Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 512.57

ПОЗИТИВНО–УСЛОВНЫЕ ПСЕВДОМНОГООБРАЗИЯ И НЕЯВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА НИХ

А. Г. Пинус

Аннотация: Исследуются синтаксические описания неявных операций на позитивно-условных псевдомногообразиях конечных алгебр и вопросы аксиоматизируемости позитивно-условных псевдомногообразий.

Ключевые слова: позитивно-условные псевдомногообразия, неявно позитивно-условные операции, позитивно-условные псевдотождества, позитивно-условные термы.

В теории конечных универсальных алгебр хорошо известна (см., к примеру, [1–4]) роль псевдомногообразий, псевдоквазимногообразий и неявных операций на подобных классах конечных алгебр. В работе [5] автором введены понятия псевдоуниверсального класса конечных алгебр и неявных условных операций на псевдоуниверсальных классах и получен ряд утверждений, которые либо обобщают утверждения о псевдомногообразиях и неявных операциях на них, либо аналогичны таковым. В настоящей работе подобные шаги предприняты для ситуации, связанной с так называемыми позитивно-условными термами и позитивно-условными многообразиями (см. [6, 7]).

Напомним введенные в [5] понятия позитивно-условного терма сигнатуры σ и позитивно-условного многообразия. Под *позитивным условием сигнатуры* σ будем понимать любую конечную совокупность равенств между стандартными термами этой сигнатуры. Понятие позитивно-условного терма сигнатуры σ для класса алгебр $\mathscr{K}$ этой сигнатуры определяется следующей индукцией:

1) любой стандартный терм сигнатуры σ является позитивно-условным;

2) если $f(x_1,\dots,x_k)\in\sigma$ и $t_1(\bar x),\dots,t_k(\bar x)$ — позитивно-условные термы для $\mathscr{K}$, то $f(t_1(\bar x),\dots,t_k(\bar x))$ — позитивно-условный терм для $\mathscr{K}$;

3) если $\mathscr{P}_1(\bar x),\dots,\mathscr{P}_s(\bar x)$ — конечная совокупность позитивных условий, $t_1(\bar x),\dots,t_s(\bar x)$ — позитивно-условные термы для $\mathscr{K}$ и

$$\mathscr{K}\models\forall\bar x\left(\bigvee_{\bar i=1}^{s}\mathscr{P}_i(\bar x)\right),\quad \mathscr{K}\models\forall\bar x(\mathscr{P}_i(\bar x)\&\mathscr{P}_j(\bar x)\to t_i(\bar x)=t_j(\bar x))$$

для любых $i,j\le s$, то схема

$$(\bar x)=\begin{cases}\mathscr{P}_1(\bar x)\to t_1(\bar x)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \mathscr{P}_s(\bar x)\to t_s(\bar x)\end{cases}\qquad(*)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00258).

также является позитивно-условным термом для $\mathscr{K}$.

На любой алгебре $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$ любой позитивно-условный терм для $\mathscr{K}$ естественным образом определяет соответствующую позитивно-условно термальную функцию. При этом если $t(\bar{x})$ определен по схеме $(*)$, то для любых $\bar{a}, c \in \mathscr{A}$

$$\mathscr{A} \models t(\bar{a}) = c \Longleftrightarrow \text{существует } i \leq s \text{ такой, что } \mathscr{A} \models \mathscr{P}_i(\bar{a}) \& t_i(\bar{a}) = c.$$

Формальное равенство $t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$ двух позитивно-условных термов называем *позитивно-условным тождеством.* Совокупность всех алгебр, на которых истинна совокупность позитивно-условных тождеств, называется *позитивно-условным многообразием.* В работе [5] доказано, что наименьшее позитивно-условное многообразие, содержащее некоторый класс алгебр $\mathscr{K}$, является пересечением квазимногообразия, порожденного классом $\mathscr{K}$, и универсального (т. е. аксиоматизируемого $\forall$-формулами) класса, порожденного классом $\mathscr{K}$, иначе говоря, позитивно-условное многообразие, порожденное классом $\mathscr{K}$, — это наименьший абстрактный класс $\mathscr{K}'$ алгебр, включающий в себя $\mathscr{K}$, замкнутый относительно ультрапроизведений, подалгебр и гомоморфных образов разложимых в подпрямое произведение $\mathscr{K}'$-алгебр. Кроме того, в работе [5] доказано, что если $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ — конечная совокупность конечных алгебр и $\mathscr{K} = I\ (\{\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n\})$ (т. е. совокупность всех алгебр, изоморфных алгебрам $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$) является позитивно-условным многообразием, то совокупность функций, коммутирующих с гомоморфизмами между $\mathscr{K}$-алгебрами, есть совокупность позитивно-условно термальных функций для $\mathscr{K}$.

