпадают, поскольку функция ζ_1 симметрична относительно p и λ.

Таким образом, из (54) немедленно вытекает тождество (48). $\square$

Лемма 8. *Для любого $p<+\infty$ справедливо предельное соотношение*

$$\partial_{x_i}\big(\big(U^{\lambda}_k a_{ij}\big)_h - U^{\lambda}_{k,h}a_{ij}\big) \underset{h\searrow 0}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{сильно в } L^p_{\mathrm{loc}}(\Pi). \quad (55)$$

Доказательство. Результат леммы непосредственно вытекает из [21, лемма II.1]. $\square$

Приступим к исследованию предельного перехода при $h\searrow 0$ в интеграле (44). В силу леммы 7 имеем

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} 2b'(p)b'(\lambda)\big(U^{\lambda}_k a_{ij}\big)_h\zeta_1\partial_{x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_2U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$

$$= -\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} 2b'(p)b'(\lambda)\partial_{x_i}\big(\big(U^\lambda_k a_{ij}\big)_h - U^\lambda_{k,h}a_{ij}\big)\zeta_1(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_2 U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$+\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^\lambda_{k,h}b'(\lambda)a_{ij}\zeta_1\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j,\mathscr{Z}_2]\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$+\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^\lambda_{k,h}b'(\lambda)a_{ij}\zeta_1\zeta_{2x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$-\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^\lambda_{k,h}b'(\lambda)(a_{ij}\zeta_1)_{x_i}\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$-\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^\lambda_{k,h}b'(\lambda)\zeta_2\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j,\mathscr{Z}_{1ij}]\big[b'(p)\chi U^p_{k,h}\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} I_{1h}+I_{2h}+I_{3h}+I_{4h}+I_{5h}. \quad (56)$$

Согласно лемме 8 при $h\searrow 0$ интеграл I_{1h} обращается в нуль. Ввиду этого и леммы 6 справедливо предельное соотношение

$$I_{1h}+I_{2h}+I_{3h}+I_{4h}+I_{5h}\xrightarrow[h\searrow 0]{}$$
$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^\lambda_k b'(\lambda)a_{ij}\zeta_1\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j,\mathscr{Z}_2]\big[b'(p)\chi U^p_k\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$+\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^\lambda_k b'(\lambda)a_{ij}\zeta_1\zeta_{2x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_k\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$-\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^\lambda_k b'(\lambda)(a_{ij}\zeta_1)_{x_i}\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[b'(p)\chi U^p_k\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$-\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} U^\lambda_k b'(\lambda)\zeta_2\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j,\mathscr{Z}_{1ij}]\big[b'(p)\chi U^p_k\big]\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp. \quad (57)$$

Таким образом, из (43) на основании представления (56) и полученных предельных соотношений (45) и (57) при $h\searrow 0$ вытекает, что выполняется следующее интегральное равенство:

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} b'(p)\big(U^\lambda_k\zeta_{1t}(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[\zeta_2U^p_k\big]+U^\lambda_k\zeta_1(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_0)\big[\zeta_2U^p_k\big]+U^\lambda_k a_{i\lambda}\zeta_{1x_i}(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[\zeta_2U^p_k\big]$$
$$+U^\lambda_k a_{i\lambda}\zeta_1(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_i)\big[\zeta_2U^p_k\big]-U^\lambda_k a_{ix_i}\zeta_{1\lambda}(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[\zeta_2U^p_k\big]$$
$$+b'(\lambda)U^\lambda_k a_{ijx_i}\zeta_{1x_j}(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[\zeta_2U^p_k\big]+b'(\lambda)U^\lambda_k a_{ijx_i}\zeta_1(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_2U^p_k\big]$$
$$+(1/2)b'(\lambda)U^\lambda_k a_{ij}\zeta_1\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j,\mathscr{Z}_2]\big[\chi U^p_k\big]+(1/2)b'(\lambda)U^\lambda_k a_{ij}\zeta_1\zeta_{2x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\chi U^p_k\big]$$
$$-(1/2)b'(\lambda)U^\lambda_k(a_{ij}\zeta_1)_{x_i}\zeta_2(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\chi U^p_k\big]-(1/2)b'(\lambda)U^\lambda_k\zeta_2\partial_{x_i}[\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j,\mathscr{Z}_{1ij}]\big[\chi U^p_k\big]$$
$$+2b'(\lambda)U^\lambda_k a_{ij}\zeta_{1x_i}(\mathscr{A}\circ\mathscr{R}_j)\big[\zeta_2U^p_k\big]+b'(\lambda)U^\lambda_k a_{ij}\zeta_{1x_ix_j}(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[\zeta_2U^p_k\big]\big)\,d\mathbf{x}dtd\lambda dp$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}_p}\int\limits_{\Pi\times\mathbb{R}_\lambda} b'(p)\zeta_{1\lambda}(\mathscr{I}_1\circ\mathscr{A})\big[\zeta_2U^p_k\big]\,dH_k(\mathbf{x},t,\lambda)dp=0. \quad (58)$$

Используя теорему H, леммы 4–6 и теорему Лебега о сходимости под знаком интеграла, мы переходим к пределу при $k \nearrow +\infty$ в (58) (выбирая при необходимости подходящую подпоследовательность $\{k\} \subset \mathbb{N}$):

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} b'(p)(\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)\zeta_2(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{y})y_0 + a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda)\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)\zeta_2(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{y})y_i$$
$$+ (1/2)b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)\left(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l \psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y})\right) y_i y_j \zeta_{2x_r}(\mathbf{x},t)$$
$$+ 2b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)\zeta_{2x_i}(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{y})y_j$$
$$- (1/2)b'(\lambda)a_{ijx_r}(\mathbf{x},t)\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y}))y_i y_j\zeta_2(\mathbf{x},t)$$
$$- (1/2)b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_{1x_r}(\mathbf{x},t,\lambda,p)\left(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y})\right) y_i y_j \zeta_2(\mathbf{x},t)$$
$$+ (1/2)b'(\lambda)a_{ijx_j}(\mathbf{x},t)\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)\zeta_2(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{y})y_i)\, d\mu^{\lambda p}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda dp = 0. \quad (59)$$

Здесь и далее суммирование по r производится от $r = 0$ до $r = d$, при этом $x_0 := t$.

Выбирая пробную функцию $\zeta_2 = \zeta_{2N}$ таким образом, чтобы $\|\zeta_{2N}\|_{C^1(\Pi)} \le c$ и $\zeta_{2N} \to 1$ п. в. в Π при $N \nearrow +\infty$, на основании теоремы Лебега о сходимости под знаком интеграла заключаем, что функция $\zeta_2 \equiv 1$ является законной пробной функцией для интегрального равенства (59). Таким образом, из (59) вытекает равенство

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}^2_{\lambda,p}} b'(p)(\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)\psi(\mathbf{y})y_0 + a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda)\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)\psi(\mathbf{y})y_i$$
$$- (1/2)b'(\lambda)a_{ijx_r}(\mathbf{x},t)\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y}))y_i y_j$$
$$- (1/2)b'(\lambda)a_{ij}(\mathbf{x},t)\zeta_{1x_r}(\mathbf{x},t,\lambda,p)(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y}))y_i y_j$$
$$+ (1/2)b'(\lambda)a_{ijx_j}(\mathbf{x},t)\zeta_1(\mathbf{x},t,\lambda,p)\psi(\mathbf{y})y_i)\, d\mu^{\lambda p}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda dp = 0. \quad (60)$$

Пробную функцию ζ_1 возьмем в виде (39), что законно, поскольку такая функция симметрична по λ и p. Произведем в (60) замену переменной p на переменную $\kappa = (p-\lambda)/\varepsilon$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, повторяя те же рассуждения, что были проведены в § 6 при выводе интегрального равенства (41). Таким образом, из (60) вытекает равенство

