*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2006. Том 47, № 2*

*УДК 512.5*

# О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ РАЗМЕРНОСТЯХ ДЛЯ $u$–ГРУПП

**В. Н. Ремесленников, Е. И. Тимошенко**

**Аннотация:** Исследуются вопросы, связанные с алгебраической геометрией над свободной метабелевой группой. Вводятся понятия топологических размерностей, основанные на длинах цепочек неприводимых замкнутых множеств. Изучаются эти размерности.

**Ключевые слова:** алгебраическая геометрия, метабелева группа, топологическая размерность.

## 1. Введение

Статья выполнена в рамках проекта по созданию алгебраической геометрии для свободной метабелевой группы.

Пусть $G[X]$ обозначает свободное произведение заданной группы $G$ и свободной группы с базисом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Группа $G[X]$ играет в алгебраической геометрии над группой $G$ роль кольца многочленов. В соответствии с [1] множество решений некоторой системы уравнений над $G[X]$ называется *алгебраическим подмножеством аффинного пространства* $G^n$. На $G^n$ определена топология Зарисского: в качестве предбазы системы замкнутых множеств берутся алгебраические подмножества из $G^n$. Имеется двойственная к категории алгебраических множеств категория координатных групп. Если $B$ — алгебраическое множество, то фактор-группа $G[X]$ по аннулятору $B$ называется *координатной группой* алгебраического множества $B$.

Размерность алгебраического множества $B$ определяется стандартным способом, а именно, она равна такому числу $n$, что в $B$ существует цепочка различных между собой неприводимых замкнутых множеств:

$$B = B_0 \supset B_1 \supset \cdots \supset B_n,$$

и не существует цепочки с бо́льшим числом членов. Строго убывающей цепочке неприводимых алгебраических множеств соответствует цепочка собственных (с неединичным ядром) эпиморфизмов координатных групп.

Группа $G$ называется *u-группой*, если она удовлетворяет универсальной теории свободной метабелевой группы ранга $\geq 2$. Известно [2, 3], что каждая координатная группа является $u$-группой. Поэтому представляет интерес изучение длин цепочек эпиморфизмов для $u$-групп. В зависимости от того,

Работа обоих авторов выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05.01.00292), кроме того, работа второго автора выполнена при финансовой поддержке научной программы МО РФ «Фундаментальные исследования высшей школы. Университеты России» (грант УР 04.01.031).

встречаются ли в цепочке абелевы группы или нет, мы определяем две топологические размерности для $u$-групп. Наша статья посвящена исследованию этих размерностей.

Теорема 1, доказанная в работе, устанавливает значение топологической размерности для группы $M(T_n, A_m)$, изоморфной дискретному сплетению свободных абелевых групп рангов $n$ и $m$ соответственно. Модифицируя доказательство теоремы 1, получаем значение неабелевой топологической размерности группы $M(T_n, A_m)$. Мы вводим класс $U_{\leftthreetimes}$ расщепляемых $u$-групп и доказываем, что для любой неабелевой $u$-группы $G$ существует вложение в расщепляемую оболочку $G_{\mathrm{split}} \in U_{\leftthreetimes}$. Оказывается, что топологические размерности групп $G$ и $G_{\mathrm{split}}$ тесно связаны. Более того, неабелевы топологические размерности этих групп совпадают (теорема 2). Это позволяет во многих случаях проводить вычисления топологических размерностей для групп, рассматривая их расщепляемые оболочки. Используя этот путь, мы находим топологические размерности свободной метабелевой группы (теоремы 3 и 4).

## 2. Расщепляемые *u*-группы

**2.1.** ***u*-Группы.** Пусть $G$ — метабелева группа, т. е. группа $G$ имеет абелеву нормальную подгруппу $M$ такую, что $\overline{G} = G/M$ — абелева группа. Элементы группы $G$ действуют на подгруппе $M$ сопряжением: $m^g = g^{-1}mg$, $m \in M$, $g \in G$. Относительно этого действия подгруппа $M$ наделяется структурой правого $\mathbf{Z}\overline{G}$-модуля, где $\mathbf{Z}\overline{G}$ — целочисленное групповое кольцо группы $\overline{G}$.

Обозначим через $\mathrm{Fit}(G)$ радикал Фиттинга группы $G$, т. е. подгруппу, порожденную всеми нильпотентными нормальными подгруппами группы $G$.

Определение. Метабелеву группу без кручения $G$ называют *u-группой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\mathrm{Fit}(G)$ — абелева группа;

(2) $A = G/\mathrm{Fit}(G)$ — абелева группа без кручения;

(3) $\mathrm{Fit}(G)$ как $\mathbf{Z}A$-модуль не имеет кручения.

Класс $u$-групп можно определить универсальными аксиомами [3, 4]. Необходимые сведения об $u$-группах и их связях с алгебраической геометрией над группами можно найти в работах [2–4].

Из определения следует, что неабелева $u$-группа имеет тривиальный центр.

В дальнейшем будем ссылаться на следующее

**Предложение 1** [2]. *Пусть $G$ — неабелева u-группа и $N$ — изолированный идеал из $\mathrm{Fit}(G)$. Тогда фактор-группа $G/N$ является u-группой.*

В [2] для любой конечно порожденной $u$-группы $G$ определены инварианты $\alpha(G)$ и $\beta(G)$. Напомним, что $\alpha(G)$ равно рангу свободной абелевой группы $A = G/\mathrm{Fit}(G)$. Пусть $n$ — минимальный ранг свободного $\mathbf{Z}A$-модуля, содержащего $\mathrm{Fit}(G)$. Тогда $\beta(G) = n$. Эквивалентным образом можно определить $\beta(G)$ как максимальную мощность системы линейно независимых над $\mathbf{Z}A$ элементов в $\mathrm{Fit}(G)$.

В [2] доказаны следующие утверждения, которые объединим в

**Предложение 2.** *Если $G_1$ и $G_2$ — конечно порожденные u-группы и $\varphi : G_1 \to G_2$ — эпиморфизм, то*

(1) $\alpha(G_2) \leq \alpha(G_1)$;

(2) *если* $\alpha(G_2) = \alpha(G_1)$, *то* $\beta(G_2) \leq \beta(G_1)$; *если* $\ker\varphi \neq 1$ *и* $\alpha(G_2) = \alpha(G_1)$, *то* $\beta(G_2) < \beta(G_1)$;

(3) *если $G$ — неабелева $u$-группа, допускающая систему из $n$ порождающих, то $\beta(G) \leq n-1$.*

**2.2. Класс групп $U_{\rightthreetimes}$.** Обозначим через $U_{\rightthreetimes}$ класс неабелевых $u$-групп $G$, у которых радикал $\mathrm{Fit}(G)$ дополняем в $G$. Назовем эти группы *$u_{\rightthreetimes}$-группами.*

Пусть $A$ — некоторая группа и $T$ — некоторый $\mathbf{Z}A$-модуль. Через $M(T,A)$ обозначим группу матриц

$$M(T,A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix},\ a \in A,\ t \in T \right\}.$$

Отождествим группу $A$ с группой матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а модуль $T$ — с модулем $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$.

Если модуль $T$ не имеет кручения, то радикал Фиттинга группы $M(T,A)$ совпадает с подгруппой $\widetilde{T}$, а фактор-группа по Фиттингу изоморфна группе $A$.

**Лемма 1.** *Пусть $G = M(T,A)$ и $\overline{G} = M(\overline{T},\overline{A})$, $\varphi : G \to \overline{G}$ — некоторый эпиморфизм. Если $G$ и $\overline{G}$ являются $u$-группами, то*

(1) $\varphi(T) = \overline{T}$,

(2) $\overline{G} \cong M(\overline{T}, \varphi(A))$.