Пусть $\mathscr{K}$ — абстрактный класс конечных алгебр, замкнутый относительно подалгебр и гомоморфных образов разложимых в подпрямое произведение $\mathscr{K}$-алгебр. Подобный класс $\mathscr{K}$ назовем *позитивно-условным псевдомногообразием.* Для любого класса $\mathscr{K}$ через $\mathscr{K}_{\aleph_0}$ будем обозначать класс всех конечных $\mathscr{K}$-алгебр. Очевидно, что для любого позитивно-условного многообразия $\mathscr{M}$ класс $\mathscr{M}_{\aleph_0}$ является позитивно-условным псевдомногообразием. Однако обратное (аналогично ситуации с псевдомногообразиями и псевдоквазимногообразиями и в отличие от ситуации с псевдоуниверсальными классами) неверно. Как показывает следующий пример, существуют позитивно-условные псевдомногообразия $\mathscr{K}$, для которых равенство $\mathscr{K} = \mathscr{M}_{\aleph_0}$ неверно ни для какого позитивно-условного многообразия $\mathscr{M}$. Действительно, пусть сигнатура σ состоит из одной одноместной функции f и $\mathscr{K}$ — совокупность f-циклов простой длины. Рассмотрим $\mathscr{M}$ — позитивно-условное многообразие, порожденное классом $\mathscr{K}$. Прежде всего очевидно, что $\mathscr{K}$ является позитивно-условным псевдомногообразием. Так как $\mathscr{M}$ замкнуто относительно ультрапроизведений, то $\mathscr{M}$ содержит алгебру $\mathscr{A}$ вида $\langle Z;' \rangle$, где Z — множество целых чисел и $n' = n + 1$ для любого $n \in Z$. Пусть p_1, p_2 — два различных простых числа и $\mathscr{A}_{p_i} f$ — цикл длины p_i. Тогда алгебра $\mathscr{A}_{p_1} \times \mathscr{A}_{p_2}$ как гомоморфный образ алгебры $\mathscr{A}$, разложимый в прямое произведение $\mathscr{K}$-алгебр, входит в класс $\mathscr{M}_{\aleph_0} \setminus \mathscr{K}$ и тем самым $\mathscr{K} \neq \mathscr{M}'_{\aleph_0}$ ни для какого позитивно-условного многообразия $\mathscr{M}'$.

Однако, как и для псевдоквазимногообразий и условных псевдомногообразий, для позитивно-условных псевдомногообразий имеет место аналог теоремы Эйленберга — Шутценберже о псевдомногообразиях. Для любой совокупности $\phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$ позитивно-условных тождеств, где $\langle I; \leq \rangle$ — некоторое направленное вверх частично упорядоченное множество, будем говорить, что ϕ *финально истинно на алгебре* $\mathscr{A}$, если для некоторого $k \in I$ на $\mathscr{A}$ истинны все позитивно-условные тождества из совокупности $\phi_k = \{\varphi_i \mid i \in I,\ i \geq k\}$. Через

$\mathrm{Mod}^u\,\phi$ обозначим класс всех алгебр, на которых финально истинна совокупность ϕ.

Теорема 1. *Для любого позитивно-условного псевдомногообразия $\mathscr{K}$ существует совокупность позитивно-условных тождеств ϕ такая, что*

$$\mathscr{K} = (\mathrm{Mod}^u\,\phi)_{\aleph_0}.$$

Доказательство. Пусть для некоторых множеств J_1, J_2 имеют место равенства $\mathscr{K} = I\{\mathscr{A}_i \mid i \in J_1\}$ и $\sigma = \langle f_i \mid i \in J_2\rangle$, где σ — сигнатура класса $\mathscr{K}$. Через $P_\omega(A)$ обозначим совокупность всех конечных подмножеств произвольного множества A.

Для любого $S \in P_\omega(J_2)$ через σ_S обозначим сигнатуру $\langle f_i \mid i \in S\rangle$, а через $\mathscr{A}^S$ — обеднение алгебры $\mathscr{A}$ сигнатуры σ до сигнатуры σ_S. Для любого натурального n и любого $S \in P(J_2)$ через $\mathscr{K}_{n,S}$ будем обозначать совокупность представителей типов изоморфизма алгебр из совокупности $\bigl\{\mathscr{A}_i^S \mid i \in J_1$ и $|\mathscr{A}_i| \le n\bigr\}$. Тогда, выбирая при данном n достаточно большое S, можно считать, что $\mathscr{K}_{n,S}$ — конечная совокупность алгебр, замкнутая относительно подалгебр.

Пусть $\mathscr{K}'_{n,S}$ — расширение совокупности $\mathscr{K}_{n,S}$ путем добавления к ней представителей типов изоморфизма алгебр, являющихся гомоморфными образами $\mathscr{K}_{n,S}$-алгебр, разложимыми в подпрямое произведение $\mathscr{K}_{n,S}$-алгебр. Очевидно, что $\mathscr{K}'_{n,S}$ — конечная совокупность конечных алгебр и класс $I\mathscr{K}'_{n,S}$ — абстрактный класс, замкнутый относительно подалгебр и гомоморфных образов, разложимых в подпрямое произведение $I\mathscr{K}'_{n,S}$-алгебр.

В силу теоремы 1 из [5] класс $I\mathscr{K}'_{n,S}$ является позитивно-условным многообразием и, следовательно, найдется совокупность позитивно-условных тождеств $\phi_{n,S}$ такая, что $I\mathscr{K}'_{n,S} = \mathrm{Mod}(\phi_{n,S})$. Пусть $\phi_{n,S} = \bigl\{\psi^k_{n,S} \mid k \in I_{n,S}\bigr\}$. Очевидно, что для любых $n, m \in \omega$, $S_1, S_2 \in P_\omega(J_2)$ из неравенств $n \le m$, $S_1 \subseteq S_2$ вытекает отношение $\phi_{n,S_1} \vdash \phi_{m,S_2}$. Пусть

$$\phi = \bigcup_{n\in\omega,\, S\in P(J_2)} \phi_{n,S} = \bigl\{\psi^k_{n,S} \mid n \in \omega,\ S \in P_\omega(J_2),\ k \in I_{n,S}\bigr\}.$$