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}_\lambda} b'(\lambda)\zeta_5\zeta_7(\lambda)\psi(\mathbf{y})(y_0 + (a_{i\lambda} + (1/2)b'(\lambda)a_{ijx_j})y_i)\, d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda$$
$$- \int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}_\lambda} (b'(\lambda))^2\zeta_{5x_r}\zeta_7(\lambda)a_{ij}(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y}))y_i y_j\, d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda$$
$$- \int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}_\lambda} (b'(\lambda))^2\zeta_5\zeta_7(\lambda)a_{ijx_r}(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y}))y_i y_j\, d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda = 0, \quad (61)$$

где $\zeta_5 \in C^1_0(\Pi)$, $\zeta_7 \in C_0(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{S}^d)$ — это произвольные пробные функции, причем ψ нечетна.

Второй интеграл в (61) обращается в нуль в силу равенства (22).

Для третьего интеграла в (61) имеет место следующее утверждение.

Лемма 9. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}_\lambda} (b'(\lambda))^2\zeta_5(\mathbf{x},t)\zeta_7(\lambda)a_{ijx_r}(\mathbf{x},t)(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) \\ + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y}))y_i y_j\, d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda = 0 \quad (62)$$

при произвольных $\zeta_5 \in C^1_0(\Pi)$, $\zeta_7 \in C_0(\mathbb{R})$ *и* $\psi \in C^1(\mathbb{S}^d)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда матрица A диагональна:

$$A(\mathbf{x},t) = \mathrm{diag}(a_{11}(\mathbf{x},t), a_{22}(\mathbf{x},t),\dots,a_{dd}(\mathbf{x},t)), \quad a_{ii}(\mathbf{x},t)\ge 0\ (i=1,\dots,d).$$

В этом случае равенство (62) имеет вид

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}_\lambda} (b'(\lambda))^2\zeta_5(\mathbf{x},t)\zeta_7(\lambda)\sum_{i=1}^d a_{iix_r}(\mathbf{x},t)y_i^2(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) \\ + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y}))\, d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda = 0. \quad (63)$$

Напомним, что в силу следствия 1 носитель меры $\mu^{\lambda\lambda}$ лежит в области

$$M_1 = \left\{(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\in\Pi\times\mathbb{S}^d \mid \sum_{i=1}^d a_{ii}(\mathbf{x},t)y_i^2 = 0\right\}$$

при п. в. $\lambda\in\mathbb{R}$. На этом основании заключаем, что (63) эквивалентно равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\sum_{r=0}^d\int\limits_{M_1\cap M_2^r}(b'(\lambda))^2\zeta_5(\mathbf{x},t)\zeta_7(\lambda) \\ \times\sum_{i=1}^d a_{iix_r}(\mathbf{x},t)y_i^2\,(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y}))\, d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda = 0, \quad (64)$$

где

$$M_2^r = \left\{(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\in\Pi\times\mathbb{S}^d \mid \sum_{i=1}^d a_{iix_r}(\mathbf{x},t)y_i^2 \ne 0\right\}, \quad r=0,1,\dots,d.$$

При $i=1,\dots,d$ и $r=0,1,\dots,d$ рассмотрим множества

$$M_{2i}^r := \{(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\in\Pi\times\mathbb{S}^d \mid a_{iix_r}(\mathbf{x},t)\ne 0,\ y_i\ne 0\} \\ \equiv (\{(\mathbf{x},t)\in\Pi \mid a_{iix_r}(\mathbf{x},t)\ne 0\}\times\{\mathbf{y}\in\mathbb{S}^d \mid y_i\ne 0\}).$$