Доказательство. (1) Так как при эпиморфизме $\varphi$ радикал Фиттинга отображается в радикал Фиттинга, то $\varphi(T) \leq \overline{T}$. Пусть $\bar{\tau} \in \overline{T}$ и $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ — прообраз элемента $\bar{\tau}$ в группе $G$. Тогда образ элемента $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ лежит в $\overline{T}$. Элемент $\varphi(a)$ коммутирует с подгруппой $\varphi(A)$. С другой стороны $\varphi(a)$ лежит в $\overline{T}$ и поэтому коммутирует с $\varphi(T)$. Значит, $\varphi(a) = 1$ и $\bar{\tau}$ является образом элемента $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Так как $\varphi(T) = \overline{T}$, достаточно доказать, что $\overline{T} \cap \varphi(A) = 1$. Пусть $\bar{t} \in \overline{T}$ и $\bar{t} = \varphi(a)$, $a \in A$. Тогда

$$[\varphi(a), \varphi(A)] = [\varphi(a), \overline{T}] = 1,$$

т. е. $\varphi(a) = 1$. Лемма доказана.

**Предложение 3.** *Для неабелевой $u$-группы $G$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$G$ является $u_{\rightthreetimes}$-группой;*

(2) *$G \cong M(T,A)$ для некоторой абелевой группы без кручения $A$ и некоторого $\mathbf{Z}A$-модуля $T$ без кручения;*

(3) *$G$ — фактор-группа группы $M(F,A)$, где $A$ — абелева группа без кручения, а $F$ — свободный $\mathbf{Z}A$-модуль.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $T = \mathrm{Fit}(G), A = G/T$. Так как подгруппа $T$ дополняема в $G$, то $G \cong M(T,A)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $F$ — свободный $\mathbf{Z}A$-модуль и $F/N \cong T$. Тогда группа $G$ является гомоморфным образом группы $M(F,A)$, а ядро гомоморфизма совпадает с подгруппой $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\varphi : M(F,A) \to G$ и $R = \ker\varphi$. Докажем, что

$$R = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ R_1 & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого $\mathbf{Z}A$-подмодуля $R_1$ модуля $F$ и некоторой абелевой подгруппы $A_1$ из $A$. Так как $G$ является $u$-группой, этого достаточно для завершения доказательства.

Пусть $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ — некоторый элемент из $R$. Покажем, что элементы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ также принадлежат $R$.

Действительно, существует элемент $c$ из подгруппы $F$, не принадлежащий $R$. В противном случае группа $G$ абелева. Так как элемент $c$ принадлежит радикалу Фиттинга группы $M(F,A)$, его образ $\varphi(c)$ принадлежит $\mathrm{Fit}(G)$ и $\varphi(c) \neq 1$. Коммутатор $[c,g] = c^{a-1}$ лежит в $R$. Поэтому

$$\varphi(c)^{\varphi(a)-1} = 1.$$

Поскольку $\mathrm{Fit}(G)$ не имеет кручения, то $\varphi(a) = 1$. Значит, $a, t \in R$. Предложение доказано.

Так как $R$ — нормальная подгруппа в $M(F,A)$, то $R_1 \geq F(A_1 - 1)$ и тем самым

$$G \cong \begin{pmatrix} A/A_1 & 0 \\ F/R_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нам потребуется следующая лемма, ограничивающая значение $\beta(G)$ для конечно порожденных групп из класса $U_{\curlywedge}$.

**Лемма 2.** *Предположим, что $u$-группа $G$ является гомоморфным образом группы $M(F,A)$, где $F$ — свободный $\mathbf{Z}A$-модуль ранга $n$. Тогда $\beta(G) \leq n$.*

Доказательство. Из леммы 1 и предложения 3 следует, что $G = M(T,B)$, где $\mathbf{Z}B$-модуль $T$ является гомоморфным образом $\mathbf{Z}A$-модуля $F$, причем модульный гомоморфизм согласован с гомоморфизмом групп $A \to B$. Следовательно, модуль $T$ порожден не более чем $n$ элементами. Так как $\beta(G)$ означает мощность максимальной линейно независимой системы элементов из $T$, то $\beta(G) \leq n$.

**2.3. Расщепляемые оболочки и стандартные вложения.** Следующее предложение позволяет вкладывать произвольную $u$-группу в группу из класса $U_{\curlywedge}$, имеющую те же параметры $\alpha$ и $\beta$, что и исходная группа.

**Предложение 4.** *Пусть $G$ — неабелева $u$-группа; $T = \mathrm{Fit}(G)$; $\overline{G} = G/T$; $\bar{g}$ — образ элемента $g \in G$ при естественном гомоморфизме $G \to \overline{G}$; $n \geq 1$; $h_1, \ldots, h_n$ — фиксированные элементы из $G$. Предположим, что $\bar{h}_1 \neq 1$ и элемент $\bar{h}_1$ отличен от остальных элементов $\bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_n$. Тогда отображение*

$$g \mapsto \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ \prod_{i=1}^{n} [g, h_i] & 1 \end{pmatrix}$$

*является вложением группы $G$ в группу матриц $M(T, \overline{G})$. При этом если $\delta$ обозначает элемент $\bar{h}_1 + \cdots + \bar{h}_n - n$ из $\mathbf{Z}\overline{G}$, то*

$$T^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T \cdot \delta & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для $j = 1, 2$ имеем

$$g_j^\alpha = \begin{pmatrix} \bar{g}_j & 0 \\ \prod\limits_{i=1}^{n} [g_j, h_i] & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(g_1 g_2)^\alpha = \begin{pmatrix} \bar{g}_1 \bar{g}_2 & 0 \\ \prod\limits_{i=1}^{n} [g_1 g_2, h_i] & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}_1 \bar{g}_2 & 0 \\ \prod\limits_{i=1}^{n} [g_1, h_i]^{g_2} [g_2, h_i] & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как в модульной записи

$$[g_1, h_i]^{g_2} [g_2, h_i] = [g_1, h_i] \cdot \bar{g}_2 + [g_2, h_i],$$

то $(g_1 g_2)^\alpha = g_1^\alpha g_2^\alpha$.

Покажем, что $\ker \varphi = 1$. Пусть $g \in \ker \varphi$. Тогда $g$ принадлежит подгруппе $T$. Следовательно,

$$\prod_{i=1}^{n} [g, h_i] = g^{\bar{h}_1 + \dots + \bar{h}_n - n}.$$

По предположению элемент $\bar{h}_1 + \dots + \bar{h}_n - n$ ненулевой. Так как $\mathbf{Z}\overline{G}$-модуль $T$ не имеет кручения, то $g = 1$. Предложение доказано.

Пусть $G$ — некоторая $u$-группа. Группу $H$ из класса $U_\rightthreetimes$ будем называть *расщепляемой оболочкой для группы* $G$, если группы $\overline{H} = H/\operatorname{Fit}(H)$ и $\overline{G} = G/\operatorname{Fit}(G)$ изоморфны, а $\mathbf{Z}\overline{G}$-модуль $\operatorname{Fit}(G)$ изоморфен $\mathbf{Z}\overline{H}$-модулю $\operatorname{Fit}(H)$. Для абелевой группы $A$ ее расщепляемой оболочкой считаем группу $A$. Предложение 4 позволяет по любой $u$-группе строить ее расщепляемую оболочку.