Совокупность $I = \{\langle k, n, S\rangle \mid n \in \omega,\ S \in P_\omega(J_2),\ k \in I_{n,S}\}$ упорядочим отношением $\le$ следующим образом: $\langle k_1, n_1, S_1\rangle < \langle k_2, n_2, S_2\rangle$ тогда и только тогда, когда $n_1 < n_2$ и $S_1 \subseteq S_2$ или $n_1 = n_2$ и $S_1 \subset S_2$. Покажем, что $\mathscr{K} = (\mathrm{Mod}^u\,\phi)_{\aleph_0}$. Включение $\mathscr{K} \subseteq (\mathrm{Mod}^u\,\phi)_{\aleph_0}$ очевидно. Пусть теперь $\mathscr{A}$ — конечная алгебра такая, что для некоторых $n \in \omega$, $S \in P_\omega(J_2)$, $k \in I_{n,S}$ имеет место $\mathscr{A} \models \psi^r_{m,S'}$ для любых $\langle r, m, S'\rangle \in I$ таких, что $\langle n, k, S\rangle \le \langle r, m, S'\rangle$. Тогда $\mathscr{A} \in I\mathscr{K}'_{n,S'}$ для любого $S' \supseteq S$. Тем самым найдется алгебра $\mathscr{A}_i$, где $i \in J_1$, $|\mathscr{A}_i| \le n$, и для любого $S' \supseteq S$ найдется некоторый гомоморфизм $\varphi_{S'}$ алгебры $\mathscr{A}_i^S$ на алгебру $\mathscr{A}^S$, при этом алгебра $\mathscr{A}^S$ разложима с помощью отображения $\psi_{S'}$ в подпрямое произведение алгебр из $\mathscr{K}_{n,S'}$. Так как число отображений из $\mathscr{A}_i^S$ на $\mathscr{A}$ конечно и конечно число отображений из $\mathscr{A}$ в подпрямые произведения алгебр из $\mathscr{K}_{n,S}$, то найдутся кофинальная в $P_\omega(J_2)$ совокупность B, а также некоторые фиксированные отображение φ алгебры $\mathscr{A}_i$ на $\mathscr{A}$ и разложение ψ основного множества алгебры $\mathscr{A}$ в подпрямое произведение основных множеств алгебр из $\mathscr{K}_{n,S}$ такие, что для любого $S \in B$ имеют место равенства $\varphi = \varphi_S$ и $\psi = \psi_S$. Тем самым алгебра $\mathscr{A}$ является гомоморфным образом алгебры $\mathscr{A}_i$, разложимым в подпрямое произведение алгебр из $\mathscr{K}$, т. е. $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$, и равенство $\mathscr{K} = (\mathrm{Mod}^u\,\phi)_{\aleph_0}$, из которого следует утверждение теоремы, доказано.

Заметим также, что в случае конечности сигнатуры σ множество I (индексное множество для совокупности позитивно-условных тождеств ϕ) в формулировке теоремы 1 может быть выбрано упорядоченным по типу ω. Действительно, в этом случае в доказательстве теоремы 1 нет нужды рассматривать ограничения сигнатуры σ до сигнатур σ_S, т. е. можно считать, что $\sigma_S = \sigma$. Тогда классы $\mathscr{K}'_{n,S}$ и $\mathscr{K}_{n,S}$ совпадают и состоят из конечного числа конечных алгебр. В силу этого классы $I\mathscr{K}_{n,S}$ являются конечно аксиоматизируемыми в логике первого порядка. С другой стороны, классы $I\mathscr{K}_{n,S}$ как позитивно-условные многообразия аксиоматизируемы позитивно-условными тождествами, а значит, конечным числом позитивно-условных тождеств в силу конечной аксиоматизируемости этих классов. Теперь возможность упорядочить множество I по типу ω очевидна.

Пусть $\mathscr{K}$ — некоторое позитивно-условное псевдомногообразие и n-местная функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ определена на каждой из $\mathscr{K}$-алгебр, причем она коммутирует со всеми изоморфными вложениями $\mathscr{K}$-алгебр друг в друга и со всеми гомоморфизмами $\mathscr{K}$-алгебр на $\mathscr{K}$-алгебры. Подобную функцию назовем *неявной позитивно-условной операцией на классе* $\mathscr{K}$. Формальное равенство $g_1(x_1, \ldots, x_n) = g_2(x_1, \ldots, x_n)$ двух неявных позитивно-условных операций на классе $\mathscr{K}$ будем называть *позитивно-условным псевдотождеством* и будем говорить, что это позитивно-условное псевдотождество *выполнено на* $\mathscr{K}$-алгебре $\mathscr{A}$, если функции g_1 и g_2 на алгебре $\mathscr{A}$ совпадают. Для любой совокупности $\Im$ позитивно-условных псевдотождеств на классе $\mathscr{K}$ через $\mathrm{Mod}_{\mathscr{K}}(\Im)$ обозначим совокупность $\mathscr{K}$-алгебр, на которых истинны позитивно-условные псевдотождества из $\Im$.

Имеет место следующий аналог теоремы Райтермана о псевдотождествах и теоремы 2 из [6] об условных псевдотождествах.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{K}_0$ — некоторое фиксированное позитивно-условное псевдомногообразие конечной сигнатуры и $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{K}_0$. Тогда $\mathscr{K}$ является позитивно-условным псевдомногообразием тогда и только тогда, когда для некоторой совокупности позитивно-условных псевдотождеств $\Im$ имеет место равенство $\mathscr{K} = \mathrm{Mod}_{\mathscr{K}_0}(\Im)$.*

