Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 517.51

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ЛОКАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ РЕШЕНИЯМИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Покровский

Аннотация: В терминах локальных аппроксимаций в интегральных метриках решениями уравнения $P(D)f = 0$, где $P(D)$ — квазиоднородный гипоэллиптический линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, описаны анизотропные функциональные классы типа Кампанато — Морри.

Ключевые слова: квазиоднородный гипоэллиптический оператор, локальные аппроксимации, классы Кампанато — Морри, модуль непрерывности, функция растяжения.

Введение

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ или на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $P(D)$ — однородный эллиптический линейный дифференциальный оператор с постоянными (вообще говоря, комплексными) коэффициентами в G порядка $m > 0$, $h(t)$ — положительная неубывающая функция аргумента $t \in (0, +\infty)$. Рассмотрим множество $U_1(P(D), G, h)$ всех функций $f \in L(G)_{\text{loc}}$, обладающих свойством: существует такая неотрицательная величина $C(f)$, что для каждого замкнутого шара $B(x, r) \subset G$ с центром в точке x и радиусом r найдется функция u, интегрируемая на этом шаре и удовлетворяющая внутри него равенству $P(D)u = 0$, для которой справедливо неравенство

$$\int\limits_{B(x,r)} |f(y) - u(y)|\, dy \le C(f) r^n h(r).$$

Такие функциональные классы возникают при изучении множеств неизолированных особых точек решений уравнения $P(D)f = 0$, а в случае, когда $P(D)$ — оператор Коши — Римана в $\mathbb{C}$, и в теории моногенности (см. [1–5]). Так, например, Б. Ж. Ищановым [3] показано, что условие $h(t) = o(t^m)$ при $t \to 0$ обеспечивает совпадение класса $U_1(P(D), G, h)$ с множеством всех решений уравнения $P(D)f = 0$ в G (как обычно, две локально интегрируемые функции, различающиеся лишь на множестве лебеговой меры нуль в G, считаются равными). В настоящей работе мы исследуем случай, когда функция $h(t)$ убывает к нулю (при $t \to 0$) медленнее, чем $o(t^m)$. В частности, показывается, что при $h(t) = t^s$, $0 < s < m$, каждая функция $f \in U_1(P(D), G, h)$ локально в G принадлежит классу Гёльдера — Зигмунда Λ^s, а в случае $h(t) \equiv 1$ — классу BMO

функций с ограниченным средним колебанием. На самом деле мы рассматриваем в работе более широкий класс дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами — квазиоднородные гипоэллиптические операторы (к ним принадлежит, например, оператор теплопроводности) — и устанавливаем для них результаты, аналогичные приведенным выше.

Основные результаты работы и их приложения к описанию замкнутых множеств неизолированных особых точек, устранимых для решений уравнения $P(D)f = 0$, изложены в заметке [6].

1. Определения и обозначения

Пусть $M = (M_1, \dots, M_n)$ — вектор с натуральными компонентами, $|M| = M_1 + \dots + M_n$. Сопоставим каждому полиному с комплексными коэффициентами $P(z)$ $(z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$, $\mathbb{C}^1 =: \mathbb{C})$ линейный дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, полученный заменой z_j на $D_j := -i\frac{\partial}{\partial x_j}$ при каждом $j = \overline{1, n}$ $(i^2 = -1)$. Полином $P(z)$ (оператор $P(D)$) называется *M-однородным*, если существует такое $m \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$, что

$$P(z) \equiv \sum_{|k \cdot M| = m} a_k z^k,$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \in \mathbb{N}_0$ $(j = 1, \dots, n)$, $|k \cdot M| = k_1 M_1 + \dots + k_n M_n$, $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$. Для произвольного полинома $P(z)$ его *M-степенью* $\deg_M P$ называется наименьшее m такое, что $P(z) \equiv \sum\limits_{|k \cdot M| \leq m} a_k z^k$. Как обычно, оператор $P(D)$ называется *квазиоднородным*, если он M-однороден при некотором натуральном векторе M.

Напомним (см., например, [7, с. 75]), что оператор $P(D)$ называется *гипоэллиптическим*, если для любых области $G \subset \mathbb{R}^n$ и функции $f \in C^\infty(G)$ каждое обобщенное решение уравнения $P(D)g = f$ является функцией класса $C^\infty(G)$. Здесь, как обычно, $C^\infty(G)$ — пространство всех функций, бесконечно дифференцируемых в области G (в настоящей работе мы рассматриваем функции, принимающие, вообще говоря, комплексные значения), обобщенные решения понимаются в смысле распределений по Л. Шварцу, каждая функция $f \in C^\infty(G)$ естественным образом отождествляется с распределением. Существуют эффективно проверяемые условия на полином $P = P(z)$, необходимые и достаточные для того, чтобы соответствующий ему оператор $P(D)$ был гипоэллиптическим. Приведем одно из них [7, с. 75]: расстояние от точки $x = (x_1 + i0, \dots, x_n + i0) \in \mathbb{C}^n$ $(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R})$ до множества $\{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\}$ стремится к ∞ при $|x| \to \infty$. Из этого критерия вытекает, что M-однородный оператор $P(D)$ является гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда $P(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и, следовательно, принадлежит подклассу гипоэллиптичесих операторов, называемых полуэллиптическими (или квазиэллиптическими), введенных Л. Р. Волевичем в работе [8] (см. также [7, с. 84]).

Всюду ниже $P(D)$ — M-однородный гипоэллиптический линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $m = \deg_M P \geq 1$.

Для всех $r \geq 0$ и $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ полагаем

$$r^M \cdot t := (r^{M_1} t_1, \dots, r^{M_n} t_n), \quad r^{-M} \cdot t := (r^{-M_1} t_1, \dots, r^{-M_n} t_n).$$

Замкнутым M-шаром с центром $x \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r \geq 0$ называется множество $B_M(x, r) := \{x + r^M \cdot t : \|t\| \leq 1\}$, где $\|t\| := \left(t_1^2 + \dots + t_n^2\right)^{1/2}$. Если

$M = (1, \dots, 1)$, то $B_M(x, r) =: B(x, r)$, $B(0, 1) =: B$. Через $C_0^\infty(B)$ обозначается множество всех функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, носитель которых содержится в B.

Пусть $\rho \in C_0^\infty(B)$, $\int\limits_B \rho(t)\,dt = 1$. Будем говорить, что (M, ρ)-регуляризация *сохраняет решения уравнения* $P(D)f = 0$, если для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ каждая функция $u \in C^\infty(G)$, являющаяся в G решением этого уравнения, удовлетворяет равенству

$$\int u(x + r^M \cdot t)\rho(t)\,dt = u(x) \tag{1}$$

при всех $x \in G$ и $r > 0$ таких, что $B_M(x, r) \subset G$. Если в дополнение к этому из выполнения (1) при всех указанных выше x и r следует, что u — решение уравнения $P(D)f = 0$ в G, то мы говорим, что (M, ρ)-регуляризация *характеризует решения уравнения* $P(D)f = 0$. Нам потребуется следующий результат работы [9]: для каждого M-однородного гипоэллиптического линейного дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами существует такая функция $\rho \in C_0^\infty(B)$, что (M, ρ)-регуляризация характеризует решения уравнения $P(D)f = 0$.

Всюду далее, за исключением обозначения $C(G)$, под которым понимается, как обычно, пространство всех непрерывных функций в области G, выражения вида $C(\alpha, \beta, \dots)$ и $C = C(\alpha, \beta, \dots)$ обозначают неотрицательные величины, зависящие только от α, β и т. д., при этом в разных формулах величины с одним и тем же обозначением, вообще говоря, различны между собой.

Перейдем к определению рассматриваемых в работе функциональных классов. Пусть для каждой области $G \subset \mathbb{R}^n$ задан некоторый класс $H(G)$ функций, определенных в этой области, при этом если $G_1 \subset G_2$ и $f \in H(G_2)$, то сужение функции f на G_1 принадлежит классу $H(G_1)$ для любых областей $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ (используя терминологию, предложенную в работе [5], будем говорить, что H является *монотонным функциональным классом*; отметим, что в [5] это понятие продуктивно использовано в задачах теории моногенности). Тогда через $H(G)_{\mathrm{loc}}$ мы обозначаем множество всех функций f, определенных в области G, обладающих свойством: для любой точки $x \in G$ существует такая область $G_x \subset G$, содержащая x, что сужение f на G_x принадлежит классу $H(G_x)$.

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$. Как обычно, $L_p(G)$ — пространство всех комплекснозначных функций f, интегрируемых по Лебегу в степени p (существенно ограниченных при $p = \infty$) в G. Норма $\|f|L_p(G)\|$ функции f в этом пространстве задается равенствами

$$\|f|L_p(G)\| = \left(\int\limits_G |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad \text{при } p < \infty,$$

$$\|f|L_\infty(G)\| = \operatorname{vrai\,sup}\{|f(x)| : x \in G\}.$$

Через Φ_p мы обозначаем множество всех непрерывных положительных функций $h(t)$, определенных при $0 < t \le 1$, таких, что функция $t^{|M|/p}h(t)$ не убывает и $t^{|M|/p}h(t) \to 0$ при $t \to 0$ (если $p = \infty$, то полагаем $1/p = 0$), $\Phi_\infty =: \Phi$.