Группу $M(T, \overline{G})$ и вложение $G \xrightarrow{\alpha} M(T, \overline{G})$, построенные в предложении 4, будем называть *стандартной расщепляемой оболочкой* и *стандартным вложением*, соответствующими набору элементов $h_1, \dots, h_n$. Будем обозначать их соответственно через $G_{\text{split}}(h_1, \dots, h_n)$ и $\alpha(h_1, \dots, h_n)$. Если элементы $h_1, \dots, h_n$ определены заранее, то будем писать $G_{\text{split}}$ и $\alpha$.

Нетрудно доказать следующее

**Предложение 5** (критерий вхождения). *Пусть $\alpha : G \to G_{\text{split}}$ — стандартное вложение неабелевой $u$-группы $G$ в стандартную расщепляемую оболочку, соответствующее набору элементов $g_1, \dots, g_n$. Обозначим $T = \operatorname{Fit}(G)$, $\overline{G} = G/T$, $\delta = \bar{g}_1 + \dots + \bar{g}_n - n$. Элемент $\begin{pmatrix} a & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \overline{G}$, $t \in T$, из группы $G_{\text{split}}$ лежит в $G^\alpha$ тогда и только тогда, когда*

1) *существует элемент $g \in G$ такой, что $\bar{g} = a$;*

2) *элемент $t - \prod\limits_{i=1}^{n} [g, g_i]$ из $\mathbf{Z}\overline{G}$-модуля $T$ делится на $\delta$.*

Доказательство сразу следует из того, что для $g \in T$

$$\prod_{i=1}^{n} [g, g_i] = g^\delta.$$

**Предложение 6.** *Пусть $G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$ — эпиморфизм неабелевых u-групп, $g$ — элемент из $G_1$ с тем свойством, что $g^\varphi$ не принадлежит подгруппе $\mathrm{Fit}(G_2)$, $G_{1,\mathrm{split}} = G_{1,\mathrm{split}}(g)$, $G_{2,\mathrm{split}} = G_{2,\mathrm{split}}(g^\varphi)$. Тогда существует гомоморфизм*

$$\psi : G_{1,\mathrm{split}} \to G_{2,\mathrm{split}}$$

*такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow[\varphi]{} & G_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_1(g)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_2(g^\varphi)} \\ G_{1,\mathrm{split}} & \xrightarrow[\psi]{} & G_{2,\mathrm{split}} \end{array}$$

*коммутативна.*

Доказательство. Пусть $T_i = \mathrm{Fit}(G_i)$, $\overline{G}_i = G_i/T_i$, $f \in G_1$, $t \in T_1$. Определим отображение $\psi : M(T_1, \overline{G}_1) \to M(T_2, \overline{G}_2)$ по правилу

$$\begin{pmatrix} \bar f & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \overset{\psi}{\mapsto} \begin{pmatrix} \bar f^{\overline{\varphi}} & 0 \\ t^\varphi & 1 \end{pmatrix},$$

где $\overline{\varphi} : \overline{G}_1 \to \overline{G}_2$ — индуцированный гомоморфизм.

Легко проверить, что $\psi$ — гомоморфизм и диаграмма коммутативна. Утверждение доказано.

Можно показать, что построенный гомоморфизм не всегда является эпиморфизмом.

**2.4. Локализация групп из класса $U_\curlywedge$.** Пусть $G = M(T, A)$ — группа из класса $U_\curlywedge$, $R = \mathbf{Z}A$. Выберем в кольце $R$ мультипликативно замкнутое множество $S$ с единицей. Стандартным способом построим кольцо частных $S^{-1}R$ относительно $S$, а также $S^{-1}R$-модуль $S^{-1}T$. Заметим, что кольцо $R$ вкладывается в кольцо $S^{-1}R$, а $R$-модуль $T$ — в $S^{-1}R$-модуль $S^{-1}T$. При этом возникает вложение группы $G$ в группу $G_s = M(S^{-1}T, A)$ из класса $U_\curlywedge$, заданное следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a/1 & 0 \\ t/1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение. Группа $G_s$ называется *локализацией $u_\curlywedge$-группы* $G$ относительно $S$.

**Предложение 7.** *Пусть $G = M(T, A)$, $\overline{G} = M(\overline{T}, \overline{A})$ — группы из класса $U_\curlywedge$ и $\varphi : G \to \overline{G}$ — некоторый эпиморфизм, причем $\varphi(A) = \overline{A}$. Пусть $R = \mathbf{Z}A$, $\overline{R} = \mathbf{Z}\overline{A}$ и $\psi : R \to \overline{R}$ — гомоморфизм колец, индуцированный отображением $\varphi : A \to \overline{A}$. Пусть $S$ — мультипликативно замкнутое подмножество из $R$ и $\overline{S}$ — его образ в $\overline{R}$. Если пересечение $S \cap \ker\psi$ пусто, то эпиморфизм $\varphi$ можно продолжить до группового эпиморфизма*

$$\varphi_s : G_s \to \overline{G}_{\bar s}$$

*локализаций этих групп относительно $S$ и $\overline{S}$ соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим отображение групп $\varphi_s : G_s \to \overline{G}_{\bar s}$, определенное по правилу

$$\varphi_s : \begin{pmatrix} a & 0 \\ t/s & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^\varphi & 0 \\ t^\varphi/s^\psi & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $t_1/s_1 = t_2/s_2$, то

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ t_1/s_1 & 1 \end{pmatrix}^{\varphi_s} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ t_2/s_2 & 1 \end{pmatrix}^{\varphi_s},$$

т. е. $\varphi_s$ определено корректно. Проверим, что $\varphi_s$ — гомоморфизм. Пусть для $i = 1, 2$

$$\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ t_i/s_i & 1 \end{pmatrix}^{\varphi_s} = \begin{pmatrix} a_i^{\varphi} & 0 \\ t_i^{\varphi}/s_i^{\psi} & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ t_1/s_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ t_2/s_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ (t_1 \cdot a_2s_2 + t_2s_1)/s_1s_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ (t_1 \cdot a_2s_2 + t_2s_1)/s_1s_2 & 1 \end{pmatrix}^{\varphi_s} = \begin{pmatrix} a_1^{\varphi}a_2^{\varphi} & 0 \\ (t_1 \cdot a_2s_2 + t_2s_1)^{\varphi}/s_1^{\psi}s_2^{\psi} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1^{\varphi}a_2^{\varphi} & 0 \\ (t_1^{\varphi} \cdot (a_2s_2)^{\psi} + t_2^{\varphi}s_1^{\psi})/s_1^{\psi}s_2^{\psi} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{\varphi} & 0 \\ t_1^{\varphi}/s_1^{\psi} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2^{\varphi} & 0 \\ t_2^{\varphi}/s_2^{\psi} & 1 \end{pmatrix}.$$

Предложение доказано.

**Предложение 8.** *Пусть $G_s$ — локализация $u_{\searrow}$-группы $G = M(T, A)$ относительно $S$. Если $S$ не содержит нулевого элемента, то значения параметра $\beta$ для групп $G$ и $G_s$ совпадают, т. е. $\beta(G) = \beta(G_s)$.*

При вычислении топологических размерностей расщепляемых $u$-групп полезно следующее

**Предложение 9.** *Пусть $\varphi : G \to \overline{G}$ — эпиморфизм конечно порожденных групп из класса $U_{\searrow}$. Если $\alpha(\overline{G}) = \alpha(G) - 1$, то $\beta(\overline{G}) \le \beta(G)$.*

Доказательство. Пусть $G = M(T, A)$, $\overline{G} = M(\overline{T}, \overline{A})$, где $A$ и $\overline{A}$ — свободные абелевы группы конечных рангов, $R = \mathbf{Z}A$, $\overline{R} = \mathbf{Z}\overline{A}$, а $T$ и $\overline{T}$ — конечно порожденные модули без кручения над кольцами $R$ и $\overline{R}$ соответственно.