Множество M_2^r является подмножеством множества $\bigcup\limits_{i=1}^d M_{2i}^r$, так как неравенство $a_{iix_r}(\mathbf{x},t)y_i^2\ne 0$ в какой-либо точке $(\mathbf{x},t)\in\Pi$ возможно, только если существует хотя бы одно значение $i\in[1,\dots,d]$ такое, что $a_{iix_r}\ne 0$ и $y_i^2\ne 0$. Таким образом,

$$\left(M_1\cap M_2^r\right)\subset\left(M_1\cap\left(\bigcup_{i=1}^d M_{2i}^r\right)\right).$$

Рассмотрим $M_1\cap M_{2i}^r$, $i=1,\dots,d$, $r=0,\dots,d$. Имеем $y_i^2\ne 0$ и $a_{iix_r}(\mathbf{x},t)\ne 0$, но при этом $a_{ii}(\mathbf{x},t)y_i^2 = 0$, значит, $a_{ii}(\mathbf{x},t)=0$. Отсюда следует, что $M_1\cap$

$M^r_{2i} = \{(\mathbf{x},t) \in \Pi \mid a_{ii}(\mathbf{x},t) = 0,\ a_{iix_r} \neq 0\} \times \{\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d \mid y_i \neq 0\}$. Множество $\{(\mathbf{x},t) \in \Pi \mid a_{ii}(\mathbf{x},t) = 0,\ a_{iix_r} \neq 0\}$, очевидно, есть множество нулевой меры Лебега. Отсюда и из включения

$$\big(M_1 \cap M_2^r\big) \subset \left(M_1 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{d} M^r_{2i}\right)\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{d}\left(M_1 \cap M^r_{2i}\right)\right)$$

следует, что $M_1 \cap M_2^r$ является подмножеством множества $\mathscr{M}^r \times \mathbb{S}^d$, где $\mathscr{M}^r = \bigcup\limits_{i=1}^{d} \{(\mathbf{x},t) \in \Pi \mid a_{ii}(\mathbf{x},t) = 0,\ a_{iix_r} \neq 0\}$ — множество нулевой меры.

Таким образом, интегрирование по H-мере $\mu^{\lambda\lambda}$ в интеграле (64) происходит на множестве, которое лежит в прямом произведении единичной сферы $\mathbb{S}^d$ и множества нулевой меры Лебега на Π. Отсюда и из того, что по утверждению 3 леммы 3 H-мера $\mu^{\lambda\lambda}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на Π, вытекает справедливость равенства (64). Доказательство утверждения леммы 9 в случае диагональной матрицы A завершено.

Приступим к доказательству утверждения леммы в случае недиагональной матрицы с постоянным рангом d_0. Поскольку матрица A симметрична, неотрицательно определена и дважды дифференцируема (как функция $(\mathbf{x},t) \mapsto A(\mathbf{x},t)$), существует ортогональная $d\times d$-матрица $Q(\mathbf{x},t) = (\theta_{ij}(\mathbf{x},t))$, с помощью которой при любых $(\mathbf{x},t) \in \Pi$ матрица A приводится к диагональному виду, $A(\mathbf{x},t) = Q^*(\mathbf{x},t)G(\mathbf{x},t)Q(\mathbf{x},t)$, $G(\mathbf{x},t) = \operatorname{diag}(g_{11}(\mathbf{x},t),\dots,g_{d_0d_0}(\mathbf{x},t),0,\dots,0)$, $g_{ii} > 0$ $(i = 1,\dots,d_0)$. При этом в силу того, что $a_{ij} \in C^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, из теоремы о свойствах дифференцируемости семейств симметричных операторов [22, гл. II, теорема 6.8] следует, что Q может быть выбрана в таком виде, что

$$\theta_{ij} \in C^2_{\mathrm{loc}}(\Pi), \quad g_{ii} \in C^2_{\mathrm{loc}}(\Pi), \quad i,j = 1,\dots,d. \tag{65}$$

В интегральном равенстве (22) и в третьем интеграле в равенстве (61) при всех $(\mathbf{x},t) \in \Pi$ обозначим

$$Y_0 = y_0, \quad Y_i = \sum_{j=1}^{d} \theta_{ij} y_j \quad (i = 1,\dots,d). \tag{66}$$