Доказательство следует идеям Хиггинса [3]. Пусть $\Im$ — совокупность всех позитивно-условных псевдотождеств на классе $\mathscr{K}_0$, которым удовлетворяют все алгебры из класса $\mathscr{K}$. Достаточно доказать, что $\mathscr{K} = \mathrm{Mod}_{\mathscr{K}_0}(\Im)$. Предположим противное: пусть $\mathscr{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathscr{K}_0}(\Im) \setminus \mathscr{K}$. В силу утверждения теоремы 1 и замечания после нее о случае конечной сигнатуры найдется совокупность $\{t_i^1 = t_i^2 \mid i \in \omega\}$ позитивно-условных тождеств такая, что конечная алгебра $\mathscr{B}$ входит в $\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда для некоторого $k \in \omega$ имеет место $\mathscr{B} \models t_i^1 = t_i^2$ для любого $i \in \omega$, не меньшего k. Так как $\mathscr{A} \notin \mathscr{K}$, существует подпоследовательность $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \ldots$ такая, что для всех $m \in \omega$

$$\mathscr{A} \not\models t_{r_m}^1(x_1, \ldots, x_{n_{r_m}}) = t_{r_m}^2(x_1, \ldots, x_{n_{r_m}}).$$

Для любого натурального k в силу конечности сигнатуры класса $\mathscr{K}_0$ существует лишь конечное число типов изоморфизма $\mathscr{K}_0$-алгебр мощности, не превышающей k. Тем самым в последовательности r_m можно выделить подпоследовательность j_m $(m \in \omega)$ такую, что для любого натурального числа k и любой алгебры $\mathscr{B} \in \mathscr{K}$ такой, что $|\mathscr{B}| \leq k$, на $\mathscr{B}$ истинны позитивно-условные тождества

$$t_{j_m}^1(x_1, \ldots, x_{n_{j_m}}) = t_{j_m}^2(x_1, \ldots, x_{n_{j_m}})$$

при $m \geq k$.

Пусть $|\mathscr{A}| = n$. Так как

$$\mathscr{A} \nvDash t^1_{j_m}(x_1, \ldots, x_{n_{j_m}}) = t^2_{j_m}(x_1, \ldots, x_{n_{j_m}}),$$

найдется некоторое логическое следствие позитивно-условного тождества $t^1_{j_m} = t^2_{j_m}$ — позитивно-условное тождество $h^1_{j_m}(x_1, \ldots, x_n) = h^2_{j_m}(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных такое, что

$$\mathscr{A} \nvDash h^1_{j_m}(x_1, \ldots, x_n) = h^2_{j_m}(x_1, \ldots, x_n)$$

для любого $m \in \omega$. При этом для любого натурального k и любой алгебры $\mathscr{B} \in \mathscr{K}$ такой, что $|\mathscr{B}| \leq k$,

$$\mathscr{B} \models h^1_{j_m}(x_1, \ldots, x_n) = h^2_{j_m}(x_1, \ldots, x_n)$$

при $m \geq k$.

Два позитивно-условных тождества $t_1 = t_2$ и $h_1 = g_2$ назовем *k-эквивалентными* (k — некоторое натуральное число), если на любой $\mathscr{K}_0$-алгебре $\mathscr{B}$ мощности, не превышающей k, совпадают позитивно-условно термальные функции, определяемые позитивно-условными термами t_1, h_1 и t_2, h_2 соответственно. Таким образом, для любого k и любой бесконечной совокупности позитивно-условных тождеств T от n переменных хотя бы один из классов k-эквивалентности на T бесконечен. На основе этого индукцией по $k \in \omega$ выбираем подпоследовательность $l_1 < l_2 < \cdots < l_n < \ldots$ последовательности $j_1 < j_2 < \cdots < j_n < \ldots$ такую, что для любого натурального k позитивно-условные тождества $h^1_{l_1} = h^2_{l_2}, \ldots, h^1_{l_k} = h^2_{l_k}$ k-эквивалентны.

На $\mathscr{K}_0$-алгебрах следующим образом определим неявные позитивно-условные операции $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $g_2(x_1, \ldots, x_n)$: если $\mathscr{B} \in \mathscr{K}_0$ и $|\mathscr{B}| \leq k$ для некоторого k, то $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ является позитивно-условно термальной функцией на $\mathscr{B}$, определяемой на $\mathscr{B}$ позитивно-условным термом $h^1_{l_k}$. Аналогично с помощью позитивно-условного терма $h^2_{l_k}$ на $\mathscr{B}$ определяется операция $g_2(x_1, \ldots, x_n)$. В силу выбора последовательности $l_1 < l_2 < \cdots < l_n < \ldots$ операции g_1 и g_2 являются неявными позитивно-условными на $\mathscr{K}_0$, при этом на $\mathscr{K}$-алгебрах истинно позитивно-условное псевдотождество

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = g_2(x_1, \ldots, x_n),$$

так как если $\mathscr{B} \in \mathscr{K}$ и $|\mathscr{B}| \leq k$, то

$$\mathscr{B} \models g_1(x_1, \ldots, x_n) = h^1_{l_k}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\mathscr{B} \models g_2(x_1, \ldots, x_n) = h^2_{l_k}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\mathscr{B} \models h^1_{l_k}(x_1, \ldots, x_n) = h^2_{l_k}(x_1, \ldots, x_n),$$

т. е. позитивно-условное псевдотождество $g_1 = g_2$ входит в совокупность $\Im$.

Поскольку $|\mathscr{A}| = n$ и

$$\mathscr{A} \nvDash h^1_{l_n}(x_1, \ldots, x_n) = h^2_{l_n}(x_1, \ldots, x_n),$$

то

$$\mathscr{A} \nvDash g_1(x_1, \ldots, x_n) = g_2(x_1, \ldots, x_n).$$

Полученное противоречие и доказывает равенство $\mathscr{K} = \mathrm{Mod}_{\mathscr{K}_0}(\Im)$. Теорема доказана.