Пусть $\varphi_A$ означает сужение эпиморфизма $\varphi$ на подгруппу $A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. На основании леммы 1 можно считать, что $\varphi_A(A) = \overline{A}$. По той же лемме $\varphi(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \overline{T} & 1 \end{pmatrix} = \overline{T}$.

Пусть $a_1, \dots, a_m$ — базис группы $A$, $\varphi_A(a_j) = \bar{a}_j$, $j = 2, \dots, m$, $\varphi_A(a_1) = 1$ и элементы $\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ образуют базис группы $\overline{A}$.

В качестве мультипликативного подмножества $S$ выберем множество ненулевых элементов из целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}\langle a_2, \dots, a_m\rangle$.

Расширим гомоморфизм $\varphi_A : A \to \overline{A}$ до гомоморфизма колец $\widetilde{\varphi}_A : R \to \overline{R}$. Так как $\ker \widetilde{\varphi}_A \cap S$ пусто, эпиморфизм $\varphi$ согласно предложению 7 можно продолжить до эпиморфизма соответствующих локализаций:

$$\varphi_S : G_S \to \overline{G}_{\overline{S}},$$

где $\overline{S} = \varphi_A(S)$. При этом $\varphi_S(S^{-1}T) = \overline{S}^{-1}\overline{T}$. По предложению 8

$$\beta(G) = \beta(G_S), \quad \beta(\overline{G}) = \beta(\overline{G}_{\overline{S}}).$$

Кольцо частных $\overline{S}^{-1}\overline{R}$ является полем. Обозначим его через $P$. Тогда $S^{-1}R = P\langle a_1\rangle$ — кольцо лорановых многочленов от переменной $a_1$ над полем $P$. Значит,

$S^{-1}R$ — кольцо главных идеалов. В этом случае модуль без кручения $S^{-1}T$ свободен над кольцом $S^{-1}R$.

Обозначим максимальное число линейно независимых элементов $R$-модуля $T$ через $\beta(T)$. Получим

$$\beta(\overline{G}) = \beta(\overline{T}) = \beta(\overline{S}^{-1}\overline{T}) = \beta(\varphi_S(S^{-1}T)).$$

Но $S^{-1}T$ является свободным $S^{-1}R$ модулем. Поэтому

$$\beta(\varphi_S(S^{-1}T)) \leq \beta(S^{-1}T) = \beta(G).$$

Предложение доказано.

### 3. Топологическая размерность $u$-групп

Определение. Пусть $G$ — конечно порожденная $u$-группа. Рассмотрим последовательность $u$-групп $G_i$ и эпиморфизмов $\varphi_j$ таких, что их ядра $\ker(\varphi_j)$ нетривиальны:

$$G = G_0 \xrightarrow{\varphi_1} G_1 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_{l-1}} G_{l-1} \xrightarrow{\varphi_l} 1.$$

Назовем такую последовательность *$u$-последовательностью длины* $l = l(G)$.

Из предложения 3 вытекает, что для $u_{\curlywedge}$-группы $G$ все неабелевы члены последовательности являются $u_{\curlywedge}$-группами.

Определение. Максимальную длину $l(G)$ всех $u$-последовательностей, составленных для конечно порожденной $u$-группы $G$, назовем ее *топологической размерностью* и обозначим через $\operatorname{tdim}(G)$. Если ограничиться только $u$-последовательностями, все члены которых — неабелевы $u$-группы, то придем к понятиям *неабелевой $u$-последовательности* и *неабелевой топологической размерности*, которую будем обозначать через $\operatorname{tdim}_0(G)$.

Топологические размерности единичной группы положим равными нулю.

С точки зрения приложений к алгебраической геометрии над группой $G$ более существенным является неабелева топологическая размерность этой группы.

Обозначим через $r_0(G)$ число бесконечных циклических групп в разложении абелевой группы $G/[G,G]$ в произведение циклических. Легко установить следующее неравенство:

$$\operatorname{tdim}(G) \leq \operatorname{tdim}_0(G) + r_0(G).$$

**Лемма 3.** *Пусть $A$ — свободная абелева группа с базисом $a_1, \dots, a_m$, а $T$ — свободный $\mathbf{Z}A$-модуль с базисом $t_1, \dots, t_n$, $n \geq 2$, и для $i = 1, \dots, n-1$ положим*

$$\tau_i = t_i(1 - a_1) + t_{i+1}(1 - a_2).$$

*Пусть $T_i$ — подмодуль из $T$, порожденный элементами $\tau_1, \dots, \tau_i$. Тогда $T_i$ — изолированные подмодули из $T$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $t \in T$ и $0 \neq \gamma \in \mathbf{Z}A$ выполнены условия $t \notin T_i$, но $t\gamma \in T_i$. Можно считать, что $\gamma$ — неразложимый элемент из области целостности $\mathbf{Z}A$. Пусть

$$t = t_1\alpha_1 + \dots + t_{i+1}\alpha_{i+1},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1} \in \mathbf{Z}A$. Из равенства

$$t\gamma = \tau_1\beta_1 + \dots + \tau_i\beta_i$$

получим систему

$$\begin{aligned} \alpha_1\gamma &= \beta_1(1-a_1)\\ \alpha_2\gamma &= \beta_1(1-a_2)+\beta_2(1-a_1)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_i\gamma &= \beta_{i-1}(1-a_2)+\beta_i(1-a_1)\\ \alpha_{i+1}\gamma &= \beta_i(1-a_2). \end{aligned}$$

Если $\gamma$ и $1-a_1$ взаимно просты, то $\beta_1=\beta_1'\gamma,\dots,\beta_i=\beta_i'\gamma$. Значит, $t=\tau_1\beta_1'+\dots+\tau_i\beta_i'$. Если $\gamma=1-a_1$, то получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1'(1-a_1)\\ \alpha_2 &= \beta_1'(1-a_2)+\beta_2'(1-a_1)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_i &= \beta_{i-1}'(1-a_2)+\beta_i'(1-a_1)\\ \alpha_{i+1} &= \beta_i'(1-a_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $t=\tau_1\beta_1'+\dots+\tau_i\beta_i'$. Лемма доказана.

Для всех целых неотрицательных $m,n$ определим функцию

$$F(m,n)=\begin{cases} n & \text{для } m=0,\ n\ge 0,\\ n+2 & \text{для } m=1,\ n\ge 1,\\ 2n+2 & \text{для } m=2,\ n\ge 2,\\ F(m-2,n)+n & \text{для четного } m\ge 4,\ n\ge 2,\\ F(m-1,n)+1 & \text{для нечетного } m\ge 3,\ n\ge 2,\\ m+2 & \text{для } m\ge 2,\ n=1. \end{cases}$$

Из этой формулы следует, что при четном $m\ge 4$ и всех $n\ge 2$ имеем $F(m,n)=nm/2+n+2$, а при нечетном $m\ge 3$ и всех $n\ge 2$ будет $F(m,n)=n(m+1)/2+3$.

**Теорема 1.** *Пусть $A_m$ — свободная абелева группа ранга $m$, $T_n$ — свободный $\mathbf{Z}A_m$-модуль ранга $n$, $W_{m,n}=M(T_n,A_m)$. Тогда топологическая размерность группы $W_{m,n}$ равна $F(m,n)$.*

Доказательство. Докажем вначале, что для группы $W_{m,n}$ существует $u$-последовательность длины $F(m,n)$ и тем самым $\mathrm{tdim}(W_{m,n})\ge F(m,n)$.