Пусть $h \in \Phi_p$.

Определение 1. Через $U_p(M, P(D), G, h)$ обозначается множество всех функций $f \in L_p(G)_{\mathrm{loc}}$, обладающих свойством: существует не зависящая от x и r величина $C(f) \ge 0$, при которой для каждого M-шара $B_M(x, r) \subset G$

с $r \in (0,1]$ найдется такая функция $u \in L_p(B_M(x,r))$, что $P(D)u \equiv 0$ внутри $B_M(x,r)$ и

$$\|f - u|L_p(B_M(x,r))\| \le C(f)r^{|M|/p}h(r). \tag{2}$$

Пусть $q \in \mathbb{N}_0$. Заменяя в определении 1 условие «$P(D)u \equiv 0$ внутри $B_M(x,r)$» условием, что u — полином с $\deg_M u \le q$, мы получаем определение анизотропных классов Кампонато $C_p(M,q,G,h)$. Если $1 \le p < \infty$, то анизотропный класс Морри $L_p(M,G,h)$ определяется как множество всех таких функций $f \in L_p(G)_{\mathrm{loc}}$, что при некотором неотрицательном $C = C(f)$ для каждого M-шара $B_M(x,r) \subset G$ с $r \in (0,1]$ выполняется неравенство

$$\|f|L_p(B_M(x,r))\| \le Cr^{|M|/p}h(r).$$

Частные случаи классов $U_p(M,P(D),G,h)$, в которых $M = (1,1)$, а $P(D)$ — оператор Коши — Римана в $\mathbb{C}$, впервые рассматривались в работах В. С. Федорова (см., например, [1]), в случае произвольных линейных дифференциальных операторов с достаточно гладкими коэффициентами эти классы введены Б. Ж. Ищановым [3]. По поводу результатов, относящихся к классам Кампонато и Морри, см., например, [10; 11, с. 396–435; 12–14] и ссылки в этих работах.

Определение 2. Пусть $\rho \in C_0^\infty(B)$, $\int\limits_B \rho(t)\,dt = 1$, $h \in \Phi$. Через $S(M,\rho,G,h)$ обозначается множество всех функций $f \in C(G)$, обладающих свойством: существует не зависящее от x и r неотрицательное $C(f)$, при котором

$$\left|\int\limits_B f(x + r^M \cdot t)\rho(t)\,dt - f(x)\right| \le C(f)h(r) \tag{3}$$

для всех таких $x \in G$ и $r \in (0,1]$, что $B_M(x,r) \subset G$.

Пусть $\{e^1,\dots,e^n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $f \in C(G)$, $h \in \mathbb{R}$. Положим

$$\Delta_k^j(h,G)f(x) := \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\frac{k!}{l!(k-l)!}f(x + lhe^j)$$

при $[x, x + khe^j] \subset G$, $\Delta_k^j(h,G)f(x) := 0$ при $[x, x+khe^j] \not\subset G$. Как обычно, функцию $\omega_k^j(f,G;t) := \sup\limits_{-t\le h\le t}\left\|\Delta_k^j(h,G)f|L_\infty(G)\right\|$ $(t > 0)$ мы называем *модулем непрерывности порядка* k функции f в области G по направлению e^j. *Вторым модулем непрерывности* функции f называется функция $\omega_2(f,G;t) := \sup\{|f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)| : x \in G, h \in \mathbb{R}^n, [x-h, x+h] \in G, \|h\| \le t\}$ $(t \ge 0)$. Если $\omega_2(f,G;t) = O(t)$ при $t \to 0$, то говорим, что f *удовлетворяет условию Зигмунда.* Напомним также, что *модулем непрерывности* функции f, непрерывной на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ $(E \ne \varnothing)$, называется определенная при $t \ge 0$ функция $\omega(t) = \omega(f,E;t) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E, \|x - y\| \le t\}$. Если E — выпуклый компакт, то

$$0 = \omega(0) = \omega(0+) \le \omega(t_1) \le \omega(t_1 + t_2) \le \omega(t_1) + \omega(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \ge 0.$$

Непрерывная при $t \ge 0$ функция $\omega(t)$ называется *функцией типа модуля непрерывности*, если для нее выполняется последняя цепочка соотношений.

Как обычно, $[s]$ и $\{s\}$ — соответственно целая и дробная части действительного числа $s = [s] + \{s\}$.

Определение 3. Пусть $\alpha > 0$. *Анизотропным классом Гёльдера — Зигмунда* $\Lambda^{M,\alpha}(G)$ называется множество всех функций $f \in C(G)$, для которых $\sup\limits_{t>0} t^{-\alpha/M_j}\omega^j_{[\alpha/M_j]+1}(f,G;t) < \infty$, $j = \overline{1,n}$.

Отметим, что в случае $M = (1,\dots,1)$ принадлежность функции f классу $\Lambda^{M,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$ равносильна тому, что при нецелом α она $[\alpha]$ раз непрерывно дифференцируема и все ее частные производные порядка $[\alpha]$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\{\alpha\}$ на компактных подмножествах области G, а при целом α — тому, что f имеет непрерывные частные производные всех порядков $\le \alpha - 1$, причем производные порядка $\alpha - 1$ локально в G удовлетворяют условию Зигмунда (см, например, [11]).

Определение 4. Пусть $\omega \in \Phi$. Через $\Lambda_\omega(G)$ обозначается множество всех функций $f \in C(G)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{t>0}(\omega(t))^{-1}\omega(f,G;t) < \infty.$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $f \in L_1(B_M(x,r))$. Через $E_p(M,P(D),f,x,r)$ обозначается величина

$$\inf_u \|f - u|L_p(B_M(x,r))\|, \tag{4}$$

где inf берется по множеству всех функций $u \in L_p(B_M(x,r))$, удовлетворяющих равенству $P(D)u = 0$ внутри M-шара $B_M(x,r)$. Используя M-однородность оператора $P(D)$, несложно проверить, что если inf в (4) брать по множеству всех функций u, для каждой из которых равенство $P(D)u = 0$ выполняется в некоторой (зависящей от u) окрестности M-шара $B_M(x,r)$, то мы получим ту же самую величину. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$. Величина, определенная формулой (4), в которой inf берется по множеству всех полиномов u с $\deg_M u \le k$, обозначается через $E_{p,k}(M,f,x,r)$.

Ниже в случае $M = (1,\dots,1)$ (в этом случае $P(D)$ — однородный эллиптический оператор) мы будем опускать указание зависимости от M в обозначениях всех введенных выше величин. В частности, вместо $U_p(M,P(D),G,h)$, $C_p(M,q,G,h)$ и $E_p(M,P(D),f,x,r)$ мы пишем соответственно $U_p(P(D),G,h)$, $C_p(q,G,h)$ и $E_p(P(D),f,x,r)$.

Как обычно, если $\alpha \in \mathbb{R}$ и $K, L \subset \mathbb{R}^n$, то $\alpha K = \{\alpha x : x \in K\}$ и $K+L = \{x+y : x \in K, y \in L\}$; $\overline{K}$, ∂K и K^0 — замыкание, граница и множество внутренних точек множества K соответственно.

2. Вспомогательные результаты

Напомним, что положительная на отрезке $(a,b) \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ функция h называется *почти возрастающей* (*почти убывающей*) на (a,b), если существует постоянная $C > 0$, при которой для любых $t_1, t_2 \in (a,b)$, $t_1 \le t_2$, выполняется неравенство $h(t_1) \le Ch(t_2)$ $(h(t_1) \ge Ch(t_2))$.

Пусть $0 < a \le \infty$. Следуя [15, с. 75], сопоставим каждой положительной на интервале $(0,a)$ функции h функцию $R_{h,a}(s)$, $s > 0$, принимающую, возможно, значение $+\infty$, которая определена равенством $R_{h,a}(s) := \sup \frac{h(t_1)}{h(t_2)}$, где супремум берется по всем таким $t_1, t_2 \in (0,a)$, что $t_1 = st_2$. Функция $R_{h,a}(s)$ называется *функцией растяжения* функции h на интервале $(0,a)$. В дальнейшем рассматривается в основном случай $a = 1$ и вместо $R_{h,1}$ мы будем писать R_h.