Позитивно-условное многообразие $\mathscr{K}$ назовем *конечным*, если $\mathscr{K} = I(\mathscr{K}')$ для некоторой конечной совокупности конечных алгебр $\mathscr{K}'$. Как замечено выше, в работе [5] доказано, что любая неявная позитивно-условная операция на конечном позитивно-условном многообразии является позитивно-условно термальной. Так как любое позитивно-условное псевдомногообразие $\mathscr{K}$ конечной сигнатуры аппроксимируется конечными позитивно-условными многообразиями $\mathscr{K}_n$ $(n \in \omega)$, то на любом позитивно-условном псевдомногообразии конечной сигнатуры любая неявная позитивно-условная операция g аппроксимируется позитивно-условно термальными функциями. Иначе говоря, для любого подобного $\mathscr{K}$, для любой подобной g и любой $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$ существует позитивно-условно термальная на $\mathscr{A}$ функция h такая, что h совпадает с g на алгебре $\mathscr{A}$.

Это, как и в случае с псевдомногообразиями и условными псевдомногообразиями, дает основание ввести некоторую естественную метрику на совокупности неявных позитивно-условных операций на любом позитивно-условном псевдомногообразии $\mathscr{K}$ так, что совокупность позитивно-условно термальных функций на $\mathscr{K}$ оказывается плотным подмножеством в соответствующем метрическом пространстве неявных позитивно-условных операций на $\mathscr{K}$.

Для произвольных неявных позитивно-условных операций $g(x_1, \ldots, x_m)$, $h(x_1, \ldots, x_m)$ на фиксированном позитивно-условном псевдомногообразии $\mathscr{K}$ определим функцию $d(g, h) = \min\{n \in \omega \mid$ в классе $\mathscr{K}_n$ существует алгебра $\mathscr{A}$, на которой операции g и h не совпадают$\}$.

Полагаем $\varrho(g, h) = 2^{-d(g,h)}$. Очевидно, что совокупность $PCIO^m_{\mathscr{K}}$ m-местных неявных позитивно-условных операций на классе $\mathscr{K}$, наделенная метрикой ϱ, является метрическим пространством. В силу замеченного выше совокупность $PCT^m_{\mathscr{K}}$ m-местных позитивно-условно термальных функций на алгебрах класса $\mathscr{K}$ является плотным подмножеством в метрическом пространстве $PCIO^m_{\mathscr{K}}$. При этом если $\mathscr{K}$ — конечное позитивно-условное псевдомногообразие, то $PCT^m_{\mathscr{K}} = PCIO^m_{\mathscr{K}}$.

На совокупности $PCIO^m_{\mathscr{K}}$ естественным образом можно определить функции сигнатуры σ. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \sigma$ и $g_1, \ldots, g_k \in PCIO^m_{\mathscr{K}}$. Тогда, определяя на любой $\mathscr{K}$-алгебре $\mathscr{A}$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_m$ из $\mathscr{A}$ значение операции $f(g_1, \ldots, g_k)$ как

$$f(g_1, \ldots, g_k)(a_1, \ldots, a_m) = f(g_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, g_k(a_1, \ldots, a_m)),$$

очевидным образом получаем, что операция $f(g_1, \ldots, g_k)$ является неявной позитивно-условной операцией на классе $\mathscr{K}$. Подобным образом определенную σ-алгебру $\langle PCIO^m_{\mathscr{K}}; \sigma\rangle$ обозначим через $PCJO^m_{\mathscr{K}}$ и назовем *алгеброй неявных позитивно-условных операций на позитивно-условном псевдомногообразии* $\mathscr{K}$.

Для любой алгебры $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$ через $PC\Im^m_{\mathscr{A}}$ обозначим σ-алгебру $PCJO^m_{\mathscr{K}(\mathscr{A})}$, где $\mathscr{K}(\mathscr{A})$ — позитивно-условное псевдомногообразие, порожденное алгеброй $\mathscr{A}$. При этом алгебра $PC\Im^m_{\mathscr{A}}$ — это на самом деле σ-алгебра позитивно-условно термальных функций на алгебре $\mathscr{A}$, наделенная дискретной топологией. Так же, как в работе [5] для алгебр m-местных неявных условных операций на псевдоуниверсальных классах, без труда замечается справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Алгебра m-местных неявных позитивно-условных операций $PCJO^m_{\mathscr{K}}$ на любом позитивно-условном псевдомногообразии $\mathscr{K}$ конечной сигнатуры разложима в подпрямое произведение алгебр $PC\Im^m_{\mathscr{A}_i}$ m-местных позитивно-условно термальных функций на алгебрах $\mathscr{A}_i$* (где $\{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$ — *пред-*

ставители типов изоморфизма $\mathscr{K}$-алгебр). При этом алгебра $PCJO^m_{\mathscr{K}}$ — хаусдорфова компактная вполне несвязная топологическая σ-алгебра. Алгебра же $PC\Im^m_{\mathscr{K}}$ m-местных позитивно-условно термальных функций на классе $\mathscr{K}$ является плотной подалгеброй алгебры $PCJO^m_{\mathscr{K}}$, а последняя — пополнением алгебры $PC\Im^m_{\mathscr{K}}$.