1. Пусть $m=0$, т. е. $W_{m,n}=A_n$ — свободная абелева группа ранга $n$. Тогда

$$A_n\to A_{n-1}\to\dots\to A_1\to 1$$

— искомая $u$-последовательность длины $F(0,n)$. Ясно, что $\mathrm{tdim}(W_{0,n})=n$.

2. Пусть $m=1$, $n\ge 1$. Тогда

$$W_{1,n}\to W_{1,n-1}\to\dots\to W_{1,1}\to A_2\to A_1\to 1$$

— искомая $u$-последовательность длины $n+2=F(1,n)$. Покажем, что в этом случае топологическая размерность группы $W_{1,n}$ равна $n+2$.

Пусть $H=M(T,A)$ — неабелева $u$-группа, причем $\alpha(H)=m$, $\beta(H)=n$. Легко понять, что абелизация $H_{ab}$ группы $H$ изоморфна группе $T/T(1-A)\times A$.

Так как $\beta(H) = n$, то абелева группа $T/T(1-A)$ содержит не более $n$ независимых элементов. Поэтому если $A_r$ — свободная абелева группа, являющаяся эпиморфным образом группы $H$, то ее ранг $r$ не превосходит $n+m$.

Значит, любая $u$-последовательность, имеющая максимальную длину, начинается с последовательности

$$W_{1,n} \to W_{1,n-1} \to \cdots \to W_{1,p},$$

$1 \le p \le n$, а затем характеристика $\alpha$ уменьшается до нуля, т. е. последовательность имеет продолжение

$$W_{1,p} \to A_{1+p} \to \cdots \to A_1 \to 1.$$

Длина всей $u$-последовательности для группы $W_{1,n}$ равна $n+2$. Так как ее значение не зависит от $p$, то $\operatorname{tdim}(W_{1,n}) = F(1,n)$ при любом $n \ge 1$.

3. Пусть $m = 2$, $n \ge 2$. Обозначим через $t_1, \ldots, t_n$ базис модуля $T_n$ и через $a_1, a_2$ — базис группы $A_2$. Рассмотрим элементы

$$\tau_i = t_i(1-a_1) + t_{i+1}(1-a_2)$$

при $i = 1, \ldots, n-1$. Положим

$$\overline{T}_1 = \tau_1 \mathbf{Z} A_2,\ \overline{T}_2 = \tau_1 \mathbf{Z} A_2 + \tau_2 \mathbf{Z} A_2, \ldots, \overline{T}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \tau_j \mathbf{Z} A_2.$$

По лемме 3 $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_{n-1}$ — изолированные подмодули из $T$. Поэтому $G_i = W_{2,n}/T_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, являются $u$-группами. Мы получили последовательность

$$W_{2,n} \to G_1 \to \cdots \to G_{n-1},$$

которую можно продолжить $u$-последовательностью

$$G_{n-1} \to A_{n+2} \to \cdots \to A_1 \to 1.$$

Длина результирующей $u$-последовательности для группы $W_{2,n}$ равна $2n+2 = F(2,n)$.

4. Пусть $m \ge 4$ четное, $n \ge 2$. Рассмотрим $u$-последовательность

$$W_{m,n} \to G_{m,n-1} \to \cdots \to G_{m,1} \to W_{m-2,n} \to \ldots,$$

где $\alpha(G_{m,i}) = m$, $\beta(G_{m,i}) = i$ и группы $G_{m,i}$ строятся по аналогии со случаем $m = 2$ с использованием леммы 3. Длина этой последовательности равна $n + F(m-2,n) = F(m,n)$.

5. Пусть $m \ge 3$ нечетное, $n \ge 2$. Рассмотрим $u$-последовательность

$$W_{m,n} \to W_{m-1,n} \to \ldots.$$

Ее длина равна $1 + F(m-1,n) = F(m,n)$.

6. Пусть $m \ge 2$, $n = 1$. Последовательность

$$W_{m,1} \to W_{m-1,1} \to \cdots \to W_{1,1} \to A_2 \to A_1 \to 1$$

имеет длину $m+2$ и является максимальной по длине.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно убедиться в справедливости следующих ограничений на длины $u$-последовательностей.

Пусть $u$-группа $G_{m,j}$ имеет характеристики $\alpha(G_{m,j}) = m$, $\beta(G_{m,j}) = j$ и является гомоморфным образом группы $W_{m,n}$, $1 \leq j \leq n$, $2 \leq n$. Тогда для любой $u$-последовательности группы $G_{m,j}$ имеют место следующие ограничения на ее длину:

1) $l(G_{0,j}) = j$;
2) $l(G_{1,j}) \leq j + 2$;
3) $l(G_{m,j}) \leq j + mn/2 + 2$, если $m \geq 2$ четное;
4) $l(G_{m,j}) \leq j + (m-1)n/2 + 3$, если $m \geq 3$ нечетное .

Оставшуюся часть доказательства теоремы мы посвятим доказательству ограничений 1–4.

Случай 1: $m = 0$ тривиален.

Случай 2: $m = 1$. Так как топологическая размерность группы $W_{1,j}$ равна $j + 2$, ограничение 2 очевидно.

Случай 3: $m = 2$, $n \geq 2$. $u$-Последовательность, построенная для группы $G_{2,j}$, имеет начало

$$G_{2,j} \to G_{2,j-1} \to \cdots \to G_{2,p},$$

где $1 \leq p \leq j$. Затем возможны продолжения $G_{2,p} \to G_{1,q}$ или $G_{2,p} \to G_{0,q}$. Рассмотрим отдельно каждую возможность.

(a) $G_{2,p} \to G_{1,q}$. Так как по предложению 9 $p \geq q$, то

$$l(G_{2,j}) \leq j - p + 1 + q + 2 \leq j + 3 \leq j + n + 2$$

при $n \geq 2$.

(b) $G_{2,p} \to G_{0,q}$. Тогда $l(G_{2,j}) \leq j + n + 2$. Случай 3 полностью разобран.

Случай 4: $m = 3$, $n \geq 2$. $u$-Последовательность для группы $G_{3,j}$, претендующая на роль максимальной, имеет начало

$$G_{3,j} \to G_{3,j-1} \to \cdots \to G_{3,p},$$

$1 \leq p \leq j$, и одно из следующих продолжений.

(a) $G_{3,p} \to G_{2,q}$. Получаем

$$l(G_{3,j}) = j - p + 1 + l(G_{2,q}) \leq j - p + 1 + q + n + 2 \leq j + n + 3.$$

(b) $G_{3,p} \to G_{1,q}$. В этом случае

$$l(G_{3,j}) = j - p + 1 + l(G_{1,q}) = j - p + 1 + q + 2 \leq j - 1 + n + 3 < j + n + 2.$$

(c) $G_{3,p} \to G_{0,q}$. В таком случае

$$l(G_{3,1}) = j - p + 1 + q \leq j + q \leq j + n + 3.$$

Случай 5: $m \geq 4$ четное. Предположим, что для меньших значений $m$ неравенства верны. Любая $u$-последовательность для группы $G_{m,j}$, претендующая на роль максимальной по длине, имеет начало

$$G_{m,j} \to G_{m,j-1} \to \cdots \to G_{m,p},$$

а затем одно из продолжений.