Ввиду только что изложенного определенный по закону (66) оператор $\widetilde{\Theta} : \mathbf{y} \mapsto \mathbf{Y}$ является унитарным оператором в $\mathbb{R}^{d+1}$ при всех $(\mathbf{x},t) \in \Pi$. Семейство $\{\widetilde{\Theta}(\mathbf{x},t)\}$ дважды непрерывно дифференцируемо на Π. Значит, при всех $(\mathbf{x},t) \in \Pi$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$ вектор $\mathbf{Y} = (Y_0,\dots,Y_d)$ принадлежит $\mathbb{S}^d$. Более того, вектор $\mathbf{Y}$ зависит от $\mathbf{x}$ и t гладким образом.

Подставляя $\mathbf{Y}$ вместо $\mathbf{y}$ и учитывая представление H-меры $\mu^{\lambda\lambda}$ в виде $d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = d\sigma^{\lambda\lambda}_{x,t}(\mathbf{y})d\mathbf{x}dt$ (см. п. 3 леммы 3), заключаем, что равенство (22) представимо так:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\left(\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d} \sum_{i}^{d_0} b'(\lambda) g_{ii}(\mathbf{x},t) Y_i^2 \tilde{\zeta}(\mathbf{x},t,\lambda,\mathbf{Y})\, d\tilde{\sigma}^{\lambda\lambda}_{x,t}(\mathbf{Y}) d\mathbf{x}dt\right) d\lambda = 0, \tag{67}$$

где $\tilde{\zeta}(\mathbf{x},t,\lambda,\mathbf{Y}) = \zeta(\mathbf{x},t,\lambda,\widetilde{\Theta}^*(\mathbf{x},t)\mathbf{Y})$ и $\tilde{\sigma}^{\lambda\lambda}_{x,t}(\mathbf{Y}) = \sigma^{\lambda\lambda}_{x,t}(\widetilde{\Theta}^*(\mathbf{x},t)\mathbf{Y})$. Поскольку $\zeta \in C_0\big(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda; C\big(\mathbb{S}^d_Y\big)\big)$ произвольна, $\tilde{\zeta}$ также произвольна и принадлежит классу $C_0\big(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda; C\big(\mathbb{S}^d_Y\big)\big)$. В силу изложенных выше свойств отображения $\sigma^{\lambda\lambda}_{x,t}$ и оператора $\widetilde{\Theta}$ мерозначное отображение $\tilde{\sigma}^{\lambda\lambda}$ неотрицательно и принадлежит классу $L^2_w\big(\Pi, \mathbb{M}(\mathbb{S}^d_Y)\big)$. Таким образом, в терминах вектора $\mathbf{Y}$ интегральное равенство (22) имеет такой же вид, как и в случае диагональной матрицы A.

Вводя обозначение (66) в третьем интеграле из равенства (61), получаем следующее равенство:

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}_\lambda} (b'(\lambda))^2\zeta_5\zeta_7(\lambda)a_{ijx_r}\left(\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y})\right) y_i y_j\, d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\int\limits_{\Pi}\int\limits_{\mathbb{S}^d} (b'(\lambda))^2\zeta_5\zeta_7(\lambda)\sum_{i=1}^{d_0}\big(g_{iix_r}Y_i^2 + g_{ii}Y_iY_{ix_r}\big)\Psi_r(\mathbf{Y})\,d\tilde\sigma^{\lambda\lambda}_{x,t}(\mathbf{Y})d\mathbf{x}dtd\lambda, \quad (68)$$

где $\Psi_r(\mathbf{Y})$ — выражение, которое получается из $\psi_{y_r}(\mathbf{y}) + y_r y_l\psi_{y_l}(\mathbf{y}) + y_r\psi(\mathbf{y})$ после подстановки (66).