Отметим еще одну форму связи неявных позитивно-условных операций на позитивно-условных псевдомногообразиях с позитивно-условно термальными функциями. Напомним, что, как замечено в [7], любой позитивно-условный терм на классе $\mathscr{K}$ сигнатуры σ эквивалентен позитивно-условному терму в нормальной форме, т. е. имеющему вид

$$t(x_1,\dots,x_m)=\begin{cases}\mathscr{P}_1(x_1,\dots,x_m)\to t_1(x_1,\dots,x_m)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \mathscr{P}_k(x_1,\dots,x_m)\to t_k(x_1,\dots,x_m),\end{cases}$$

где k — некоторое натуральное число, $t_i(x_1,\dots,x_m)$ — стандартные термы сигнатуры σ, а $\mathscr{P}_i(x_1,\dots,x_m)$ — позитивные условия, т. е. конечные системы равенств между термами сигнатуры σ, при этом

$$\mathscr{K}\models\forall x_1,\dots,x_m\left(\bigvee_{i=1}^{k}\mathscr{P}_i(x_1,\dots,x_m)\right),$$

а для $i\neq j$

$$\mathscr{K}\models\forall x_1,\dots,x_m(\mathscr{P}_i(x_1,\dots,x_m)\ \&\ \mathscr{P}_j(x_1,\dots,x_m)\\ \to t_i(x_1,\dots,x_m)=t_j(x_1,\dots,x_m)).$$

Пусть $\mathscr{K}^m_n$ — подкласс класса $\mathscr{K}$, состоящий из m-порожденных $\mathscr{K}$-алгебр, мощность которых не превышает n $(m,n\in\omega)$. Пусть $\{\mathscr{A}^n_1,\dots,\mathscr{A}^n_{l_n}\}$ — представители типов изоморфизма алгебр из $\mathscr{K}^m_n\setminus\bigcup\limits_{j<n}\mathscr{K}^m_j$ с фиксированными (с точностью до их позитивных бескванторных типов в алгебрах $\mathscr{A}_i$) порождающими. Пусть $\mathscr{P}^r_i(x_1,\dots,x_m)$ — позитивная диаграмма алгебры $\mathscr{A}^r_i$ при интерпретации переменных $x_1,\dots,x_m$ порождающими соответствующих алгебр $\mathscr{A}^r_i$. Пусть $t^r_i(x_1,\dots,x_m)$ — терм сигнатуры σ такой, что

$$\mathscr{A}^r_i\models g(a_1,\dots,a_m)=t^r_i(a_1,\dots,a_m),$$

где $a_1,\dots,a_m$ — порождающие алгебры $\mathscr{A}^r_i$ такие, что $\mathscr{A}^r_i\models\mathscr{P}^r_i(a_1,\dots,a_m)$.

Рассмотрим следующую бесконечную схему, подобную определению позитивно-условного терма:

$$t(x_1,\dots,x_m)=\begin{cases}\mathscr{P}^1_1(x_1,\dots,x_m)\to t^1_1(x_1,\dots,x_m)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \mathscr{P}^n_1(x_1,\dots,x_m)\to t^n_1(x_1,\dots,x_m)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \mathscr{P}^n_{l_n}(x_1,\dots,x_m)\to t^n_{l_n}(x_1,\dots,x_m)\\ \mathscr{P}^{n+1}_1(x_1,\dots,x_m)\to t^{n+1}_1(x_1,\dots,x_m)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

Подобную схему назовем *бесконечно позитивно-условным термом на классе* $\mathscr{K}$. В силу коммутируемости неявных позитивно-условных операций с гомоморфизмами между $\mathscr{K}$-алгебрами и замкнутости позитивно-условного многообразия относительно перехода к подалгебрам имеет место

$$\mathscr{K} \models \forall x_1, \ldots, x_m \Big(\bigvee_{\substack{r \in \omega \\ j \le l_r}} \mathscr{P}_j^r(x_1, \ldots, x_m) \Big),$$

и для любых $r_1, r_2 \in \omega$ и $j_1 \le l_{r_1}$, $j_2 \le l_{r_2}$

$$\mathscr{K} \models \forall x_1, \ldots, x_m \big(\mathscr{P}_{j_1}^{r_1}(x_1, \ldots, x_m) \& \mathscr{P}_{j_2}^{r_2}(x_1, \ldots, x_m) \to t_{j_1}^{r_1}(x_1, \ldots, x_m) = t_{j_2}^{r_2}(x_1, \ldots, x_m) \big).$$

Естественным образом с помощью этого бесконечного позитивно-условного терма $t(x_1, \ldots, x_m)$ на $\mathscr{K}$-алгебрах определим операцию $t(x_1, \ldots, x_m)$: для любой $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$ и любых $b_1, \ldots, b_m,\ c \in \mathscr{A}$

$$\mathscr{A} \models t(b_1, \ldots, b_m) = c \Longleftrightarrow \mathscr{A} \models \mathscr{P}_j^n(b_1, \ldots, b_m) \,\&\, t_j^n(b_1, \ldots, b_m) = c.$$

В силу замеченного выше определение операции t корректно и операция t, определенная на $\mathscr{K}$-алгебрах подобным образом, совпадает с исходной неявной позитивно-условной операцией g на $\mathscr{K}$. При этом если $\mathscr{K}$ — равномерно локально конечное (в частности, конечное) позитивно-условное псевдомногообразие (т. е. существует функция $h : \omega \to \omega$ такая, что мощность любой n-порожденной $\mathscr{K}$-алгебры не превышает числа $h(n)$), то терм $t(x_1, \ldots, x_m)$ является обычным позитивно-условным термом (состоит из конечного числа строк). Тем самым имеет место следующее

Утверждение 1. *Неявные позитивно-условные операции на позитивно-условных псевдомногообразиях $\mathscr{K}$ конечной сигнатуры определимы бесконечными позитивно-условными термами на $\mathscr{K}$, а в случае равномерной локальной конечности $\mathscr{K}$ — позитивно-условными термами на $\mathscr{K}$.*

Представляется естественным вопрос об определимости позитивно-условных псевдомногообразий конечной системой позитивно-условных псевдотождеств.