(a) $G_{m,p} \to G_{m-1,q}$. Тогда $l(G_{m,j}) = j - p + 1 + l(G_{m-1,q})$. Так как $m-1$ нечетное, меньшее $m$, для него $l(G_{m-1,q}) \leq q + (m-2)n/2 + 3$. Поэтому

$$l(G_{m,j}) \leq j - p + 1 + q + 3 \leq j + 2 + mn/2$$

при $n \geq 2$.

(b) $G_{m,p} \to G_{m-2,q}$. Так как $m-2$ нечетное и $n-2 \geq 2$, то

$$l(G_{m,j}) \leq j-p+1+l(G_{m-2,q}) \leq j-1+1+q+(m-2)n/2+2 \leq j+2+mn/2.$$

(c) $G_{m,p} \to G_{m-r,q}$, $r \geq 3$, $1 \leq q \leq n$. Имеем

$$l(G_{m,j}) = j-p+1+l(G_{m-r,q}) \leq j-p+1+n+(m-r)n/2+3 \leq mn/2+j+2.$$

Случай 6: $m \geq 5$ нечетное.

Как и в случае 5, $u$-последовательность, претендующая на роль максимальной, имеет начало

$$G_{m,j} \to G_{m,j-1} \to \cdots \to G_{m,p},$$

$1 \leq p \leq j$, а затем одно из следующих продолжений.

(a) $G_{m,p} \to G_{m-1,q}$. Тогда по индукции получаем

$$l(G_{m,j}) = j-p+1+l(G_{m-1,q}) \leq j-p+1+q+(m-1)n/2+2 \leq j+3+(m-1)n/2,$$

так как $q \leq p$.

(b) $G_{m,p} \to G_{m-2,q}$. В этом случае

$$\begin{aligned} l(G_{m,j}) &= j-p+1+l(G_{m-2,q}) \leq j-p+1+l(W_{m-2,n}) \\ &\leq j-p+1+n+(m-3)n/2+3 \leq j+(m-1)n/2+3. \end{aligned}$$

(c) $G_{m,p} \to G_{m-r,q}$, $r \geq 3$. В таком случае получаем

$$l(G_{m,j}) = j-p+1+l(G_{m-r,q}) \leq j-p+1+n+(m-3)n/2+3 \leq j+(m-1)n/2+3.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема позволяет вычислять неабелеву топологическую размерность для групп $W_{m,n}$.

Для всех целых положительных $m$, $n$ определим функцию

$$F_0(m,n) = \begin{cases} mn/2+1 & \text{для } n \geq 2 \text{ и четного } m, \\ (m+1)n/2 & \text{для } n \geq 1 \text{ и нечетного } m, \\ m & \text{для } n = 1 \text{ и любого } m. \end{cases}$$

**Теорема 1′.** *Пусть $A_m$ — свободная абелева группа ранга $m$, $T_n$ — свободный $\mathbf{Z}A_m$-модуль ранга $n$, $W_{m,n} = M(T_n, A_m)$. Тогда $\mathrm{tdim}_0(W_{m,n})$ равна $F_0(m,n)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и основано на следующих неравенствах. Пусть $u$-группа $G_{m,j}$ имеет характеристики $\alpha(G_{m,j}) = m$, $\beta(G_{m,j}) = j$ и является гомоморфным образом группы $W_{m,n}$. Тогда

1) если $m = 2l$, то $\mathrm{tdim}_0(G_{m,j}) \leq (l-1)n+j+1$;

2) если $m = 2l+1$, то $\mathrm{tdim}_0(G_{m,j}) =\leq ln+j$.

Окончание доказательства следует из того, что неабелевы $u$-последовательности

$$W_{1,n} \to W_{1,n-1} \to \cdots \to W_{1,1} \to 1,$$
$$W_{2,n} \to W_{2,n-1} \to \cdots \to W_{2,1} \to W_{1,1} \to 1,$$
$$W_{2l,n} \to W_{2l-1,n} \to \dots,$$
$$W_{2l+1,n} \to W_{2l+1,n-1} \to \cdots \to W_{2l+1,1} \to W_{2l-1,n} \to \dots$$

имеют длину $F_0(m,n)$.

**Теорема 2.** *Для любой конечно порожденной неабелевой $u$-группы $G$ имеет место равенство*

$$\mathrm{tdim}_0(G) = \mathrm{tdim}_0(G_{\mathrm{split}}).$$

Доказательство. Покажем вначале, что $\mathrm{tdim}_0(G) \geq \mathrm{tdim}_0(G_{\mathrm{split}})$. Пусть

$$G = G_0 \xrightarrow{\varphi_1} G_1 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} G_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} 1$$

— последовательность неабелевых $u$-групп и эпиморфизмов. По предложению 4 существуют гомоморфизмы $\psi_i : G_{i-1,\mathrm{split}} \to G_{i,\mathrm{split}}$ и вложение $\varphi_i : G_{i-1} \to G_i$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
G_0 & \xrightarrow[\varphi_1]{} & G_1 & \xrightarrow[\varphi_2]{} & \dots & \xrightarrow[\varphi_{n-1}]{} & G_{n-1} & \xrightarrow[\varphi_n]{} & 1 \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_n} \\
G_{0,\mathrm{split}} & \xrightarrow[\psi_1]{} & G_{1,\mathrm{split}} & \xrightarrow[\psi_2]{} & \dots & \xrightarrow[\psi_{n-1}]{} & G_{n-1,\mathrm{split}} & \xrightarrow[\psi_n]{} & 1
\end{array}$$

коммутативна.

Положим $H_0 = G_{0,\mathrm{split}}$, и пусть $H_i$ — образ $H_{i-1}$ при гомоморфизме $\psi_i$. Ограничение $\psi_i$ на $H_{i-1}$ обозначим через $\widehat{\psi}_i$. Получим последовательность $u$-групп и эпиморфизмов

$$H_0 \xrightarrow{\widehat{\psi}_1} H_1 \xrightarrow{\widehat{\psi}_2} \dots \xrightarrow{\widehat{\psi}_{n-1}} H_{n-1} \xrightarrow{\widehat{\psi}_n} 1.$$

Покажем, что $H_1, \dots, H_{n-1}$ — неабелевы $u$-группы и ядра эпиморфизмов $\widehat{\psi}_i$ неединичные.

Так как $G_i^{\alpha_i} \leq H_i \leq G_{i,\mathrm{split}}$, то $H_i$ — неабелевы $u$-группы. Пусть $g_{i-1}$ — неединичный элемент из $\ker \varphi_i$. Тогда $g_{i-1}^{\alpha_{i-1}}$ — неединичный элемент из $H_i$, лежащий в ядре эпиморфизма $\widehat{\psi}_i$.

Покажем, что

$$\mathrm{tdim}_0(G_{\mathrm{split}}) \geq \mathrm{tdim}_0(G).$$

Пусть $T_0 = \mathrm{Fit}(G)$, $A_0 = G/T_0$. Рассмотрим неабелеву $u$-последовательность

$$M(T_0, A_0) \xrightarrow{\varphi_1} M(T_1, A_1) \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_n} M(T_n, A_n). \tag{1}$$

Так как $M(T_n, A_n)$ — неабелева группа, в ней существует элемент $h_n$, не принадлежащий ее радикалу Фиттинга. Пусть $g_0'$ — прообраз элемента $h_n$ в группе $M(T_0, A_0)$. Элемент $g_0'$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ t_0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $1 \neq a_0 \in A_0$, $t_0 \in T_0$. Выберем в группе $G$ элемент $g_0$ так, что его образ в группе $A_0$ равен $a_0$.