В силу (67) носитель H-меры $d\tilde\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{Y}) = d\tilde\sigma^{\lambda\lambda}_{x,t}(\mathbf{Y})d\mathbf{x}dt$ лежит в области

$$M_1 = \left\{(\mathbf{x},t,\mathbf{Y})\in\Pi\times\mathbb{S}^d \mid \sum_{i=1}^{d_0} g_{ii}(\mathbf{x},t)Y_i^2 = 0\right\}$$

при п. в. $\lambda\in\mathbb{R}$. Следовательно, интеграл (68) равен сумме интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\int\limits_{M_1}(b'(\lambda))^2\zeta_5\zeta_7(\lambda)\sum_{i=1}^{d_0} g_{iix_r}Y_i^2\Psi_r(\mathbf{Y})\,d\tilde\sigma^{\lambda\lambda}_{x,t}(\mathbf{Y})d\mathbf{x}dtd\lambda$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\int\limits_{M_1}(b'(\lambda))^2\zeta_5\zeta_7(\lambda)\sum_{i=1}^{d_0} g_{ii}Y_iY_{ix_r}\Psi_r(\mathbf{Y})\,d\tilde\sigma^{\lambda\lambda}_{x,t}(\mathbf{Y})d\mathbf{x}dtd\lambda. \quad (69)$$

Заметим, что на множестве M_1 величины Y_i равны нулю при $i = 1,\dots,d_0$ в силу того, что g_{ii} положительны. Значит, оба интеграла в (69) и соответственно третий интеграл в (61) обращаются в нуль. Лемма доказана. $\square$

С учетом леммы 9 из равенства (61) следует, что

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^d\times\mathbb{R}_\lambda} b'(\lambda)\zeta_5(\mathbf{x},t)\zeta_7(\lambda)\psi(y_0 + (a_{i\lambda}(\mathbf{x},t,\lambda)$$

$$+ (1/2)b'(\lambda)a_{ijx_j}(\mathbf{x},t))y_i)d\mu^{\lambda\lambda}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})d\lambda = 0, \quad (70)$$

откуда в силу произвольности ζ_5, ζ_7 и ψ, а также нечетности ψ вытекает (23). Теорема 3 доказана.

§ 8. Доказательство теоремы 2

Из условия G и следствия 1 из теоремы 3 вытекает, что H-мера $\mu^{\lambda\lambda}$ при п. в. $\lambda\in\mathbb{R}$ тождественно равна нулю. Из этого факта и п. 4 леммы 3 вытекает, что $f^k(\cdot,\cdot,\lambda) \underset{k\nearrow+\infty}{\longrightarrow} f(\cdot,\cdot,\lambda)$ сильно в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$ при п. в. $\lambda\in\mathbb{R}$ и почти всюду в $\Pi\times\mathbb{R}_\lambda$. Поскольку f^k может принимать только два значения: 0 и 1, а f является монотонно неубывающей и непрерывной справа по λ функцией при п. в. $(\mathbf{x},t)$ и $f\equiv 0$ при $\lambda < -u_*$ и $f\equiv 1$ при $\lambda \ge u_*$, это означает, что f имеет вид

$$f(\mathbf{x},t,\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \ge \tilde u(\mathbf{x},t), \\ 0 & \text{при } \lambda < \tilde u(\mathbf{x},t) \end{cases} \quad (71)$$

с некоторой функцией $\tilde{u} \in L^\infty(\Pi)$, $\|\tilde{u}\|_{L^\infty} \le u_*$. Из формулы (11) и предельных соотношений (12) и (13) следует, что $\tilde{u}$ совпадает со слабым пределом $u = w\text{-}\lim\limits_{k \nearrow +\infty} u^k$ и что $\|u^k\|_{L^2(\mathscr{Q})} \underset{k \nearrow +\infty}{\longrightarrow} \|u\|_{L^2(\mathscr{Q})}$ для любого измеримого множества $\mathscr{Q} \subset \Pi$. Отсюда $u^k \underset{k \nearrow +\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, а значит, и в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$. Теорема 2 доказана.