Лемма A. *Пусть функция h непрерывна, положительна и не убывает на интервале $(0, a]$ $(0 < a < \infty)$. Тогда функция $R_{h,a}$ полумультипликативна, т. е. при всех $s_1, s_2 \in (0, a)$ выполняется неравенство $R_{h,a}(s_1 s_2) \le R_{h,a}(s_1) R_{h,a}(s_2)$.*

Доказательство. Продолжим функцию h на интервал (a, ∞), полагая ее там равной $h(a)$. Легко видеть, что для продолженной функции, обозначаемой по-прежнему через h, при всех $s \ge 1$ выполнено равенство $R_{h,\infty}(s) = R_{h,a}(s)$. Далее, очевидно, что при всех $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$R_{h,a}(s_1 s_2) \le \sup_{0<t<a} \frac{h(s_1 s_2 t)}{h(s_2 t)} \frac{h(s_2 t)}{h(t)}. \tag{5}$$

При $s_1, s_2 \le 1$ правая часть в (5) не превосходит $R_{h,a}(s_1) R_{h,a}(s_2)$, при $s_1, s_2 \ge 1$ она не превосходит $R_{h,\infty}(s_1) R_{h,\infty}(s_2) = R_{h,a}(s_1) R_{h,a}(s_2)$. Если же $s_1 \ge 1$, $s_2 < 1$, то правая часть в (5) не превосходит $R_{h,\infty}(s_1) R_{h,a}(s_2) = R_{h,a}(s_1) R_{h,a}(s_2)$. Лемма доказана.

Следующие две леммы являются известными леммами работы [16], сформулированными в терминах функции растяжения.

Лемма B. *Для каждой функции $h \in \Phi$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\int\limits_0^u h(t) t^{-1}\, dt = O(h(u))$ *при* $u \to 0$;

2) $R_h(s_0) < 1$ *при некотором* $s_0 < 1$;

3) $R_h(s) = o(s)$ *при* $s \to 0$;

4) *существует такое* $\alpha \in (0, 1)$, *что функция* $h(t) t^{-\alpha}$ *почти возрастает на* $(0, 1)$.

Доказательство. Эквивалентность условий 2 и 3 вытекает из полумультипликативности функции R_h. В [16] показано, что каждое из условий 1 и 4 эквивалентно условию:

(L) существует такое $C > 1$, что $\varlimsup\limits_{t\to 0} \frac{h(Ct)}{h(t)} > 1$.

Последнее означает, что $R_{h,w}(C^{-1}) < 1$ при некотором $w \in (0, 1)$. Пусть $H = \max\{C, w^{-1}\} > 1$. Тогда $R_h(H^{-2}) \le R_{h,w}(C^{-1}) < 1$, откуда получаем условие 2. С другой стороны, выполнение условия 2, очевидно, влечет за собой выполнение условия (L).

Лемма C. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда для каждой функции $h \in \Phi$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\int\limits_u^1 h(t) t^{-k-1}\, dt = O(h(u) u^{-k})$ *при* $u \to 0$;

2) $R_h(s_0) < s_0^k$ *при некотором* $s_0 > 1$;

3) $R_h(s) = o(s^k)$ *при* $s \to \infty$;

4) *существует такое* $\alpha \in (0, k)$, *что функция* $h(t) t^{\alpha - k}$ *почти убывает на* $(0, 1)$.

Доказательство. Как и выше, эквивалентность условий 2 и 3 вытекает из полумультипликативности функции $R_h(s)$. В [16] доказана эквивалентность каждого из условий 1 и 4 леммы C условию:

(L_k) существует такое $C > 1$, что $\varlimsup\limits_{t\to 0} \frac{h(Ct)}{h(t)} < C^k$.

Это значит, что при некотором $w \in (0, 1)$ выполняется неравенство $R_{h,w}(C) < C^k$, следовательно, $R_{h,w}(s) = o(s^k)$ при $s \to \infty$. Поскольку $R_h(s) \le \frac{h(1)}{h(w)} R_{h,w}(s)$ при всех $s \ge 1$, то $R_h(s) = o(s^k)$ при $s \to \infty$. С другой стороны, выполнение условия 2, очевидно, влечет за собой выполнение условия (L_k).

Лемма D. *Пусть функция h непрерывна, положительна и не возрастает на интервале $(0,1]$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\int\limits_u^1 h(t)t^{-1}\,dt = O(h(u))$ *при* $u\to 0$;
2) $R_h(s_0)<1$ *при некотором* $s_0>1$;
3) $R_h(s)=o(1)$ *при* $s\to\infty$;
4) *существует такое* $\alpha\in(0,1)$, *что функция* $h(t)t^{\alpha}$ *почти убывает на* $(0,1)$.

Доказательство. Эквивалентность условий 2 и 3 проверяется элементарно. Установим равносильность условий 1 и 2. Пусть выполнено условие 2. Зафиксируем такое $w>1$, что $R_h(w)<1$, и пусть $u\in(0,w^{-1})$. Выберем $k\in\mathbb{N}$ так, чтобы $uw^k<1\le uw^{k+1}$. Тогда

$$\int\limits_u^1 h(t)t^{-1}\,dt \le \sum_{j=0}^{k-1}\int\limits_{uw^j}^{uw^{j+1}} h(t)t^{-1}\,dt + \int\limits_{uw^k}^{1} h(t)t^{-1}\,dt \le \sum_{j=0}^{k} h(uw^j)\int\limits_{uw^j}^{uw^{j+1}} t^{-1}\,dt$$

$$= \ln w\sum_{j=0}^{k} h(uw^j) \le \ln w\cdot h(u)\cdot(1-R_h(w)) = O(h(u)) \quad (u\to 0).$$

Обратно, пусть выполнено условие 1. Если $u,uw\in(0,1)$, $w>1$, то

$$\ln w\cdot h(uw) \le \int\limits_u^{uw} h(t)t^{-1}\,dt \le \int\limits_u^{1} h(t)t^{-1}\,dt \le Ch(u)$$

для некоторой постоянной $C>0$. Отсюда $\frac{h(uw)}{h(u)}\le C\cdot\ln^{-1}w$ и, следовательно, $R_h(w)<2^{-1}$ при $w=\exp(2C)>1$. При $t\to 0$ функция h имеет предел, конечный или равный $+\infty$. Если этот предел равен $+\infty$, то эквивалентность условий 2 и 4 вытекает из эквивалентности условий 2 и 4 леммы B, примененной к функции $1/h$, при этом следует заметить, что $R_{1/h}(s)=R_h(s^{-1})\ \forall\, s>0$. Если же $\lim\limits_{t\to 0}h(t)<+\infty$, то условия 2 и 4 не выполняются. Лемма доказана.

Лемма 1. *Пусть* $1\le r\le\infty$, $h(t)$ $(0\le t\le 1)$ — *функция из класса* Φ, $\int\limits_{0+} h(t)t^{-1}\,dt<\infty$ *при* $r<\infty$, $\rho(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ — *функция из класса* $C_0^\infty(B)$ *такая, что* $\int\rho(x)\,dx=1$ *и* (M,ρ)*-регуляризация сохраняет решения уравнения* $P(D)u=0$. *Тогда если* $f\in U_r(M,P(D),G,h)_{\mathrm{loc}}$, *то функция* f *может быть так переопределена на некотором множестве лебеговой меры нуль в* G, *что переопределенная функция будет принадлежать классу* $S(M,\rho,G,\phi)_{\mathrm{loc}}$, *где* $\phi(s):=h(s)+\int\limits_0^s h(t)t^{-1}\,dt$ *при* $1\le r<\infty$, $\phi(s):=h(s)$ *при* $r=\infty$ $(0\le s\le 1)$.

Доказательство. Случай $r=\infty$ тривиален, поэтому считаем, что $r<\infty$. Выберем области G_1 и G_2 так, что $G_1\Subset G_2\Subset G$, и возьмем $d>0$ таким, что $G_1+B_M(0,d)\subset G_2$. Рассмотрим семейство функций

$$f_s(x):=\int f(x+s^Mt)\rho(t)\,dt,\quad x\in G_1,\ 0<s<d.$$

Каждая функция этого семейства непрерывна в G_1, и при всех $s\in(0,d)$ и $x\in G_1$ выполнены равенства

$$f_s(x)-f_{s/2}(x)=\int f(x+s^Mt)\rho(t)\,dt-\int f(x+(2^{-1}s)^Mt)\rho(t)\,dt$$

$$=\int f(x+s^Mt)(\rho(t)-2^{|M|}\rho(2^Mt))\,dt=\int f(x+s^Mt)\lambda(t)\,dt,$$

где $\lambda(t) := \rho(t) - 2^{|M|}\rho(2^M t)$ $(t \in \mathbb{R}^n)$. Поскольку $\int u(x + s^M t)\lambda(t)\,dt = 0$ для любой функции u, удовлетворяющей равенству $P(D)u = 0$ в некоторой (зависящей от u) окрестности M-шара $B_M(x,s)$, то, используя неравенство Гёльдера, получим

$$|f_s(x) - f_{s/2}(x)| \le \inf_u \biggl(\int_B |f(x + s^M t) - u(x + s^M t)|^r\,dt\biggr)^{1/r} \cdot \|\lambda|L_{r/(r-1)}(B)\|$$

$$\le s^{-|M|}E_r(M, P(D), f, x, s) \cdot \|\lambda|L_{r/(r-1)}(B)\| \le Ch(s),$$

где inf берется по всем функциям u указанного выше вида, $C = C(f, G_2, \rho, r)$.