Рассмотрим расщепляемую оболочку и стандартное вложение группы $G$, соответствующее элементу $g_0$, т. е.

$$\alpha : g \mapsto \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ [g, g_0] & 1 \end{pmatrix}.$$

Эпиморфизмы $\varphi_i$ индуцируют эпиморфизмы абелевых групп $\overline{\varphi}_i : A_{i-1} \to A_i$ и эпиморфизмы $\widetilde{\varphi}_i : T_{i-1} \to T_i$ модулей, согласованные с соответствующими $\overline{\varphi}_i$.

Рассмотрим эпиморфизмы $\psi_1, \ldots, \psi_n$, определенные по правилу:

$$\psi_1 : \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ [g, g_0] & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{g}^{\overline{\varphi}_1} & 0 \\ [g, g_0]^{\widetilde{\varphi}_1} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_2 : \begin{pmatrix} \bar{g}^{\overline{\varphi}_1} & 0 \\ [g, g_0]^{\widetilde{\varphi}_1} & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{g}^{\overline{\varphi}_1\overline{\varphi}_2} & 0 \\ [g, g_0]^{\widetilde{\varphi}_1\widetilde{\varphi}_2} & 1 \end{pmatrix},$$

и т. д.

Обозначим $G_i = G^{\alpha\psi_1\ldots\psi_i}$. Получим последовательность

$$G = G_0 \xrightarrow{\psi_1} G_1 \xrightarrow{\psi_2} \ldots \xrightarrow{\psi_{n-1}} G_{n-1} \xrightarrow{\psi_n} G_n.$$

Покажем, что все группы из этой последовательности являются неабелевыми $u$-группами, а все эпиморфизмы имеют нееденичные ядра.

Действительно, пусть $t_n$ — ненулевой элемент из радикала Фиттинга группы $M(T_n, A_n)$ и $t_0$ — его прообраз в группе $M(T_0, A_0)$. Элемент $t_0^{g_0 - 1}$ лежит в радикале Фиттинга группы $G$ и не равен нулю. Его образ не равен нулю в радикале Фиттинга группы $M(T_n, A_n)$ ввиду выбора элемента $g_0$ и того, что $M(T_n, A_n)$ является $u$-группой. Далее, образ элемента $g_0$ в группе $M(T_n, A_n)$ имеет вид $\begin{pmatrix} a_n & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$, где $a_n \neq 1$. Поэтому $M(T_n, A_n)$ — неабелева группа.

Остается проверить, что ядра эпиморфизмов $\psi_i$ нееденичные. Эпиморфизмы $\varphi_i$ либо уменьшают значение параметра $\alpha$, либо оставляют его неизменным, но в таком случае уменьшают значение параметра $\beta$. Так как параметры $\alpha(G_i)$ и $\alpha(H_i)$ совпадают, в первом случае $\psi_i$ имеет нееденичное ядро. Если параметр $\alpha$ не изменяется при эпиморфизме $\psi_i$, то ядро $\ker \varphi_i$ имеет нетривиальное пересечение с радикалом Фиттинга группы $M(T_{i-1}, A_{i-1})$. Пусть $1 \neq t \in \ker \varphi_i$. Тогда $1 \neq t^{g_0 - 1} \in \ker \psi_i$. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — свободная метабелева группа ранга $n \geq 2$. Тогда*

$$\operatorname{tdim}_0(G) = F_0(n, n-1).$$

Доказательство. Пусть $G' = T$ — радикал Фиттинга группы $G$, а $G/T = A$. По теореме 2

$$\operatorname{tdim}_0(G) = \operatorname{tdim}_0(M(T, A)).$$

Следовательно, утверждение теоремы равносильно тому, что

$$\operatorname{tdim}_0(M(T, A)) = \operatorname{tdim}_0(M(L, A)),$$

где $L$ — некоторый свободный $\mathbf{Z}A$-модуль ранга $n - 1$.

Пусть

$$M(T, A) = M(T_0, A_0) \xrightarrow{\varphi_1} M(T_1, A_1) \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_l} M(T_l, A_l) \qquad (2)$$

— последовательность неабелевых $u$-групп и эпиморфизмов.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — базис группы $G$.

Так как $M(T_l, A_l)$ — неабелева группа, образ некоторого порождающего $a_1$ группы $A$ отображается в нееденичный элемент группы $A_l$. Пусть $a_1$ — образ элемента $x_1$ в группе $A = G/T$.

Из вложения Магнуса [5] следует, что система элементов $\{[x_1, x_2], \ldots, [x_1, x_n]\}$ порождает свободный $\mathbf{Z}A$-модуль и является его базой. В качестве $L$ будем брать этот подмодуль $T$, а в качестве вложения группы $G$ в ее расщепляемую оболочку $M(T, A)$ — вложение $\alpha(x_1)$.

В группе $G$ для любых элементов $x_i$, $x_j$, $x_m$ справедливо соотношение

$$[x_i, x_j]^{1-x_m}[x_j, x_m]^{1-x_i}[x_m, x_i]^{1-x_j} = 1.$$

Поэтому для модуля $T$ и его подмодуля $L$ справедливо включение $T(1-a_1) \leq L$.

Каждый эпиморфизм $\varphi_i$ индуцирует эпиморфизм $\overline{\varphi} : A_{i-1} \to A_i$ абелевых групп и согласованный с ним эпиморфизм модулей $\widetilde{\varphi}_i : T_{i-1} \to T_i$.

Пусть $L = L_0$, $L_i = L_{i-1}^{\widetilde{\varphi}_i}$. Обозначим через $\widehat{\varphi}_i$ ограничение $\varphi_i$ на подгруппу $M(L_{i-1}, A_{i-1})$. Получим последовательность

$$M(L, A) = M(L_0, A_0) \xrightarrow{\widehat{\varphi}_1} M(L_1, A_1) \xrightarrow{\widehat{\varphi}_2} \ldots \xrightarrow{\widehat{\varphi}_l} M(L_l, A_l)$$

нетривиальных групп, так как $T_{i-1}(1 - a_1) \leq L_{i-1}$ и $T_{i-1} \neq 0$.

Покажем, что для всех $\widehat{\varphi}_i$ их ядра нетривиальны. Эпиморфизмы $\varphi_i$ нетривиальны. Поэтому $\overline{\varphi}_i$ или $\widetilde{\varphi}_i$ — нетривиальные эпиморфизмы. Рассмотрим два случая.

1. $\ker(\widetilde{\varphi}_i) \neq 0$. Пусть $0 \neq t \in \ker(\widetilde{\varphi}_i)$. Так как $T_{i-1}(1 - a_1) \leq L_{i-1}$, то

$$0 \neq t(1 - a_1) \in \ker(\widetilde{\varphi}_i) \cap L_{i-1} \leq \ker(\hat{\varphi}_i).$$

2. $\ker(\overline{\varphi}_i) \neq 1$. В этом случае ранг группы $A_i$ меньше ранга группы $A_{i-1}$. Значит, $\ker(\widehat{\varphi}_i) \neq 1$.

Итак, мы доказали неравенство $\operatorname{tdim}_0(G) \leq F_0(n, n-1)$.

Покажем обратное неравенство. Пусть

$$M(F, A) = M(F_0, A_0) \xrightarrow{\psi_1} M(F_1, A_1) \xrightarrow{\psi_2} \ldots \xrightarrow{\psi_l} M(F_l, A_l)$$

— неабелева $u$-последовательность, где $F$ — свободный $\mathbf{Z}A$-модуль ранга $n-1$, а $A$ — свободная абелева группа ранга $n$.