§ 9. Доказательство теоремы 1

Введем в рассмотрение параболическую аппроксимацию задачи (1):

$$u_t + \partial_{x_i} a_i(\mathbf{x}, t, u) - \partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x}, t)\partial_{x_j} b(u)) - \varepsilon \partial^2_{x_i x_i} u = 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{72}$$

которая замыкается начальными данными (1b).

Основные положения теории параболических уравнений второго порядка гласят [1], что задача (72), (1b) имеет единственное гладкое решение u_ε для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Из принципа максимума и первого энергетического неравенства вытекают следующие оценки:

$$-u_* \le u_\varepsilon \le u_* \text{ п. в. в } \Pi, \quad \|A\nabla_x u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathscr{Q})} + \varepsilon\|\nabla_x u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathscr{Q})} \le c(\mathscr{Q}), \tag{73}$$

где $\mathscr{Q} \subset \Pi$ — произвольная ограниченная область с достаточно гладкой границей и постоянная $c(\mathscr{Q})$ не зависит от ε.

Заметим, что уравнение (72) допускает кинетическую формулировку вида (9), в которой

$$dm_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \lambda) = \varepsilon \partial_{x_i} u_\varepsilon \partial_{x_i} u_\varepsilon \, d\gamma_{u_\varepsilon(x,t)}(\lambda) d\mathbf{x} dt, \tag{74}$$

и что возможно выбрать подпоследовательность $\varepsilon = \varepsilon_k$ такую, что для u_{ε_k} и f_{ε_k} выполняются предельные соотношения (12) и (13). Проводя для этой кинетической формулировки те же рассуждения, что и при доказательстве теорем 2, 3 и следствия 1 в § 4–8, устанавливаем (извлекая при необходимости еще одну подпоследовательность ε_k), что

$$u_{\varepsilon_k} \underset{k \nearrow +\infty}{\longrightarrow} u \text{ сильно в } L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi). \tag{75}$$

Теперь домножим обе части уравнения (72) на $\zeta\varphi'(u)$, где $\zeta \in C^2(\Pi)$ — произвольная неотрицательная функция, обращающаяся в нуль в окрестности плоскости $\{t = T\}$ и при больших $|\mathbf{x}|$, и $\varphi \in C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ — произвольная выпуклая функция, и проинтегрируем на Π. Получаем равенство

$$\begin{aligned}\int\limits_\Pi (\zeta_t \varphi(u_\varepsilon) + \zeta_{x_i} q_i(\mathbf{x}, t, u_\varepsilon) - \zeta\varphi'(u_\varepsilon) D_{x_i} a_i(\mathbf{x}, t, u_\varepsilon) \\ + \zeta D_{x_i} q_i(\mathbf{x}, t, u_\varepsilon) + w(u_\varepsilon)\partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x}, t)\partial_{x_j}\zeta) \\ - \zeta\varphi''(u_\varepsilon) b'(u_\varepsilon)(\alpha_{il}(\mathbf{x}, t)\partial_{x_i} u_\varepsilon)(\alpha_{lj}(\mathbf{x}, t)\partial_{x_j} u_\varepsilon) \\ + \varepsilon\varphi(u_\varepsilon)\partial^2_{x_i x_i}\zeta - \varepsilon\zeta\varphi''(u_\varepsilon)\partial_{x_i} u_\varepsilon \partial_{x_i} u_\varepsilon) \, d\mathbf{x} dt + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(u_0)\zeta(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x} = 0.\end{aligned} \tag{76}$$

В силу предельного соотношения (75), неравенства

$$\int\limits_\Pi \varepsilon\zeta\varphi''(u_\varepsilon)\partial_{x_i} u_\varepsilon \partial_{x_i} u_\varepsilon \, d\mathbf{x} dt \ge 0$$