Пусть s принимает значения 2^{-p} и $f_{(p)}(x) := f_{2^{-p}}(x)$, $p \in \mathbb{N}$, $p > -\log_2 d$, $x \in G_1$. Если $p, q \in \mathbb{N}$ таковы, что $q > p > -\log_2 d$, то

$$|f_{(p)}(x) - f_{(q)}(x)| = \sum_{i=1}^{q-p} |f_{(p+i-1)}(x) - f_{(p+i)}| \le C\sum_{i=1}^{q-p} h(2^{1-p-i})$$

$$\le Ch(2^{-p}) + C\sum_{i=2}^{q-p} h(2^{1-p-i}) \le C\left(h(2^{-p}) + \sum_{i=2}^{q-p} \int_{2^{1-p-i}}^{2^{2-p-i}} h(t)t^{-1}\,dt\right)$$

$$\le C\left(h(2^{-p}) + \int_0^{2^{-p}} h(t)t^{-1}\,dt\right) = C\phi(2^{-p}),$$

откуда следует, что при $p \to \infty$ последовательность функций $f_{(p)}$ равномерно сходится в области G_1 к некоторой функции $g \in C(G_1)$. Переходя в последней цепочке неравенств к пределу при $q \to \infty$, получаем, что $|f_{(p)} - g(x)| \le C\phi(2^{-p})$ при всех $x \in G_1$, $p > -\log_2 d$. Аналогично, фиксируя произвольное $s \in (0, d)$, выводим, что при $p \to \infty$ последовательность функций $f_{s2^{-p}}$ равномерно сходится в области G_1 к некоторой функции $g_s \in C(G_1)$, причем

$$|f_{s2^{-p}}(x) - g_s(x)| \le C\phi(s2^{-p}) \quad (x \in G_1,\ p \in \mathbb{N}).$$

Поскольку $\|f_s - f|L_1(G_1)\| \to 0$ при $s \to 0$, то все функции g_s совпадают в области G_1 с функцией g, которая, в свою очередь, очевидно, совпадает почти всюду в G_1 с функцией f, и

$$\left|g(x) - \int g(x + s^M t)\rho(t)\,dt\right| = \left|g_s(x) - \int f(x + s^M t)\rho(t)\,dt\right|$$

$$= |g_s(x) - f_s(x)| \le C\phi(s)$$

при всех $x \in G_1$, $s \in (0, d)$. Лемма доказана.

Ниже приводится пример, показывающий существенность требования сходимости интеграла $\int\limits_{0+} h(t)t^{-1}\,dt$ в лемме 1 и ее неулучшаемость в определенном смысле. Но вначале докажем одну простую лемму, обосновывающую наши последующие рассуждения с M-шарами, которую мы будем неоднократно использовать без специальных ссылок.

Лемма 2. *Для любых $r, s \in \mathbb{R}$, $r \ge s > 0$, и $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие включения:*

1) $\partial B_M(0, r) + B_M(0, s) \subset B_M(0, r + s) \setminus B_M(r - s)^0$;

2) $B_M(0,r)+B_M(0,s)\subset B_M(0,r+s)$;
3) $kB_M(0,r)\subset B_M(0,kr)$.

Доказательство. Утверждение 3 вытекает по индукции из утверждения 2, которое, в свою очередь, следует из утверждения 1. Докажем последнее, для чего воспользуемся следующим свойством единичного шара B: если $x,y\in B$ и $0\le\alpha\le1$, то $\alpha^M\cdot x+(1-\alpha)^M\cdot y\in B$, причем если хотя бы одна из точек x, y лежит в B^0, то $\alpha^M\cdot x+(1-\alpha)^M\cdot y\in B^0$. В самом деле, используя неравенство Коши — Буняковского, получаем, что если $\sum\limits_{j=1}^n x_j^2\le1$ и $\sum\limits_{j=1}^n y_j^2\le1$, то

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n&(\alpha^{M_j}x_j+(1-\alpha)^{M_j}y_j)^2\\ &=\sum_{j=1}^n(\alpha^{M_j}x_j)^2+2\sum_{j=1}^n(\alpha(1-\alpha))^{M_j}x_jy_j+\sum_{j=1}^n((1-\alpha)^{M_j}y_j)^2\\ &\le\sum_{j=1}^n(\alpha x_j)^2+2\alpha(1-\alpha)\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)+\sum_{j=1}^n((1-\alpha)y_j)^2\\ &\qquad\le\alpha^2+\alpha(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^2=1,\end{aligned}$$

причем последнее неравенство строгое при $\left(\sum\limits_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum\limits_{j=1}^n y_j^2\right)<1$ и $\alpha\in(0,1)$. Пусть $x\in\partial B_M(0,r)$ и $y\in B_M(x,s)$, что означает

$$\sum_{j=1}^n x_j^2r^{-2M_j}=1\quad\text{и}\quad\sum_{j=1}^n(x_j-y_j)^2s^{-2M_j}\le1.$$

Пользуясь отмеченным выше свойством единичного шара, получаем

$$(r+s)^{-M}\cdot y=\left(\frac{r}{r+s}\right)^M\cdot(r^{-M}\cdot x)+\left(\frac{s}{r+s}\right)^M\cdot(s^{-M}\cdot(y-x))\in B,$$

следовательно, $y\in B_M(0,r+s)$. Допуская $y\in B_M(0,r-s)^0$, мы бы имели

$$r^{-M}\cdot x=\left(\frac{r-s}{r}\right)^M\cdot((r-s)^{-M}\cdot x)+\left(\frac{s}{r}\right)^M\cdot(s^{-M}\cdot(x-y))\in B^0,$$

что невозможно. Лемма доказана.

Следующий пример для случая $M=(1,\dots,1)$ содержится в [17].

Пример. Пусть $h(t)$ $(0\le t\le1)$ — функция из класса Φ такая, что $h(t)t^{-1}$ почти убывает на $[0,1]$. Положим $h_1(t):=h(3^{-1}t)$, $0\le t\le1$, и рассмотрим функцию

$$f(x):=\int\limits_{r_M(x)}^1 t^{-1}h_1(t)\,dt,\quad x\in B\setminus\{0\},$$

где $r_M(x)$ определено из равенства $\sum\limits_{j=1}^n x_j^2(r_M(x))^{-2M_j}=1$. Возьмем произвольный M-шар $B_M(x,s)\subset G$ с $s\in(0,3^{-1})$. Возможны случаи $r_M(x)\le2s$ и

$r_M(x) > 2s$. Предположим, что имеет место первый из них. Тогда по предыдущей лемме $B_M(x,s) \subset B_M(0,3s)$. Обозначим через Q_j множество $B_M(0,3s2^{-j}) \setminus B_M(0,3s2^{-j-1})$, $j \in \mathbb{N}_0$, и зафиксируем $p \in [1,+\infty)$. Если $a > 0$, то полагаем $K(a) := \sup\limits_{t \geq 1} t^{-a} \ln t$. Взяв $a > 0$ таким, что $ap < |M|$, получим следующую цепочку неравенств:

$$
\begin{aligned}
E_{p,0}(M,f,x,s) &\leq \left(s^{-|M|} \int\limits_{B_M(0,3s)} \left| f(y) - \int\limits_{3s}^{1} t^{-1} h_1(t)\,dt \right|^p dy \right)^{1/p} \\
&\leq \left(s^{-|M|} \int\limits_{B_M(0,3s)} \left| \int\limits_{r_M(y)}^{1} t^{-1} h_1(t)\,dt - \int\limits_{3s}^{1} t^{-1} h_1(t)\,dt \right|^p dy \right)^{1/p} \\
&\leq \left(s^{-|M|} \int\limits_{B_M(0,3s)} \left| \int\limits_{r_M(y)}^{3s} t^{-1} h_1(t)\,dt \right|^p dy \right)^{1/p} \\
&\leq h_1(3s) \left(s^{-|M|} \int\limits_{B_M(0,3s)} \left| \int\limits_{r_M(y)}^{3s} t^{-1}\,dt \right|^p dy \right)^{1/p} \\
&\leq h(s) \left(s^{-|M|} \int\limits_{B_M(0,3s)} |\ln((3s)^{-1} r_M(y))|^p\,dy \right)^{1/p} \\
&\leq K(a) h(s) \left(s^{-|M|} \int\limits_{B_M(0,3s)} |(3s)^{-1} r_M(y)|^{-ap}\,dy \right)^{1/p} \\
&\leq K(a) h(s) s^{a-|M|/p} 3^a \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{Q_j} |r_M(y)|^{-ap}\,dy \right)^{1/p} \leq K(a) h(s) s^{a-|M|/p} \\
&\times 3^a \left(\sum_{j=0}^{\infty} (3s2^{-j-1})^{-ap} (3s2^{-j})^{|M|} \right)^{1/p} \left(\int\limits_{B} dt \right)^{1/p} = C(M,p,a) h(s).
\end{aligned}
$$

Предположим теперь, что $r_M(x) > 2s$. Из леммы 2 вытекает, что $B_M(x,s) \subset B_M(0, r_M(x)+s) \setminus B_M(0, r_M(x)-s)^0$, откуда, пользуясь почти убыванием функции $t^{-1}h(t)$, получаем

$$
\begin{aligned}
E_{\infty,0}(M,f,x,s) &\leq \sup_{y \in B_M(x,s)} \left| f(y) - \int\limits_{r_M(x)}^{1} t^{-1} h_1(t)\,dt \right| \\
&\leq \sup_{y \in B_M(x,s)} \left| \int\limits_{r_M(y)}^{1} t^{-1} h_1(t)\,dt - \int\limits_{r_M(x)}^{1} t^{-1} h_1(t)\,dt \right| = \sup_{y \in B_M(x,s)} \left| \int\limits_{r_M(y)}^{r_M(x)} t^{-1} h_1(t)\,dt \right| \\
&\leq C(h) s^{-1} h_1(s) \int\limits_{r_M(x)-s}^{r_M(x)+s} dt \leq 2C(h) h_1(s) \leq 2C(h) h(s).
\end{aligned}
$$

Таким образом, $f \in C_p(M,0,B^0,h) \subset U_p(M,P(D),B^0,h)$. Если функция h такова, что $\int\limits_{0+} h(t)t^{-1}\,dt = \infty$, то $f \notin L_\infty(B^0)_{\mathrm{loc}}$, и тем самым $f \notin S(M,\rho,B^0,h)_{\mathrm{loc}}$ при любой функции $\rho \in C_0^\infty(B)$. Если же $\int\limits_{0+} h(t)t^{-1}\,dt < \infty$, то, полагая $f(0) = \int\limits_0^1 h_1(t)t^{-1}\,dt$ и используя почти убывание функции $t^{-1}h(t)$, получаем

$$f(0) - f(y) = \int\limits_0^{r_M(y)} h_1(t)t^{-1}\,dt \geq C(h) \int\limits_0^{r_M(y)} h(t)t^{-1}\,dt \quad (C(h) > 0),$$

$$E_{\infty,0}(M,f,0,r_M(y)) \geq 2^{-1}(f(0)-f(y)) \geq 2^{-1}C(h) \int\limits_0^{r_M(y)} h(t)t^{-1}\,dt.$$

Если помимо условия $\int\limits_{0+} h(t)t^{-1}\,dt < \infty$ функция h такова, что $R_h(s) = o(s)$ и $\int\limits_0^s h(t)t^{-1}\,dt \neq O(h(s))$ при $s \to 0$, то из леммы B и приводимых ниже теоремы 1 и замечания 1 вытекает, что $f \notin S(M,\rho,B^0,h)$ при любой функции $\rho \in C_0^\infty(B)$.

Отметим, что в случае расходимости интеграла $\int\limits_{0+} h(t)t^{-1}\,dt$ для построения подобного примера на функцию h необходимо накладывать дополнительные условия, как, например, условие почти убывания функции $t^{-1}h(t)$. В самом деле, если функция $h \in \Phi$ такова, что $\varliminf\limits_{t\to 0} t^{-m}h(t) = 0$, то вне зависимости от сходимости или расходимости интеграла $\int\limits_{0+} h(t)t^{-1}\,dt$ класс $U_p(M,P(D),G,h)_{\mathrm{loc}}$, $1 \leq p \leq \infty$, совпадает с множеством всех решений уравнения $P(D)u = 0$ в G (см. [3, 4]).

Следующая лемма является основной в работе. В случае степенной функции H подобные ей утверждения хорошо известны и часто применяются для доказательства гёльдеровости решений систем дифференциальных уравнений в частных производных (см. [14, с. 86–87; 18, с. 297–299]). С нашей точки зрения, формулировка подобных результатов в терминах функции растяжения придает им существенно более гибкую форму.

Лемма 3. *Пусть $l > -1$, $d, C_1 > 0$, $H(t)$ и $F(t)$ — функции, непрерывные и неубывающие на $(0,d]$, такие, что $\lim\limits_{t\to 0} H(t) = 0$, $R_{H,d}(s) = o(s^{l+1})$ при $s \to \infty$ и при всех $K > 2$ и $s \in (0, K^{-1}d)$ справедливо неравенство*

$$F(s) \leq C_1(H(Ks) + K^{-l-1}F(Ks)). \tag{6}$$

Тогда существуют такие $C_2 > 0$ и $v \in (0,d)$, не зависящие от функции F, что при всех $s \in (0,v)$ выполняется неравенство $F(s) \leq C_2(1 + F(d))H(s)$.

Доказательство. Пусть $K > 2$, $s > 0$, и пусть $j \in \mathbb{N}$ таково, что $K^j s \leq d$. Тогда, применяя неравенство (6) j раз, получим

$$\begin{aligned} F(s) &\leq C_1(H(Ks) + K^{-l-1}F(Ks)) \\ &\leq C_1H(Ks) + C_1^2K^{-l-1}(H(K^2s) + K^{-l-1}F(K^2s)) \\ &= C_1H(Ks) + C_1^2K^{-l-1}H(K^2s) + C_1^2(K^{-l-1})^2F(K^2s) \end{aligned}$$

$$\leq K^{l+1}\sum_{p=1}^{j}(C_1K^{-l-1})^pH(K^ps)+(C_1K^{-l-1})^jF(K^js). \quad (7)$$

Пользуясь тем, что $R_{H,d}(s)=o(s^{l+1})$ при $s\to\infty$, зафиксируем $K>2$ так, чтобы $C_1H(Ks)(K^{l+1}H(s))^{-1}<2^{-1}$ при всех $s\in(0,K^{-1}d)$ (из неубывания функции H следует, что в этом случае выполняется неравенство $C_1K^{-l-1}<2^{-1}$). Тогда

$$(C_1K^{-l-1})^pH(K^ps)\leq H(s)\prod_{q=1}^{p}C_1K^{-l-1}\frac{H(K^qs)}{H(K^{q-1}s)}\leq 2^{-p}H(s) \quad (8)$$

при всех $p\in\mathbb{N}$ и $s\in(0,K^{-p}d)$. Мы хотим выбрать $v\in(0,d)$ таким, чтобы для каждого $s\in(0,v)$ нашлось $j\in\mathbb{N}$, при котором одновременно выполнены неравенства $(C_1K^{-l-1})^j\leq H(s)$ и $K^js\leq d$. Тогда из (7) и (8)

$$F(s)\leq K^{l+1}H(s)\sum_{p=1}^{j}2^{-p}+H(s)F(K^js)\leq K^{l+1}(1+F(d))H(s),$$

что и требуется доказать. Для доказательства возможности такого выбора v достаточно установить существование $p_0\in\mathbb{N}$, при котором для всех натуральных $p\geq p_0$ выполняется неравенство $(C_1K^{-l-1})^p<H(K^{-p-1}d)$. В самом деле, если последнее имеет место, то из неубывания функции H следует, что объединение по $p\geq p_0$ интервалов $((C_1K^{-l-1})^p,H(K^pd))$ есть интервал $(0,H(K^{p_0}d))$. Тогда, полагая $v=K^{p_0}d$, будем иметь следующее: если $s\in(0,v)$, то $H(s)\in((C_1K^{-l-1})^p,H(K^{-p}d))$ для какого-то $p\geq p_0$, следовательно, $(C_1K^{-l-1})^p<H(s)$ и $K^ps\leq d$, что и нужно. Установим существование такого p_0. Для этого положим в (8) $s=K^{-p-1}d$, $p\in\mathbb{N}$. Имеем $(C_1K^{-l-1})^pH(K^{-1}d)\leq 2^{-p}H(K^{-p-1}d)$ при всех $p\in\mathbb{N}$, откуда, фиксируя p_0 так, что $2^{p_0}H(K^{-1}d)>1$, получим, что

$$(C_1K^{-l-1})^p\leq H(K^{-p-1}d)\bigl(2^pH(K^{-1}d)\bigr)^{-1}<H(K^{-p-1}d)$$

при всех натуральных $p\geq p_0$. Лемма доказана.

3. Формулировки и доказательства основных результатов

Теорема 1. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $1\leq p\leq\infty$, $l\in\mathbb{N}_0$, h — функция из класса Φ_p такая, что $R_h(s)=o(s^{l+1})$ при $s\to\infty$. Тогда $U_p(M,P(D),G,h)_{\text{loc}}\subset C_p(M,l,G,h)_{\text{loc}}$.*

Доказательство. Пусть ρ — функция из $C_0^\infty(B)$ такая, что (M,ρ)-регуляризация сохраняет решения уравнения $P(D)u=0$, $f\in U_p(M,P(D),G,h)_{\text{loc}}$. Выберем области G_1 и G_2 так, что $G_2\Subset G_1\Subset G$, и пусть $d_1,d_2>0$ таковы, что $B_M(x,d_2)\subset G_1\ \forall x\in G_2$, $B_M(x,d_1)\subset G\ \forall x\in G_1$.