Так как $M(F_l, A_l)$ — неабелева группа, образ некоторого порождающего $a_1$ группы $A$ не равен единице в группе $A_l$. Элемент $a_1$ является образом порождающего $x_1$ при гомоморфизме $G \to G/T = A$.

Рассмотрим стандартное вложение $\alpha(x_1) : G \to M(T, A)$. Пусть $L$ — подмодуль из $T$, определенный в первой части доказательства теоремы. Тогда $L(1 - a_1) \leq T(1 - a_1) \leq L$. Поэтому имеют место включения для $u_\curlywedge$-групп

$$M(L(1 - a_1), A) \leq M(T(1 - a_1), A) \leq M(L, A),$$

причем группы $M(L, A)$ и $M(L(1 - a_1), A)$ изоморфны. Пусть

$$M(L, A) \xrightarrow{\varphi_1} M(R, B) \xrightarrow{\varphi_2} \ldots$$

— неабелева $u$-последовательность. Она индуцирует последовательности

$$\begin{gathered} M(T(1 - a_1), A) \xrightarrow{\varphi_1'} M((T(1 - a_1))^{\widetilde{\varphi}_1}, B) \xrightarrow{\varphi_2'} \ldots, \\ M(L(1 - a_1), A) \xrightarrow{\varphi_1''} M(R(1 - a_1)^{\overline{\varphi}_1}, B) \xrightarrow{\varphi_2''} \ldots. \end{gathered} \tag{3}$$

Последовательность (3) состоит из неабелевых $u$-групп и нетривиальных эпиморфизмов. Теорема доказана.

Используя результаты и доказательства теорем 1 и $1'$, определим топологическую размерность свободной метабелевой группы.

**Теорема 4.** *Пусть $G$ — свободная метабелева группа ранга $n \geq 2$. Тогда*

$$\operatorname{tdim}(G) = \begin{cases} F(n, n-1) - 1 & \textit{для четного } n \geq 4, \\ F(n, n-1) & \textit{для нечетного } n \geq 1, \\ 4 & \textit{для } n = 2. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $n \geq 3$ и $\alpha(x_1) : G \to M(T_{n-1}, A_n)$, где $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ — базис $A_n$, $t_i = [x_i, x_1]$, $i = 2, \ldots, n$, — базис свободного модуля $T_{n-1}$. Тогда

$$x_i^\alpha = \begin{pmatrix} \bar{x}_i & 0 \\ [x_i, x_1] & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Пусть $n \geq 4$ четное. Рассмотрим неабелеву $u$-последовательность для группы $W_{n,n-1} = M(T_{n-1}, A_n)$, которая проходит через все группы $W_{i,j}$ при четных $i$, $2 \leq i \leq n$, и всех $1 \leq j \leq n-1$. Легко подсчитать, что длина этой последовательности максимальна, т. е. равна $F_0(n, n-1)$. Продолжим ее абелизацией группы $W_{2,n-1}$. Таким образом, абелева часть последовательности начинается с группы $B_{n+1} = \langle \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n, t_1, \ldots, t_{n-1} \rangle$. Образ группы $G$ в $B_{n+1}$ совпадает с $B_n = \langle \bar{x}_n, t_1, \ldots, t_{n-1} \rangle$. Так как $F(n, n-1) - F_0(n, n-1) = n+1$, то $\operatorname{tdim}(G) \geq F(n, n-1) - 1$. Учитывая неравенство $\operatorname{tdim}(G) \leq \operatorname{tdim}_0(G) + n$, получим нужный результат.

В случае нечетного $n \geq 3$ доказательство следует из двух замечаний. Во-первых, из определения вытекает, что $F(n, n-1) - F_0(n, n-1) = 2$. Во-вторых, необходимо доказать, что топологическая размерность подгруппы $G$ не может превышать размерности группы $M(T_{n-1}, A_n)$. Из этого результата будет следовать, что $\operatorname{tdim}(G) = F(n, n-1)$.

Для проверки неравенства $\operatorname{tdim}(G) \leq \operatorname{tdim}(M(T_{n-1}, A_n))$ отметим, что при доказательстве предложения 6 для любого эпиморфизма $\varphi : G_1 \to G_2$ неабелевых $u$-групп построен гомоморфизм $\varphi^* : G_{1,\mathrm{split}} \to G_{2,\mathrm{split}}$, причем $\ker \varphi^*$ — расщепление (по координатам) ядра $\varphi$. Кроме того, напомним, что характеристики групп $G_i$ и $G_{i,\mathrm{split}}$ совпадают.

Это предложение можно очевидным способом расширить и на случай, когда $G_2$ — абелева группа, при условии, что $\ker \varphi$ содержит $\operatorname{Fit}(G_1)$. Полученный гомоморфизм будем обозначать по-прежнему через $\varphi^*$ и называть *расщеплением* $\varphi$.

Для свободной метабелевой группы $G$ рассмотрим некоторую $u$-последовательность максимальной длины $\operatorname{tdim}(G)$.

$$G = G_0 \xrightarrow{\varphi_1} G_1 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_l} G_l \xrightarrow{\varphi_{l+1}} A_r \to \cdots \to 1, \tag{4}$$

где $A_r$ — свободная абелева группа ранга $r$, а все предыдущие группы неабелевы. Построим по ней индуцированную цепочку

$$G = G_{0,\mathrm{split}} \xrightarrow{{\varphi_1}^*} G_{1,\mathrm{split}} \xrightarrow{{\varphi_2}^*} \ldots \xrightarrow{{\varphi_l}^*} G_{l,\mathrm{split}} \xrightarrow{{\varphi_{l+1}}^*} A_t \to \cdots \to 1. \tag{5}$$

Надо показать, что ранг группы $A_r$ равен рангу $t$ свободной абелевой группы $A_t$. Положим $\gamma = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_l \varphi_{l+1}$, т. е. $\gamma : G \to A_r$. Ясно, что $\ker \gamma$ содержит $G' = \operatorname{Fit}(G)$. Поэтому существует $\gamma^* : G_{0,\mathrm{split}} \to A_r$. Ясно, что $\gamma^* = \varphi_1^* \varphi_2^* \ldots \varphi_l^* \varphi_{l+1}^*$ и $r = t$.

При $n = 2$ максимальная цепочка неравенств для характеристик $u$-групп следующая:

$$(2, 1) > (1, 1) > (0, 2) > (0, 1) > (0, 0).$$

Она имеет длину 4. Так как свободную метабелеву группу ранга 2 можно гомоморфно отобразить на $W_{1,1}$, отсюда следует, что $\operatorname{tdim}(G) = 4$. Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Baumslag G., Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N.* Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. 1999. V. 219. P. 16–79.
2. *Ремесленников В. Н.* Размерность алгебраических множеств над свободной метабелевой группой // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 7, № 3. С. 873–885.
3. *Remeslennikov V. N., Stohr R.* On the quasivariety generated by a non-cyclic free metabelian group // Algebra Colloq. 2004. V. 11, N 2. P. 191–214.
4. *Chapuis O.* $\forall$-free metabelian groups // J. Symbolic Logic. 1997. V. 62. P. 16–79.
5. *Ремесленников В. Н., Соколов В. Г.* Некоторые свойства вложения Магнуса // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 5. С. 566–589.


*Статья поступила 7 февраля 2005 г.*

*Ремесленников Владимир Никонорович*
*Омский филиал Института математики СО РАН,*
*ул. Певцова, 13, Омск 644099*
remesl@iitam.omsk.net.ru

*Тимошенко Евгений Иосифович*
*Новосибирский гос. архитектурно-строительный университет,*
*ул. Ленинградская, 113, Новосибирск 630008*
etim@sibstrin.ru