Пусть $\mathscr{K}_\sigma$ — класс всех конечных алгебр сигнатуры σ и $\mathscr{K}$ — некоторое позитивно-условное псевдомногообразие этой же сигнатуры. Как и в работе [6], класс $\mathscr{K}$ назовем *n-локальным* для некоторого натурального n, если любая σ-алгебра, все n-порожденные подалгебры которой суть $\mathscr{K}$-алгебры, сама входит в $\mathscr{K}$.

Теорема 4. *Для любой конечной сигнатуры σ если позитивно-условное псевдомногообразие $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{K}_\sigma$ таково, что единственный гомоморфный образ алгебр из $\mathscr{K}_\sigma \setminus \mathscr{K}$, входящий в $\mathscr{K}$, — это одноэлементная алгебра и $\mathscr{K}$ замкнут относительно гомоморфных образов, то $\mathscr{K}$ определимо внутри $\mathscr{K}_\sigma$ конечной системой позитивно-условных псевдотождеств тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}$ является n-локальным для некоторого натурального n. Более того, любое n-локальное позитивно-условное псевдомногообразие $\mathscr{K}$ определимо внутри $\mathscr{K}_\sigma$ некоторым одним позитивно-условным псевдотождеством вида $g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = x_{n+1}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{K}$ — n-локальное позитивно-условное псевдомногообразие и $\langle \mathscr{A}_1, a_1^1, \ldots, a_n^1 \rangle, \ldots, \langle \mathscr{A}_m, a_1^m, \ldots, a_n^m \rangle, \ldots$ — перечисление всех

n-порожденных $\mathscr{K}$-алгебр вместе с наборами их порождающих, включающих не более n элементов, а $\langle \mathscr{B}_1, b_1^1, \dots, b_n^1 \rangle, \dots, \langle \mathscr{B}_m, b_1^m, \dots, b_n^m \rangle, \dots$ — перечисление всех n-порожденных $(\mathscr{K}_\sigma \setminus \mathscr{K})$-алгебр вместе с наборами их порождающих, включающих не более n элементов.

Пусть $\mathscr{P}_{\langle \mathscr{A}_m, a_1^m, \dots, a_n^m \rangle}(x_1, \dots, x_n)$ — позитивная диаграмма алгебры $\mathscr{A}_m$ такая, что

$$\mathscr{A}_m \models \mathscr{P}_{\langle \mathscr{A}_m, a_1^m, \dots, a_n^m \rangle}(a_1^m, \dots, a_n^m).$$

Аналогично определяется формула $\mathscr{P}_{\langle \mathscr{B}_m, b_1^m, \dots, b_n^m \rangle}(x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим бесконечный позитивно-условный терм на $\mathscr{K}_\sigma$:

$$t(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = \begin{cases} \mathscr{P}_{\langle \mathscr{A}_1, a_1^1, \dots, a_n^1 \rangle}(x_1, \dots, x_n) \to x_{n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathscr{P}_{\langle \mathscr{A}^m, a_1^m, \dots, a_n^m \rangle}(x_1, \dots, x_n) \to x_{n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathscr{P}_{\langle \mathscr{B}^1, b_1^1, \dots, b_n^1 \rangle}(x_1, \dots, x_n) \to x_{n+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathscr{P}_{\langle \mathscr{B}^m, b_1^m, \dots, b_n^m \rangle}(x_1, \dots, x_n) \to x_{n+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

В силу того, что единственный гомоморфный образ алгебр из $\mathscr{K}_\sigma \setminus \mathscr{K}$ — это одноэлементная алгебра и $\mathscr{K}$ замкнут относительно гомоморфных образов, схема t действительно определяет бесконечный позитивно-условный терм на классе $\mathscr{K}_\sigma$.

Пусть $g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ — неявная позитивно-условная операция, определенная на $\mathscr{K}_\sigma$-алгебрах бесконечно позитивно-условным термом t. Тогда очевидно, что позитивно-условное псевдотождество $g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = x_{n+1}$ определяет позитивно-условное псевдомногообразие $\mathscr{K}$ внутри класса $\mathscr{K}_\sigma$.

Обратное, т. е. n-локальность позитивно-условного псевдомногообразия, определяемого внутри класса $\mathscr{K}_\sigma$ некоторой конечной системой позитивно-условных псевдотождеств, очевидно в силу того, что в этой системе фигурирует лишь конечное число переменных.

Хорошо известны понятие рациональной эквивалентности многообразий и теорема А. И. Мальцева о рационально эквивалентных многообразиях. По аналогии в работе [8] введено понятие условной рациональной эквивалентности универсальных классов и доказан категорный критерий этой эквивалентности. В работе [6] аналогичные вопросы рассмотрены для псевдоуниверсальных классов универсальных алгебр. Рассмотрим эту же ситуацию для позитивно-условных псевдомногообразий.

Два позитивно-условных псевдомногообразия $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ сигнатур σ_1 и σ_2 соответственно назовем *неявно позитивно-условно эквивалентными*, если существуют отображения F_1 (F_2) сигнатурных символов операций из σ_1 (σ_2) в совокупности неявных позитивно-условных операций на $\mathscr{K}_2$ $(\mathscr{K}_1)$ такие, что $F_1(f)$ $(F_2(F))$ для n-арного символа $f \in \sigma_1$ (σ_2) есть n-арная неявная позитивно-условная операция на $\mathscr{K}_2$ $(\mathscr{K}_1)$. При этом

1) для любой $\mathscr{K}_1$-алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ алгебра $F_2(\mathscr{A}) = \langle A; \sigma_2 \rangle$ принадлежит классу $\mathscr{K}_2$, здесь σ_2 — операции алгебры $F_2(\mathscr{A})$ — определены как соответствующие $F_2(\sigma_2)$-неявные позитивно-условные операции алгебры $\mathscr{A}$;

2) для любой $\mathscr{K}_2$-алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_2 \rangle$ алгебра $F_1(\mathscr{A}) = \langle A; \sigma_1 \rangle$ принадлежит классу $\mathscr{K}_1$;

3) для любой $\mathscr{K}_1$-алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ имеет место равенство $F_1(F_2(\mathscr{A})) = \mathscr{A}$;

4) для любой $\mathscr{K}_2$-алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_2 \rangle$ имеет место равенство $F_2(F_1(\mathscr{A})) = \mathscr{A}$.