Пусть $z\in G_2$, $s>0$, $B_M(z,s)\subset G_2$, $t\in(0,d_2)$. Определим функцию $f_t(x)$, $x\in G_2$, равенством

$$f_t(x):=\int f(x+t^M\cdot\zeta)\rho(\zeta)\,d\zeta=f*\rho_t(\zeta)(x),$$

где $\rho_t(\zeta):=t^{-|M|}\rho(-t^{-M}\cdot\zeta)$, $\zeta\in\mathbb{R}^n$. В дальнейшем будем считать, что $p<\infty$; при $p=\infty$ все проводимые ниже рассуждения остаются в силе с естественными изменениями. Поскольку $f \in U_p(M, P(D), G_1, h)$, то, используя обобщенное неравенство Минковского, имеем следующую цепочку соотношений, в которых инфимум берется по множеству всех функций u, удовлетворяющих равенству $P(D)u = 0$ в некоторой (зависящей от u) окрестности M-шара $B_M(z, s+t)$:

$$
\begin{aligned}
\|f_t - f|L_p(B_M(z,s))\| &= \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} |f_t(y) - f(y)|^p \, dy \Bigg)^{1/p} \\
&= \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} \bigg| \int |f(y + t^M \cdot \zeta)\rho(\zeta)\, d\zeta - \int f(y)\rho(\zeta)\, d\zeta \bigg|^p dy \Bigg)^{1/p} \\
&= \inf_u \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} \bigg| \int f(y + t^M \cdot \zeta)\rho(\zeta)\, d\zeta \\
&\quad - \int f(y)\rho(\zeta) - \int u(y + t^M \cdot \zeta)\rho(\zeta)\, d\zeta - \int u(y)\rho(\zeta)\, d\zeta \bigg|^p dy \Bigg)^{1/p} \\
&\le \inf_u \Bigg(\Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} \bigg| \int (f(y + t^M \cdot \zeta) - u(y + t^M \cdot \zeta))\rho(\zeta)\, d\zeta \bigg|^p dy \Bigg)^{1/p} \\
&\quad + \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} \bigg| \int (f(y) - u(y))\rho(\zeta)\, d\zeta \bigg|^p dy \Bigg)^{1/p} \Bigg) \\
&\le \inf_u \Bigg(\int |\rho(\zeta)| \Bigg(\Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} |f(y + t^M \cdot \zeta) - u(y + t^M \cdot \zeta)|^p \, dy \Bigg)^{1/p} \\
&\quad + \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} |f(y) - u(y)|^p \, dy \Bigg)^{1/p} \Bigg) d\zeta \Bigg) \\
&\le 2 \bigg(\int |\rho(\zeta)|\, d\zeta \bigg) \inf_u \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s+t)} |f(y) - u(y)|^p \, dy \Bigg)^{1/p} \\
&= 2 \bigg(\int |\rho(\zeta)|\, d\zeta \bigg) E_p(M, P(D), f, z, s+t). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Пусть b — наименьшее число, при котором для каждого мультииндекса $k = (k_1, \dots, k_n)$ из $|k| > b$ вытекает $|k \cdot M| > l$. Обозначим $\partial^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_n^{k_n}}$ и рассмотрим $\partial^k f_t(z + w(x-z))$, где $x \in B_M(z, s)$, $w \in [0, 1]$, $|kM| > l$. Для каждого полинома R с $\deg_M R \le l$ имеем

$$
\begin{aligned}
\partial^k f_t(z + w(x-z)) &= t^{-|M| - |k \cdot M|} (-1)^{|k|} \\
&\times \int\limits_{B_M(z + w(x-z), t)} (f(y) - R(y)) \partial^k \rho(t^{-M} \cdot (y - z - w(x-z)))\, dy,
\end{aligned}
$$

откуда, полагая $q = \frac{p}{p-1}$ и пользуясь неравенством Гёльдера, получаем следующую цепочку неравенств, в которой инфимум берется по множеству всех полиномов R с $\deg_M R \le l$:

$$
|\partial^k f_t(z + w(x-z))| \le t^{-|M| - |k \cdot M|}
$$

$$\times \inf_R \int\limits_{B_M(z+w(x-z),t)} |(f(y)-R(y))\partial^k \rho(t^{-M}\cdot(y-z-w(x-z)))|\,dy$$

$$\le t^{-|M|-|k\cdot M|} \inf_R \Bigg(\int\limits_{B_M(z+w(x-z),t)} |f(y)-R(y)|^p\,dy \Bigg)^{1/p}$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{B_M(z+w(x-z),t)} |\partial^k \rho(t^{-M}\cdot(y-z-w(x-z)))|^q\,dy \Bigg)^{1/q}$$

$$\le t^{-|M|/p-|k\cdot M|} \inf_R \Bigg(\int\limits_{B_M(z+w(x-z),t)} |f(y)-R(y)|^p\,dy \Bigg)^{1/p}$$

$$\times \Bigg(t^{-|M|} \int\limits_{B_M(z+w(x-z),t)} |\partial^k \rho(t^{-M}\cdot(y-z-w(x-z)))|^q\,dy \Bigg)^{1/q}$$

$$\le t^{-|M|/p-|k\cdot M|} \|\partial^k\rho|L_q(B)\| \inf_R \Bigg(\int\limits_{B_M(z+w(x-z),t)} |f(y)-R(y)|^p\,dy \Bigg)^{1/p}$$

$$\le t^{-|M|/p-|k\cdot M|} \|\partial^k\rho|L_q(B)\| E_{p,l}(M,f,z,s+t). \qquad (10)$$

Рассмотрим разложение Тейлора $\sum\limits_{|k|=0}^{b} (y-z)^k \partial^k f_t(z)(k!)^{-1}$ функции f_t с центром в точке z порядка b и представим его в виде

$$\sum_{|k|=0}^{b} (y-z)^k \frac{\partial^k f_t(z)}{k!} = \sum_{0\le|k|\le b,|k\cdot M|\le l} (y-z)^k \frac{\partial^k f_t(z)}{k!} + \sum_{0\le|k|\le b,|k\cdot M|>l} (y-z)^k \frac{\partial^k f_t(z)}{k!}.$$

Из (9), (10) и формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме получаем цепочку неравенств:

$$E_{p,l}(M,f,z,s) \le \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} \Bigg| f(y) - \sum_{0\le|k|\le b,|k\cdot M|\le l} (y-z)^k \frac{\partial^k f_t(z)}{k!} \Bigg|^p dy \Bigg)^{1/p}$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} |f(y)-f_t(y)|^p\,dy \Bigg)^{1/p}$$

$$+ \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} \Bigg| \sum_{0\le|k|\le b,|k\cdot M|>l} (y-z)^k \frac{\partial^k f_t(z)}{k!} \Bigg|^p dy \Bigg)^{1/p} + (b+1)$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} \Bigg| \sum_{|k|=b+1} \frac{(y-z)^k}{k!} \int\limits_0^1 (1-w)^b \partial^k f_t(z+w(y-z))\,dw \Bigg|^p dy \Bigg)^{1/p}$$

$$\le 2\Big(\int |\rho(\zeta)|\,d\zeta \Big) E_p(M,P(D),f,z,s+t)$$

$$
\begin{aligned}
&+ C(p)s^{|M|/p} \sup_{y\in B_M(z,s)} \left| \sum_{0\le|k|\le b, |k\cdot M|>l} (y-z)^k \frac{\partial^k f_t(z)}{k!} \right| + C(p)(b+1)s^{|M|/p} \\
&\times \sup_{y\in B_M(z,s)} \left| \sum_{|k|=b+1} \frac{(y-z)^k}{k!} \int_0^1 (1-w)^b \partial^k f_t(z+w(y-z))\,dw \right| \\
&\le 2\left(\int |\rho(\zeta)|\,d\zeta\right) E_p(M,P(D),f,z,s+t) + C(p)s^{|M|/p} \\
&\times \sum_{0\le|k|\le b, |k\cdot M|>l} \frac{s^{|k\cdot M|}}{k!} t^{-|M|/p-|k\cdot M|} \|\partial^k\rho|L_q(B)\| E_{p,l}(M,f,z,s+t) \\
&+ C(p)(b+1)s^{|M|/p} \sum_{|k|=b+1} \frac{s^{|k\cdot M|}}{k!} t^{-|M|/p-|k\cdot M|} \|\partial^k\rho|L_q(B)\| E_{p,l}(M,f,z,s+t) \\
&\le C(p,l,M,\rho)E_p(M,P(D),f,z,s+t) \\
&+ C(p,l,M,\rho) \sum_{0\le|k|\le b+1, |k\cdot M|>l} \left(\frac{s}{t}\right)^{|k\cdot M|+M/p} E_{p,l}(M,f,z,s+t).
\end{aligned}
$$

Пусть $t = \frac{K}{2}s$, где $K > 2$. Тогда $t + s < Ks$,

$$
\left(\frac{s}{t}\right)^{|k\cdot M|+M/p} = \left(\frac{K}{2}\right)^{-|k\cdot M|-M/p} \le \left(\frac{K}{2}\right)^{-l-1-M/p} \qquad \text{при} \quad |K\cdot M|>l,
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
E_{p,l}(M,f,z,s) &\le C(p,l,M,\rho)E_p(M,P(D),f,z,s+t) \\
&+ C(p,l,M,\rho) \sum_{0\le|k|\le b+1, |k\cdot M|>l} \left(\frac{s}{t}\right)^{|k\cdot M|+M/p} E_{p,l}(M,f,z,s+t) \\
&\le C(p,l,M,\rho,f,G_1)((Ks)^{|M|/p}h(Ks) + K^{-l-1-M/p}E_{p,l}(M,f,z,Ks)).
\end{aligned}
$$

Применяя лемму 3 (к функции $H(s) := s^{|M|/p}h(s)$), заключаем, что

$$
E_{p,l}(M,f,z,s) \le C(p,l,M,\rho,f,G_1,G_2)s^{|M|/p}h(s)
$$

и, следовательно, $f \in C_p(M,l,G,h)_{\mathrm{loc}}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. При $p=\infty$ в приведенных выше рассуждениях утверждение о принадлежности функции f классу $C_\infty(M,l,G,h)_{\mathrm{loc}}$ фактически выводилось только из того, что $f \in S(M,\rho,G,h)_{\mathrm{loc}}$.

Пусть $h(t) \equiv t^\alpha$, $0<\alpha<\deg_M P$, $1\le p\le\infty$. Тогда из леммы 1 и теоремы 1 с учетом только что сделанного замечания вытекает цепочка включений

$$
\begin{aligned}
&C_\infty(M,[\alpha],G,h)_{\mathrm{loc}} \subset C_p(M,[\alpha],G,h)_{\mathrm{loc}} \\
&\qquad\qquad \subset U_p(M,P(D),G,h)_{\mathrm{loc}} \subset C_\infty(M,[\alpha],G,h)_{\mathrm{loc}},
\end{aligned}
$$

откуда получаем, что при всех $p\in[1,\infty]$ выполнены равенства

$$
C_1(M,[\alpha],G,h)_{\mathrm{loc}} = U_p(M,P(D),G,h)_{\mathrm{loc}} = C_\infty(M,[\alpha],G,h)_{\mathrm{loc}}.
$$

С другой стороны, из результатов работы [12] (см. также [13]) следует совпадение классов $C_1(M,[\alpha],G,h)_{\mathrm{loc}}$ ($h(t)\equiv t^\alpha$, $0<\alpha<\deg_M P$) и $\Lambda^{M,\alpha}(G)_{\mathrm{loc}}$. Резюмируя сказанное, получаем

Следствие 1.1. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$, $0 < \alpha < \deg_M P$, $h(t) \equiv t^\alpha$. Тогда $U_p(M, P(D), G, h)_{\rm loc} = \Lambda^{M,\alpha}(G)_{\rm loc}$.*

Выделим один важный частный случай теоремы 1. Напомним (см., например, [19]), что при $M = (1, \dots, 1)$, $1 \le p < \infty$ и $h(t) \equiv 1$ класс $C_p(M, 0, G, h)$ не зависит от p и совпадает с классом BMO функций с ограниченным средним колебанием в области G.

Следствие 1.2. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $P(D)$ — однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, $1 \le p < \infty$, $h(t) \equiv 1$. Тогда $U_p(P(D), G, h)_{\rm loc} = BMO(G)_{\rm loc}$.*

Следствие 1.3. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $P(D)$ — однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами порядка $m \ge 2$, $\omega(t)$ $(t \ge 0)$ — функция типа модуля непрерывности. Тогда класс $U_\infty(P(D), G, \omega)_{\rm loc}$ совпадает с множеством всех функций $f \in C(G)$, для которых $\omega_2(f, G_0; t) = O(\omega(t))$ при $t \to 0$ в каждой подобласти $G_0 \Subset G$.*

Доказательство. Поскольку для ω как функции типа модуля непрерывности выполняется условие $R_\omega(s) \le 2s = o(s^2)$ при $s \to \infty$ (см., например, [20, с. 20]), то непрерывность функции f и нужная нам оценка ее второго модуля непрерывности вытекают из теоремы 1, замечания 1 и того, что вторая разность равна нулю для линейной функции. Обратно, из непрерывности f и приведенной выше оценки ее второго модуля непрерывности следует, что $f \in S(\rho, G, \omega)_{\rm loc}$ для каждой функции $\rho \in C_0^\infty(B)$, которая зависит только от расстояния до начала координат, откуда, снова пользуясь теоремой 1 и замечанием 1, получаем, что $f \in C_\infty(1, G, \omega)_{\rm loc} \subset U_\infty(P(D), G, \omega)_{\rm loc}$.

Теорема 2. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$, h — функция из класса Φ_p такая, что $R_h(s) = o(1)$ при $s \to \infty$. Тогда $U_p(M, P(D), G, h)_{\rm loc} = L_p(M, G, h)_{\rm loc}$.*

Доказательство. Включение $L_p(M, G, h)_{\rm loc} \subset U_p(M, P(D), G, h)_{\rm loc}$ очевидно, поэтому нужно установить только обратное к нему. Это делается по той же схеме, что и в теореме 1. Сохраняя обозначения, введенные при доказательстве этой теоремы, и используя (9), получаем оценки

$$\|f|L_p(B_M(z,s))\| \le \Bigg(\int\limits_{B_M(z,s)} |f_t(y) - f(y)|^p \, dy\Bigg)^{1/p} + \|f_t|L_p(B_M(z,s))\|$$

$$\le 2\left(\int |\rho(\zeta)| \, d\zeta\right) E_p(M, P(D), f, z, s+t) + C(p) s^{|M|/p} \|f_t|L_\infty(B_M(z,s))\|. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$|f_t(y)| \le t^{-|M|} \int\limits_{B_M(y,t)} |f(w)\rho(-t^{-M} \cdot (w-y))| \, dw \le t^{-|M|/p}$$

$$\times \|f|L_p(B_M(y,t))\| \Bigg(t^{-|M|} \int\limits_{B_M(y,t)} |\rho(-t^{-M} \cdot (w-y))|^{p/(p-1)} \, dw\Bigg)^{1-1/p}$$

$$\le \|f|L_p(B_M(y,t))\| t^{-|M|/p} \|\rho|L_{p/(p-1)}(B)\|. \quad (12)$$

Полагая, как и в теореме 1, $t = \frac{K}{2}s$, из (11) и (12) получаем

$$\begin{aligned}\|f|L_p(B_M(z,s))\| &\le 2\left(\int |\rho(\zeta)|\,d\zeta\right) E_p(M,P(D),f,z,s+t)\\ &+ C(p)\left(\frac{s}{t}\right)^{|M|/p}\|\rho|L_{p/(p-1)}(B)\| \sup_{y\in B_M(z,s)}\|f|L_p(B_M(y,t))\|\\ &\le 2\left(\int |\rho(\zeta)|\,d\zeta\right) E_p(M,P(D),f,z,Ks)\\ &+ C(p)K^{-|M|/p}\|\rho|L_{p/(p-1)}(B)\|\cdot\|f|L_p(B_M(z,Ks))\|\\ &\le C(p,M,\rho,f,G_1)((Ks)^{|M|/p}h(Ks) + K^{-|M|/p}\|f|L_p(B_M(z,Ks))\|),\end{aligned}$$

откуда с помощью леммы 3 (примененной к $F(s) = \|f|L_p(B_M(z,s))\|$, $H(s) = s^{|M|/p}h(s)$, $l+1 = |M|/p$) вытекает нужное нам неравенство

$$\|f|L_p(B_M(z,s))\| \le C(p,M,\rho,f,G_1,G_2)s^{|M|/p}h(s).$$

Теорема 2 доказана.

В заключение приведем один результат, показывающий существенность условий в лемме 1 и теореме 1.

Теорема 3. *Пусть $P(D)$ — однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, G — область в $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$, $\omega(t)$ $(t \ge 0)$ — функция типа модуля непрерывности. Тогда для совпадения классов $U_p(P(D),G,\omega)_{\mathrm{loc}}$ и $\Lambda_\omega(G)_{\mathrm{loc}}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\int_0^t \omega(u)u^{-1}\,du + t\int_t^1 \omega(u)u^{-2}\,du = O(\omega(t)) \quad \textit{при } p<\infty,$$

$$t\int_t^1 \omega(u)u^{-2}\,du = O(\omega(t)) \quad \textit{при } p=\infty \quad (t\to 0).$$

Доказательство. Достаточность вытекает из леммы 1 и теоремы 1 с учетом лемм B и C. Докажем необходимость. Увеличивая функцию ω на положительной полуоси не более чем в четыре раза с сохранением ее неубывания (см., например, [20, теорема 2.1, лемма 2.4]), можно без уменьшения общности считать, что функция $t^{-1}\omega(t)$ невозрастающая, $\omega(t)$ непрерывно дифференцируема $(t>0)$ и существует такое положительное $C = C(\omega)$, что для всех $t>0$ выполняется неравенство

$$|\omega'(t)| \le Ct^{-1}\omega(t). \tag{13}$$

Очевидно, можно также предполагать, что $K_1 := \{x = (x_1,\dots,x_n) : x_2 = \dots = x_n = 0,\ 0 \le x_1 \le 1\} \subset G$.

Невозможность нарушения условия $\int_0^t \omega(u)u^{-1}\,du = O(\omega(t))$ в случае $p<\infty$ иллюстрируется примером 1, поэтому, считая его выполненным, предположим, что нарушается условие $t\int_t^1 \omega(u)u^{-2}\,du = O(\omega(t))$ $(t\to 0)$.

Пусть $m \ge 2$. Тогда (см. лемму 1, теорему 1, замечание 1, следствие 1.3) класс $U_p(P(D),G,\omega)_{\mathrm{loc}}$ совпадает с множеством всех функций $f \in C(G)$, для которых $\omega_2(f, G_0; t) = O(\omega(t))$ при $t \to 0$ в каждой подобласти $G_0 \Subset G$ (отметим для дальнейшего, что множество всех таких функций образует алгебру, см., например, [20, с. 62]). Существуют непрерывная функция g, определенная на отрезке $[0, 1]$, и положительные величины $C_1(g)$ и $C_2(g)$ такие, что для всех $t \in (0, 1)$ выполняются неравенства

$$\omega(g, [0, 1]; t) \geq C_1(g) t \int_t^1 \omega(u) u^{-2} \, du,$$

$$\omega_2(g, [0, 1]; t) := \omega_2(g, (0, 1); t) \leq C_2(g) \omega(t)$$

(см. [20, теорема 5.1; 21]). По теореме О. В. Бесова [22] (см. также [20, теорема 8.2]) функцию g можно продолжить на отрезок $[-1, 2]$ с выполнением последней оценки при всех $t \in (0, 1)$ (возможно, увеличивая при этом значение величины $C_2(g)$). Сохраняя для продолженной функции обозначение f, умножим ее на неотрицательную функцию $h \in C_0^\infty([-1, 2])$ такую, что $h(t) = 1 \ \forall t \in [0, 1]$. Из сказанного выше следует, что функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) := g(x_1) h(x_1)$ принадлежит классу $U_p(P(D), G, \omega)_{\mathrm{loc}}$, но в то же время

$$\omega(f, K_1; t) \geq C_1(g) t \int_t^1 \omega(u) u^{-2} \, du \quad \forall t \in (0, 1).$$

Таким образом, осталось рассмотреть случай $m = 1$ (это, как известно, возможно только при $n = 2$). Зафиксируем линейную функцию $l(x) = l(x_1, x_2) = l_1 x_1 + l_2 x_2$ так, что $P(D) l \equiv 0$ и $\sup\limits_{\|x\|=1} l(x) = 1$, и определим в $\mathbb{R}^2$ функцию f равенствами

$$f(x) = l(x) \int_{\|x\|}^1 t^{-2} \omega(t) \, dt \text{ при } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Отметим, что эта функция непрерывна в точке $x = 0$ (см. [20, лемма 2.3]). Пусть

$$g(x) := \int_{\|x\|}^1 t^{-2} \omega(t) \, dt, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Тогда g дважды непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и из (13) вытекает существование такого $C(g) > 0$, что для каждого мультииндекса $k = (k_1, k_2)$ с $|k| = 1, 2$ и для всех $x \in B \setminus \{0\}$ выполняется неравенство

$$|\partial^k g(x)| \leq C(g) h(\|x\|) \|x\|^{-1-|k|}. \tag{14}$$

Пусть $r \in (0, 1/3)$. Рассмотрим произвольный шар $B(z, r) \subset B$. Возможны случаи $|z| \leq 2r$ и $|z| > 2r$. В первом из них $B(z, r) \subset B$ и

$$\begin{aligned} &E_\infty(P(D), f, z, r) \leq E_\infty(P(D), f, 0, 3r) \\ &\leq \sup_{0<\|x\|\leq 3r} \left| l(x) \int_{\|x\|}^1 t^{-2} \omega(t) \, dt - l(x) \int_{3r}^1 t^{-2} \omega(t) \, dt \right| \leq \sup_{0<u<3r} u \int_u^{3r} t^{-2} \omega(t) \, dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Простая выкладка с приравниванием нулю производной показывает, что функция $f_r(u) := u\int_u^{3r} t^{-2}\omega(t)\,dt$ достигает максимума на интервале $(0, 3r)$ в тех точках u, где $f_r(u) = \omega(u)$, поэтому из (15) получаем $E_\infty(P(D), f, z, r) \le \omega(3r) \le 12\omega(r)$.

Пусть теперь $|z| > 2r$. По формуле Тейлора для всех $x \in B(z, r)$ имеем

$$\begin{aligned} f(x) = f(z) &+ \sum_{|k|=1}(l(z)\partial^k g(z) + \partial^k l(z)g(z))(x-z)^k \\ &+ 2\sum_{|k|=2}(x-z)^k(k!)^{-1}\int_0^1(1-t)\partial^k f(z+t(x-z))\,dt \\ &= f(z) + l(x-z)g(z) + \sum_{|k|=1} l(z)\partial^k g(z)(x-z)^k \\ &+ 2\sum_{|k|=2}(x-z)^k(k!)^{-1}\int_0^1(1-t)\partial^k f(z+t(x-z))\,dt. \end{aligned} \tag{16}$$

Пользуясь (14) и невозрастанием функции $t^{-1}\omega(t)$, легко получить оценку

$$\sum_{|k|=1}|l(z)\partial^k g(z)(x-z)^k| + 2\sum_{|k|=2}\left|(x-z)^k(k!)^{-1}\int_0^1(1-t)\partial^k f(z+t(x-z))\,dt\right| \le C\omega(r),$$

справедливую при всех $x \in B(z, r)$, где положительная величина C не зависит от z и r. Применяя (16), отсюда получаем

$$E_\infty(P(D), f, z, r) \le \sup_{x\in B(z,r)}|f(x) - l(x-z)g(z)| \le C\omega(r).$$

Поскольку f непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, то $f \in U_p(P(D), \mathbb{R}^n, \omega)_{\mathrm{loc}}$. С другой стороны,

$$|f(x) - f(0)| = \|x\|\int_{\|x\|}^1 t^{-2}\omega(t)\,dt \ne O(\omega(\|x\|)) \quad (x \to 0).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров В. С.* Sur la representatione des fonctions analitiques au voisinage d'un ensemble de ses points singulier // Мат. сб. 1928. Т. 35. С. 237–250.
2. *Kaufman R., Wu J.-M.* Removable singularities for analytic or subharmonic functions // Ark. Mat. 1980. V. 18, N 4. P. 107–116.
3. *Ищанов Б. Ж.* Незамкнутые особые множества для слабых решений линейных дифференциальных уравнений // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин: Калининск. гос. ун-т, 1989. С. 41–49.
4. *Ищанов Б. Ж.* О представлении решений некоторых классов уравнений в виде потенциалов мер, распределенных на множестве особенностей // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 4. С. 455–458.

5. *Долженко Е. П.* Работы Д. Е. Меньшова по теории аналитических функций и современное состояние теории моногенности // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, № 5. С. 67–96.

6. *Покровский А. В.* Локальные аппроксимации решениями гипоэллиптических уравнений и устранимые особенности // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 1. С. 15–17.

7. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1986. Т. 2.

8. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб. 1962. Т. 59. С. 3–52.

9. *Покровский А. В.* Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 2. С. 260–272.

10. *Peetre J.* On the theory of $\mathscr{L}_{p,\lambda}$ spaces // J. Funct. Anal. 1968. V. 4. P. 71–87.

11. *Бесов О. В, Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.

12. *Аджиев С. С.* Характеризация функциональных пространств $B^s_{p,q}(G)$, $L^s_{p,q}(G)$, $W^s_p(G)$ и вложения в $BMO(G)$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214, С. 7–24; Испр.: там же. 1997. Т. 219. С. 463.

13. *Аджиев С. С.* Характеризация функциональных пространств $B^s_{p,q}(G)$, $L^s_{p,q}(G)$, $W^s_p(G)$ и некоторых других. Приложения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1999. Т. 227. С. 7–42.

14. *Giaquinta M.* Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic problems. Princeton: Princeton Univ. Press, 1983.

15. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1977.

16. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 484–521.

17. *Spanne S.* Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci (3). 1965. V. 19. P. 593–608.

18. *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations. New York: Springer-Verl., 1993.

19. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

20. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наук. думка, 1992.

21. *Гусейнов Е. Г.* Теоремы вложения классов непрерывных функций // Изв. АН Аз СССР. Сер. мат. 1979. Т. 2. С. 57–60.

22. *Бесов О. В.* Продолжение функций за пределы области с сохранением дифференциально-разностных свойств в L_p // Мат. сб. 1965. Т. 66, № 1. С. 80–96.

Статья поступила 17 декабря 2004 г.

Покровский Андрей Владимирович
Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3, Киев 01601, Украина
pokrovsk@imath.kiev.ua