и известного свойства полунепрерывности снизу для выпуклых функционалов

$$\varliminf_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{\Pi}\zeta\varphi''(u_\varepsilon)b'(u_\varepsilon)(\alpha_{il}(\mathbf{x},t)\partial_{x_i}u_\varepsilon)(\alpha_{lj}(\mathbf{x},t)\partial_{x_j}u_\varepsilon)\,d\mathbf{x}dt$$

$$\geq\int\limits_{\Pi}\zeta\varphi''(u)b'(u)(\alpha_{il}(\mathbf{x},t)\partial_{x_i}u)(\alpha_{lj}(\mathbf{x},t)\partial_{x_j}u)\,d\mathbf{x}dt$$

(см., например, [23, гл. 1, § 1.1.3; гл. 2, § 2.3, предложение 2.3.2]), из равенства (76) при $\varepsilon_k\searrow 0$ выводим неравенство (7). Теорема 1 доказана.

Автор выражает признательность профессору Новгородского гос. университета Е. Ю. Панову за ряд критических замечаний и предложений, которые позволили существенно улучшить первоначальный текст, а также коллеге по Институту гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН И. В. Кузнецову за многократные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Ланконелли Э., Паскуччи А., Полидоро С.* Линейные и нелинейные ультрапараболические уравнения колмогоровского типа, возникающие в теории диффузии и финансовой математике // Международная математическая серия. Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. II. В честь академика О. А. Ладыженской. Новосибирск: Клюер/Пленум и Т. Рожковская, 2002. Т. 2. С. 223–242.
3. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
4. *Graetz L.* Uber die Wärmeleitungsfähigkeit von flüssigkeiten. P. 2 // Ann. Physik Chem. 1885. N 25. P. 337–357.
5. *Nusselt W.* Die abhängigkeit der wärmeübergangszahl von der rohrlänge // Z. Ver. Deut. Ing. 1910. Bd 54. S. 1154–1158.
6. *Lax P. D.* Hyperbolic systems of conservation laws. II // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 537–566.
7. *Tartar L.* The compensated compactness method applied to systems of conservation laws // Systems of Nonlinear PDEs. NATO ASI Series C111. Dordrecht; Boston; Massachusets: Reidel Publ. Comp., 1983. P. 263–285.
8. *Lions P. L., Perthame B., Tadmor E.* A kinetic formulation of multidimensional conservation laws and related equations // J. Amer. Math. Soc. 1994. V. 7. P. 169–191.
9. *Панов Е. Ю.* О последовательностях мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 1. С. 87–106.
10. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 2. С. 228–255.
11. *Chen G.-Q., Perthame B.* Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire. 2003. V. 20, N 4. P. 645–668.
12. *Панов Е. Ю.* О кинетической интерпретации мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Фундаментальная и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 1. С. 317–332.
13. *Perthame B.* Kinetic formulations of conservation laws. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.
14. *Tartar L. H*-measures, a new approach for studying homogenisation oscillations and concentration effects in partial differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1990. V. 115, N 3–4. P. 193–230.
15. *Gerárd P.* Microlocal defect measures // Comm. Partial Differential Equations. 1991. V. 16, N 11. P. 1761–1794.
16. *Malek J., Nečas J., Rokyta M., Ružička M.* Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs. London: Chapman and Hall, 1996.
17. *Панов Е. Ю.* Об условии сильной предкомпактности ограниченных множеств мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 3. С. 109–128.

18. *Sazhenkov S. A.* A Cauchy problem for the Tartar equation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 2002. V. 132, N 2. P. 395–418.
19. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1965.
20. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
21. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. V. 98, N 3. P. 511–547.
22. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
23. *Adams D. R., Hedberg L. I.* Function spaces and potential theory. New York; Berlin; Heidelberg, etc.: Springer-Verl., 1996. (Compr. Studies in Math.; V. 314).

Статья поступила 3 ноября 2004 г., окончательный вариант — 12 мая 2005 г.

Саженков Сергей Александрович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
sazhenkovs@yahoo.com