Как обычно, под категорией $\overrightarrow{\mathscr{K}}$ класса универсальных алгебр $\mathscr{K}$ понимаем категорию, объектами которой являются $\mathscr{K}$-алгебры, а морфизмами — гомоморфизмы одной $\mathscr{K}$-алгебры в другую.

Классы алгебр $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ называются *категорно эквивалентными* тогда и только тогда, когда эквивалентны их категории $\overrightarrow{\mathscr{K}_1}$ и $\overrightarrow{\mathscr{K}_2}$, иначе говоря, когда существует изоморфизм G категории $\overrightarrow{\mathscr{K}_1}$ на категорию $\overrightarrow{\mathscr{K}_2}$, коммутирующий со стирающими функторами этих категорий, т. е. такой, что

$$S_{\mathscr{K}_2} \cdot G = S_{\mathscr{K}_1}.$$

Здесь $S_{\mathscr{K}}$ — стирающий функтор из категории $\overrightarrow{\mathscr{K}}$ в категорию множеств.

В силу определения неявной позитивно-условной эквивалентности очевидно, что любые неявно позитивно-условно эквивалентные позитивно-условные псевдомногообразия будут категорно эквивалентными. С другой стороны, из определения неявных позитивно-условных операций как любых операций, коммутирующих с гомоморфизмами между алгебрами позитивно-условного псевдомногообразия, столь же очевидно обратное.

Пусть, как и выше, для любого класса алгебр $\mathscr{K}$ и любого натурального n

$$\mathscr{K}_n = \{\mathscr{A} \in \mathscr{K} \mid |\mathscr{A}| \leq n\}.$$

Два позитивно-условных псевдомногообразия $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ назовем *аппроксимационно позитивно-условно эквивалентными*, если для любого $n \in \omega$ существуют отображения F_1^n (F_2^n) сигнатурных символов операций σ_1 (σ_2) в совокупности $PCT(\sigma_2)$ ($PCT(\sigma_1)$) такие, что для m-арного символа $f \in \sigma_1$ (σ_2), $F_1^n(f)$ ($F_2^n(f)$) есть m-арный позитивно-условный терм сигнатуры σ_2 (σ_1). При этом

1) для любой $(\mathscr{K}_1)_n$-алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ алгебра $F_2^n(\mathscr{A}) = \langle A; \sigma_2 \rangle$ принадлежит классу $(\mathscr{K}_2)_n$;

2) для любой $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_2 \rangle \in (\mathscr{K}_2)_n$ алгебра $F_1^n(\mathscr{A}) = \langle A; \sigma_1 \rangle$ входит в $(\mathscr{K}_1)_n$;

3) для любой $\mathscr{A} \in (\mathscr{K}_1)_n$ имеет место равенство $\mathscr{A} = F_1^n(F_2^n(\mathscr{A}))$;

4) для любой $\mathscr{A} \in (\mathscr{K}_2)_n$ имеет место равенство $\mathscr{A} = F_2^n(F_1^n(\mathscr{A}))$.

Ввиду отмеченной выше аппроксимации неявных позитивно-условных операций на позитивно-условных псевдомногообразиях конечной сигнатуры позитивно-условными термами очевидна связь между категорной эквивалентностью и аппроксимационной позитивно-условной эквивалентностью подобных классов алгебр. Таким образом, имеет место

Утверждение 2. *Для любых позитивно-условных псевдомногообразий $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ категорно эквивалентны,*

2) *$\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ неявно позитивно-условно эквивалентны.*

Если сигнатуры классов $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ конечны, то условиям 1 и 2 эквивалентно и условие:

3) *$\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ аппроксимационно позитивно-условно эквивалентны.*

В силу же определимости неявных позитивно-условных операций на равномерно локально конечных позитивно-условных псевдомногообразиях конечной сигнатуры позитивно-условными термами имеет место

Следствие 1. *Для любых равномерно локально конечных позитивно-условных псевдомногообразий $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ конечных сигнатур следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ категорно эквивалентны,

2) $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ позитивно-условно эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eilenberg S., Schutzenberger M. P.* On pseudovarieties // Adv. Math. 1976. V. 19, N 1. P. 413–418.

2. *Reiterman J.* The Birkhoff theorem for finite algebras // Algebra Univ. 1982. V. 14, N 1. P. 1–10.

3. *Higgins P. M.* An algebraic proof that pseudovarieties are defined by pseudoidentities // Algebra Univ. 1990. V. 27. P. 597–599.

4. *Ash C. J.* Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes // J. Algebra. 1985. V. 92. P. 104–115.

5. *Пинус А. Г.* Позитивно-условные многообразия // Алгебра и теория моделей. 3. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. С. 99–106.

6. *Пинус А. Г.* О неявных условных операциях на псевдоуниверсальных классах // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, № 4. С. 171–182.

7. *Пинус А. Г.* Внутренние гомоморфизмы и позитивно-условные термы // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 2. С. 158–173.

8. *Пинус А. Г.* Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 4. С. 432–459.

Статья поступила 14 октября 2004 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru